




全国高等农林院校“十一五”规划教材

高等数学

学习指导

李任波 伍勇 主编

 中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

高等数学学习指导

李任波 伍勇 主编

中国农业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学学习指导 / 李任波, 伍勇主编. —北京: 中国农业出版社, 2008. 7

全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-109-12712-8

I. 高… II. ①李…②伍… III. 高等数学-高等学校-教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 082507 号

中国农业出版社出版

(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)

(邮政编码 100125)

责任编辑 朱 雷 刘新团

北京通州皇家印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

2008 年 7 月第 1 版 2008 年 7 月北京第 1 次印刷

开本: 720mm×960mm 1/16 印张: 13.25

字数: 235 千字

定价: 19.80 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本教材是“全国高等农林院校‘十一五’规划教材”《高等数学》的配套学习辅导书，根据高等农林院校有关《考试大纲》的内容和要求，为高等农、林、经管及医学类院校相关专业本（专）科学生学习高等数学课程的需要而编写的。主要内容分为四个部分。第一部分是《高等数学》各章的基本要求、知识点及知识结构图；第二部分是各章典型例题及解题方法介绍；第三部分是各章所有习题的详细解答；第四部分是根据《考试大纲》编写的五套模拟测试题及参考答案。本教材可供有关院校教学辅导或学生自学时使用。

编者名单

主 编 李任波 伍 勇

副主编 黄 斌 刘 雯

参 编 (按姓氏拼音排序)

丁 琨 和亚珺 林 敏 罗锡春

任丽洁 杨建红 张 健

前 言

本教材是与“全国高等农林院校‘十一五’规划教材”《高等数学》相配套的学习辅导书。本书按教材的章次对应编写，根据有关教学大纲和考试大纲的要求，在各章的知识要点、知识结构图和典型例题分析上既注意到科学性和系统性，又有一定的广度与深度，较好地贯彻了“基础理论教育以应用为目的，以必要、够用为度。基础课程内容应当体现宽口径、具有通用性和稳定性”的精神。适合高等农、林、经管及医学类相关院校的专业作为学习高等数学的学习辅导书。

本教材既是教学同步的学习辅导书，又是阶段复习及模拟测试的指导书。它有助于使学生对高等数学这门课程的基本概念、基本理论、基本方法有较全面、深刻的理解和掌握，有利于培养学生分析问题、解决问题的能力。

参加本教材编写工作的有：西南林学院李任波（第一、二、三、九章），黄斌（第六、八、九章），罗锡春（第四、七章），和亚珺（第四、六章），丁琨（第四、五章），林敏（第二、七章），张健（第一、三、七章），任丽洁（第二、三、九章）；云南农业大学伍勇（第一、二、四、九章），刘雯（第六、八、九章），杨建红（第六、七、九章）。

本教材在编写过程中，得到西南林学院、云南农业大学教务处和相关学院、系、部以及中国农业出版社的大力支持，在此一并表示感谢。

前言

由于编者水平有限，书中若有不当之处，恳请读者批评指正。

编者

2008年5月

郑 重 声 明

中国农业出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 65005894, 64194974, 64194971

传 真：(010) 65005926

E - mail: wlxyaya@sohu.com

通信地址：北京市朝阳区农展馆北路2号中国农业出版社教材出版中心

邮 编：100125

购书请拨打电话：(010) 64194972, 64195117, 64195127

数码防伪说明：

本图书采用出版物数码防伪系统，用户购书后刮开封底防伪密码涂层，将16位防伪密码发送短信至106695881280，免费查询所购图书真伪，同时您将有参加鼓励使用正版图书的抽奖活动，赢取各类奖项，详情请查询中国扫黄打非网 (<http://www.shdf.gov.cn>)。

