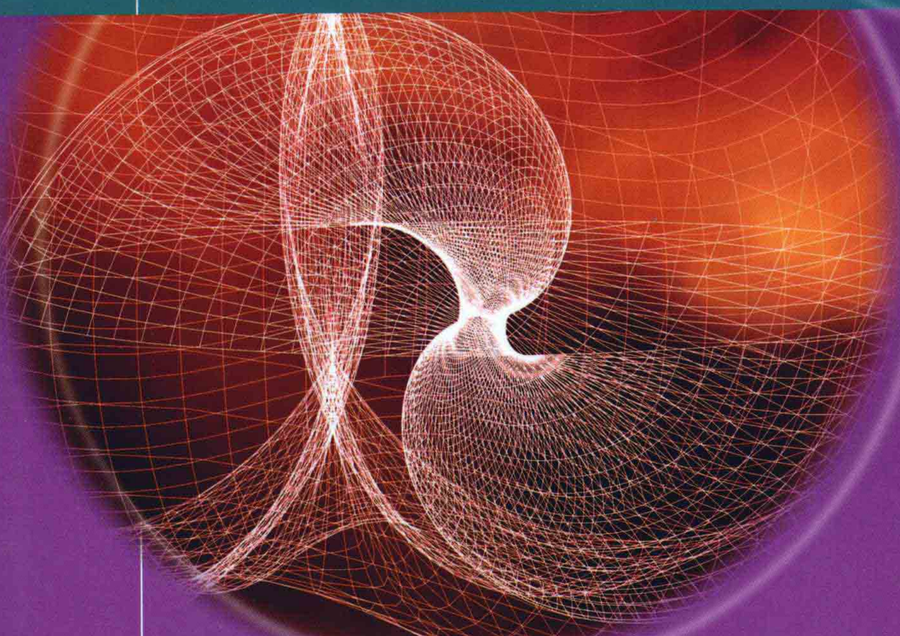
高等学校理工科数学类规划教材配套用书

线性代数
同步辅导

主审/代万基　编著/李淑敏 王红丽 张玉杰 梁 平



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

线性代数
同步辅导

■ 高等学校理工科数学类规划教材配套用书

线性代数

同步辅导

主审/代万基

编著/李淑敏 王红丽 张玉杰 梁 平

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数同步辅导 / 李淑敏等编著. 一大连:大连理工大学出版社,2008.12

ISBN 978-7-5611-4573-9

Ⅰ.线… Ⅱ.李… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 180500 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023

发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn

大连理工印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm　印张:8.625　字数:283 千字

2008 年 12 月第 1 版　　2008 年 12 月第 1 次印刷

责任编辑:王　伟　　责任校对:骁　杰

封面设计:宋　蕾

ISBN 978-7-5611-4573-9　　定　价:18.00 元

前　言

线性代数不仅是高等院校理工类、经济管理类等专业的重要基础课，也是研究生入学考试的一门必考科目。随着高等教育的日益普及，当前的普通高校在教学目标、教学内容、教学方法等方面与以往都有很大不同，编写高质量的教材及其辅导用书是十分必要而迫切的。

大连理工大学应用数学系在汲取传统教材和其他改革教材的长处，总结以往的教学经验的基础上编写的《线性代数》教材，满足了新形势下不同层次学生的需求。我们结合此教材编写了《线性代数同步辅导》，旨在为学生释疑、巩固、加深、提高所学知识，同时，它也可作为教师的参考书。

本书每章包括以下四个版块：

内容提要　简明扼要地概括本章主要内容，列出本章基本而重要的概念、定理，使学生清楚地把握本章重点。

释疑解惑　结合以往的教学经验，针对学生普遍困惑并有较大意义的问题，予以分析、解答，帮助学生准确并深化对概念的理解。

例题解析　根据本章的重点、难点，筛选一些典型例题，力争既强化基本知识、基本思想、基本方法，又富有灵活性、技巧性、综合性，以提高学生的解题能力及综合运用知识的能力。

习题全解 对教材中全部习题及提高题均给予详细解答。由于篇幅所限，对具有多种解法或答案的习题，一般只给出一种解法或答案。

本书由大连理工大学应用数学系、大连大学信息工程学院与大连工业大学信息科学与工程学院联合组织编写，限于编者水平，书中不妥之处，在所难免，恳请广大读者批评指正。

编著者

2008 年 12 月

目　录

第 1 章　矩阵及其基本运算

内容提要

1. 主要定义

(1)矩阵：由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 型矩阵.

(2)同型矩阵：若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同且列数也相同，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵.

(3)矩阵相等：若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 同型，并且其对应的元素 a_{ij} 和 b_{ij} 都相等，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相等.

(4)零矩阵：元素都为零的矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

(5)行矩阵：只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_1\ a_2\cdots\ a_n)$ 称为行矩阵，也可记作 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

(6)列矩阵：只有一列的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 称为列矩阵.

(7)对角矩阵：主对角线以外的元素都是零的方阵称为对角矩阵，通常记为 $\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$.

(8)上三角矩阵：主对角线下方的元素全为零的方阵称为上三角矩阵.

(9)下三角矩阵：主对角线上方的元素全为零的方阵称为下三角矩阵.

(10)数量矩阵：对角元都相同的对角阵 $\mathrm{diag}(a,a,\cdots,a)$ 称为数量矩阵.

(11)单位阵:对角元都为 1 的对角阵叫做单位阵,表为 $\boldsymbol{E}_n$,$\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$.

(12)转置阵:把 $m\times n$ 型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行与列互换所得的 $n\times m$ 型矩阵叫做 $\boldsymbol{A}$ 的转置阵,记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$.

(13)对称阵:设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{A}$ 叫做对称阵.

(14)反对称阵:设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{A}$ 叫做反对称阵.

(15)n 元向量:n 个有次序的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的数组称为 n 元向量.

(16)零向量:分量全为零的向量称为零向量,记作 $\mathbf{0}$.

(17)向量组:若干个同元数的列向量(或同元数的行向量)所组成的集合叫做向量组.

(18)分块阵:把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用若干条纵贯整个矩阵的横线和竖线分成许多小块(即子矩阵),以这些小块为元素的形式上的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的分块阵.

(19)初等行(列)变换:设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 型矩阵,则

①交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行(列)和第 j 行(列)的位置,叫做对调行(列)变换,记作 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$.

②用非零数 k 乘以 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行(列),叫做倍乘行(列)变换,记作 $r_i\times k(c_i\times k)$.

③将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行(列)的 k 倍加到第 j 行(列),叫做倍加行(列)变换,记作 $r_j+kr_i(c_j+kc_i)$.

上面的三种变换称为矩阵的初等行(列)变换.

(20)初等变换:矩阵的初等行变换和初等列变换合起来称为矩阵的初等变换.

(21)矩阵等价(相抵):如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成 $\boldsymbol{B}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价(或相抵).

(22)初等阵:由单位阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换所得到的矩阵叫做初等阵.

初等阵有以下三种类型:

①对调 $\boldsymbol{E}$ 的 i 和 j 两行(列)得到的方阵叫做对调阵,记作 $\boldsymbol{E}_{i,j}$.

②将 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行(列)乘以非零数 k 得到的方阵叫做倍乘阵,记作 $\boldsymbol{E}_i(k)$.

③用数 k 乘 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行加到第 i 行上或用数 k 乘 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 列加到第 j 列上得到的方阵叫做倍加阵,记作 $\boldsymbol{E}_{i,j}(k)$.

(23)矩阵的等价(相抵)标准形:

$$\text{与矩阵 } \boldsymbol{A} \text{ 等价的矩阵 } \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的等价(相抵)标准形.

$\boldsymbol{F}$ 包括$(\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{O})$,$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 三种特殊情况,它们分别对应于 $s=m<n$,$s=n<m$,$s=m=n$.

2. 矩阵的运算

(1)矩阵的线性运算

①矩阵的和与差:设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,则定义 $\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

②数与矩阵的积:设 k 为实数,则定义 $k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k=(ka_{ij})_{m\times n}$.

矩阵的加(减)法和数乘运算称为矩阵的线性运算,满足交换律、结合律、分配律.

(2)矩阵的乘积:设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$,则定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$,其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},$$

矩阵的乘积满足结合律、分配律,但不满足交换律、消去律.

(3)矩阵的幂:对于方阵 $\boldsymbol{A}$,k 个 $\boldsymbol{A}$ 相乘 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂,记作 $\boldsymbol{A}^k$,即 $\boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{k\text{个}}$.

(4)分块矩阵的运算

①如果将矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}_{m\times n}$ 分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{pq})_{s\times t}$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{pq})_{s\times t}$,且它们的行列分划方法一致,则

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_{pq})_{s\times t}\pm(\boldsymbol{B}_{pq})_{s\times t}=(\boldsymbol{A}_{pq}\pm\boldsymbol{B}_{pq})_{s\times t},\quad k\boldsymbol{A}=(k\boldsymbol{A}_{pq})_{s\times t}.$$

②如果将矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times l}$,$\boldsymbol{B}_{l\times n}$ 分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{pk})_{s\times r}$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{kq})_{r\times t}$,且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行分法与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列分法一致,则

$$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{C}_{pq})_{s\times t}=\Big(\sum_{k=1}^{r}\boldsymbol{A}_{pk}\boldsymbol{B}_{kq}\Big)_{s\times t}.$$

③转置:分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{pq})_{s\times t}$ 的转置矩阵为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}_{qp})_{t\times s}$,其中,$\boldsymbol{B}_{qp}=\boldsymbol{A}_{pq}^{\mathrm{T}}$,$p=1,2,\cdots,s$;$q=1,2,\cdots,t$.

3. 一些性质及结论

(1)两个同阶下三角阵的乘积仍为同阶下三角阵.

(2)两个同阶对角阵的乘积仍为同阶对角阵. 两个同阶对角阵相乘时,只需

将对角元对应相乘.

(3)对于 $m\times n$ 型矩阵 $\boldsymbol{A}$,若作一次初等行(列)变换得到 $\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}$ 等于一个对应的 m 阶(n 阶)初等方阵左乘(右乘)矩阵 $\boldsymbol{A}$;反之,若用一个 m 阶(n 阶)初等阵左乘(右乘)矩阵 $\boldsymbol{A}$ 得到 $\boldsymbol{B}$,则对 $\boldsymbol{A}$ 作一次对应的初等行(列)变换也可以得到 $\boldsymbol{B}$.

(4)对于任何方阵 $\boldsymbol{A}$,只用有限次倍加行(或列)变换能将 $\boldsymbol{A}$ 化为上三角阵,即一定有倍加阵 $\boldsymbol{P}_i(i=1,2,\cdots,k)$[或 $\boldsymbol{Q}_j(j=1,2,\cdots,l)$];使得 $\boldsymbol{P}_k\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$(或 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_l$)为上三角阵.

(5)对于任何 $m\times n$ 型非零矩阵 $\boldsymbol{A}$,必能用初等变换把它化为形如 $\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$的矩阵,即存在 m 阶初等阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_k$ 和 n 阶初等阵 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_l$,使得 $\boldsymbol{P}_k\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_l=\boldsymbol{F}$.

释疑解惑

【问 1-1】 为什么要研究矩阵及其运算?

答 线性代数中的矩阵及其运算概念是根据实际需要提出的.大量线性问题可以借助于矩阵方便地得到描述和解决.在实际问题中,我们往往需要表达“成批”的数据,这时借助于矩阵来表达就显得十分简明、清晰.例如:4 名学生数、理、化 3 科的考试成绩就可用 4×3 矩阵来表达.如果把单个的数看成单个的电子元件,那么矩阵就可看做集成模块.同时矩阵的运算也具有集成的特点,比如矩阵的乘法运算就集成了数的乘法和加法,其实例见教材第 10 章矩阵乘法的应用.

此外,应用非常广泛的线性方程组、向量组及二次型等,也都可以借助于矩阵乘法表达得十分简单.它们的求解或化简,则需要更深入的讨论,这些讨论仍然离不开矩阵,并借助于矩阵的理论来解决.除在线性代数外,矩阵还在很多学科中有着重要的应用.

【问 1-2】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{E}$ 为同阶矩阵,下列命题是否正确?

(1)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2$;

(2)$(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2+2\lambda\boldsymbol{A}+\lambda^2\boldsymbol{E}$($\lambda$ 为实数);

(3)$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

答 (1)不正确.因为$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^2$.而矩阵乘法不满足交换律,即一般地,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$,所以该等式不成立.

(2)正确. 因为数量矩阵 λE 与 A 可交换.

(3)不正确. $AB=BA$ 是$(AB)^2=A^2B^2$ 成立的充分条件,而非必要条件. 这是因为 $AB=BA$,故有$(AB)^2=(AB)(AB)=A(BA)B=A(AB)B=A^2B^2$. 即 $AB=BA$ 是$(AB)^2=A^2B^2$ 成立的充分条件.

反之,可举一个简单例子. 取 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$,有 $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$,$A^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=O$,$BA=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq O$,即$(AB)^2=A^2B^2=O$,但 $AB\neq BA$,即$(AB)^2=A^2B^2\not\Rightarrow AB=BA$.

注 这 3 个命题主要考察矩阵乘法的运算. 矩阵乘法不满足交换律,即一般地,$AB\neq BA$. 原因有 3 个:①AB 可乘时,BA 不一定可乘;②AB 和 BA 都可乘时,其结果的类型不一定相同;③即使 AB 和 BA 的类型相同,其中的元素还不一定相同. 因此进行乘法运算时,不要任意调换矩阵的位置.

【问 1-3】 设 A 是 n 阶方阵,试分析下列命题是否成立?

(1)若 $A^2=O$,则 $A=O$;

(2)若 $A^2=A$,则 $A=O$ 或 $A=E$;

(3)若 $AX=AY$,且 $A\neq O$,则 $X=Y$.

答 这三个命题主要考察对矩阵乘法的理解.

(1)该命题不成立. 取 $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$,有 $A^2=O$,但 $A\neq O$.

注 当矩阵 A 是 n 阶实对称矩阵时,该命题成立.

(2)该命题不成立. 取 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$,有 $A^2=A$,但 $A\neq O$ 且 $A\neq E$.

注 当矩阵 A 是 n 阶可逆阵时,若 $A^2=A$,有 $A=E$(关于可逆阵,见第 3 章).

(3)该命题不成立. 取 $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$,$X=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$,$Y=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$,有

$$AX=AY=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

且 $A\neq O$,但 $X\neq Y$.

注 当矩阵 A 是 n 阶可逆阵时,若 $AX=AY$,则 $X=Y$(关于可逆阵,见第 3 章).

【问 1-4】 对任意的 n 元列向量 $\boldsymbol{u}$，等式 $(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})$ 是否成立？

答 等式成立.不妨取

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},$$

有 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.则

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2.$$

而

$$(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}),$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})&=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{u}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\\&=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})\end{aligned}$$

因此，等式 $(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})$ 成立.

注 在讨论等式右端取值时，利用了结合律，即 $(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$.这里 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$ 是 n 元行向量，$\boldsymbol{u}$ 是 n 元列向量，二者的乘积是 1×1 矩阵，即可看做一个数，因而可以提到矩阵外面.关于矩阵的结合律，经常用于下面的计算中：设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 n 元列向量，则可利用结合律计算 $(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^n$，有

$$(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^n=\boldsymbol{\alpha}\underbrace{(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})}_{(n-1)\text{个}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\cdot\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\text{（这里 }\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\text{ 是一个数）}.$$

【问 1-5】 请用矩阵形式表示(1)线性方程 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b_1$；(2)二次曲线 $ax^2+by^2+2cxy=1$.

答 (1)该线性方程可表示为

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(b_1).$$

(2)该二次曲线可表示为

$$(x,y)\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(1).$$

【问 1-6】 若 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ 为列分块阵，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ 是否正确？

答 不正确. 分块阵转置时除了行要变成列以外，每个子块也要转置，故

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

【问 1-7】 行变换 r_j+kr_i 和 kr_i+r_j 有什么区别？

答 行变换 r_j+kr_i 表示将矩阵的第 i 行的 k 倍加到第 j 行，该变换也称为倍加行变换；而行变换 kr_i+r_j 表示先用 k 乘以矩阵的第 i 行，再将矩阵的第 j 行加到第 i 行.

【问 1-8】 已知 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}^2,\boldsymbol{B}^3,\cdots,\boldsymbol{B}^n$.

答
$$\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^3=\boldsymbol{B}^2\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

当 $n>3$ 时，$\boldsymbol{B}^n=\boldsymbol{O}$.

注 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，其中 k 为某一个正整数，则称 $\boldsymbol{A}$ 为幂零阵，使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$ 的最小的正整数 k 称为 $\boldsymbol{A}$ 的幂零指数. 本题中 $\boldsymbol{B}$ 是一个幂零阵，其幂零指数为 3.

【问 1-9】 下列命题是否成立？

(1)若 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵，则 $\boldsymbol{A}^k$ 也为对称阵(k 为正整数)；

(2)若 $\boldsymbol{A}$ 为反对称阵，则 $\boldsymbol{A}^k$ 也为反对称阵(k 为正整数).

答 (1)该命题成立. 若 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵，则有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$. 于是

$$(A^k)^{\mathrm{T}}=(\underbrace{AA\cdots A}_{k\text{个}})^{\mathrm{T}}=\underbrace{A^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\cdots A^{\mathrm{T}}}_{k\text{个}}=(A^{\mathrm{T}})^k=A^k,$$

故 A^k 也为对称阵.

(2)该命题不成立.若 A 为反对称阵,则有 $A^{\mathrm{T}}=-A$.于是由(1)有

$$(A^k)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^k=(-A)^k=(-1)^kA^k=\begin{cases}A^k & k\text{ 为偶数}\\ -A^k & k\text{ 为奇数}\end{cases},$$

因此,当 k 为奇数时,A^k 仍为反对称矩阵;当 k 为偶数时,A^k 为对称矩阵.

【问 1-10】 初等变换在线性代数中的应用表现在哪些方面?

答 初等变换在线性代数中的应用十分广泛,概括起来包括以下几个方面:

(1)计算行列式;

(2)求逆矩阵;

(3)解矩阵方程;

(4)解线性方程组;

(5)求矩阵和向量组的秩;

(6)求向量组的极大无关组;

(7)求由向量组生成的向量空间的基和维数;

(8)求二次型和实对称矩阵的合同标准形.

以上应用将在后续章节中陆续学习,在本章中应深刻理解初等变换和初等阵的概念,为后续课程的学习打下扎实的基础.

【问 1-11】 为什么要研究矩阵的转置?

答 (1)矩阵的转置是研究对称矩阵和反对称矩阵的重要工具,即 A 为对称阵 $\Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}=A$,$A$ 为反对称阵 $\Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}=-A$.

(2)后继课将研究一个重要问题,即 n 元实二次型:

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&(a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n)\\&+(a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n)\\&+\cdots+(a_{n-1,n-1}x_{n-1}^2+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n)\\&+a_{nn}x_n^2.\end{aligned}$$

这个实二次型对应于一个实对称阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,利用转置和矩阵的乘法,该实二次型可表示为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$,其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$.

(3)后继课还将证明:对于任何实对称阵 A,都存在可逆(或满秩)矩阵 C,使得 $C^{\mathrm{T}}AC=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

利用坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$),则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2,$$

即把一般的二次齐次多项式化成了纯平方项之和. 这对研究一般的三元二次方程所表示的二次曲面的图形及求 n 元函数极值点的充分条件有重要的作用.

(4)转置有很多用处. 如:① $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$,只要研究列的情况;②说明了 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A})$ 后,利用 $r(\boldsymbol{AB})=r((\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$;③利用转置可使很多问题的研究变得容易,给很多问题的表达带来方便.

【问 1-12】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ la & lb & lc \\ ma & mb & mc \end{pmatrix}$,可否将该矩阵表示成两个矩阵的乘积? 并按此方法求出 $\boldsymbol{A}^n$.

答 可以. 事实上,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}(a,b,c)=\boldsymbol{BC}$,其中

$$\boldsymbol{B}=(k,l,m)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{C}=(a,b,c).$$

$$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{BC})^n=\underbrace{\boldsymbol{BC}\cdot\boldsymbol{BC}\cdot\boldsymbol{BC}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{BC}}_{n\text{个}\boldsymbol{BC}}=\boldsymbol{B}(\underbrace{\boldsymbol{CB}\cdot\boldsymbol{CB}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{CB}}_{(n-1)\text{个}\boldsymbol{CB}})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{CB})^{n-1}\boldsymbol{C},$$

而

$$\boldsymbol{CB}=(a,b,c)\begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}=ka+lb+mc,$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=\boldsymbol{B}(ka+lb+mc)^{n-1}\boldsymbol{C}=(ka+lb+mc)^{n-1}\boldsymbol{BC}=(ka+lb+mc)^{n-1}\boldsymbol{A}\\&=(ka+lb+mc)^{n-1}\begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ la & lb & lc \\ ma & mb & mc \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

注 该问题的求解中利用了矩阵乘法的结合律及数与矩阵的乘法的运算规律. 关于行向量与列向量乘法的结合律问题,在问 1-4 中有详细说明,请同学们在今后类似问题的计算中加以体会.

例题解析

【例 1-1】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_3=(0,0,$