短信反盗版举报：编辑短信“JB, 图书名称, 出版社, 购买地点”发送至10669588128

短信防伪客服电话：(010) 58582300/58582301

目 录

前言	1
第一章 函数与极限	1
1.1 基本要求	1
1.2 知识点及知识结构图	1
1.3 典型例题与解题方法	3
习题一解答	11
第二章 导数与微分	17
2.1 基本要求	17
2.2 知识点及知识结构图	17
2.3 典型例题与解题方法	18
习题二解答	25
第三章 微分中值定理及导数的应用	34
3.1 基本要求	34
3.2 知识点及知识结构图	34
3.3 典型例题与解题方法	36
习题三解答	44
第四章 不定积分	58
4.1 基本要求	58
4.2 知识点及知识结构图	58
4.3 典型例题与解题方法	59
习题四解答	74
第五章 定积分	84
5.1 基本要求	84

5.2 知识点及知识结构图	84
5.3 典型例题与解题方法	85
习题五解答	97
第六章 多元函数微积分	107
6.1 基本要求	107
6.2 知识点及知识结构图	107
6.3 典型例题与解题方法	108
习题六解答	123
第七章 无穷级数	136
7.1 基本要求	136
7.2 知识点及知识结构图	136
7.3 典型例题与解题方法	139
习题七解答	144
第八章 微分方程	154
8.1 基本要求	154
8.2 知识点及知识结构图	154
8.3 典型例题与解题方法	155
习题八解答	163
第九章 模拟测试题	176
模拟测试题 (一)	176
模拟测试题 (二)	181
模拟测试题 (三)	186
模拟测试题 (四)	192
模拟测试题 (五)	197
参考文献	202

第一章 函数与极限

1.1 基本要求

- 一、理解函数的概念，会求函数的定义域。
- 二、了解函数的表示和函数的简单性态——有界性、单调性、奇偶性和周期性。
- 三、掌握基本初等函数的性质和图形。
- 四、理解数列极限的概念（对“ $\epsilon-N$ ”形式的定义不作过高要求）。
- 五、理解函数极限的定义，会描述各种极限状态。
- 六、熟练掌握极限的四则运算法则。
- 七、会用各种基本方法以及两个重要极限求数列和函数的极限。
- 八、理解无穷大量、无穷小量的概念及其运算性质，掌握无穷小量的比较。
- 九、理解函数的连续性的概念，掌握函数的间断点的分类。
- 十、理解连续函数的和、差、积、商及复合函数的连续性。
- 十一、了解初等函数的连续性，掌握闭区间上连续函数的性质。

1.2 知识点及知识结构图

一、知识点

1. 函数

- (1) 函数的概念（定义域、对应规则、值域）；
- (2) 分段函数（自变量在不同范围变化时，因变量依照不同的对应法则与之对应）；
- (3) 函数的四种特性（奇偶性、单调性、周期性、有界性）；
- (4) 复合函数（函数复合的条件、中间变量）；
- (5) 反函数（ $y=f^{-1}(x)$ ）；
- (6) 初等函数；

五类基本初等函数（定义域、值域、图形、性质）；

初等函数概念：由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算而得到的、能用一个式子表示的函数。

2. 函数极限

(1) 数列极限的概念与 $\epsilon-N$ 定义；

(2) 函数极限的概念与定义；

(3) 无穷大与无穷小。

3. 计算函数的极限

(1) 函数极限的运算法则（和、差、积、商、复合）；

(2) 两个重要极限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (\text{或} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e);$$

(3) 无穷小的比较（高阶、低阶、同阶、等价）；

(4) 无穷小量的性质（等价无穷小替换、无穷小量与有界函数之积仍为无穷小量等）。

4. 函数的连续性

(1) 函数在点 x_0 连续的概念与定义

定义一： $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$ ；

定义二： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ；

左连续的定义：

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0);$$

右连续的定义：

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0);$$

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是： $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续。

(2) 函数的间断点及其分类

第一类间断点：左右极限都存在的间断点，包含可去、跳跃两种类型；

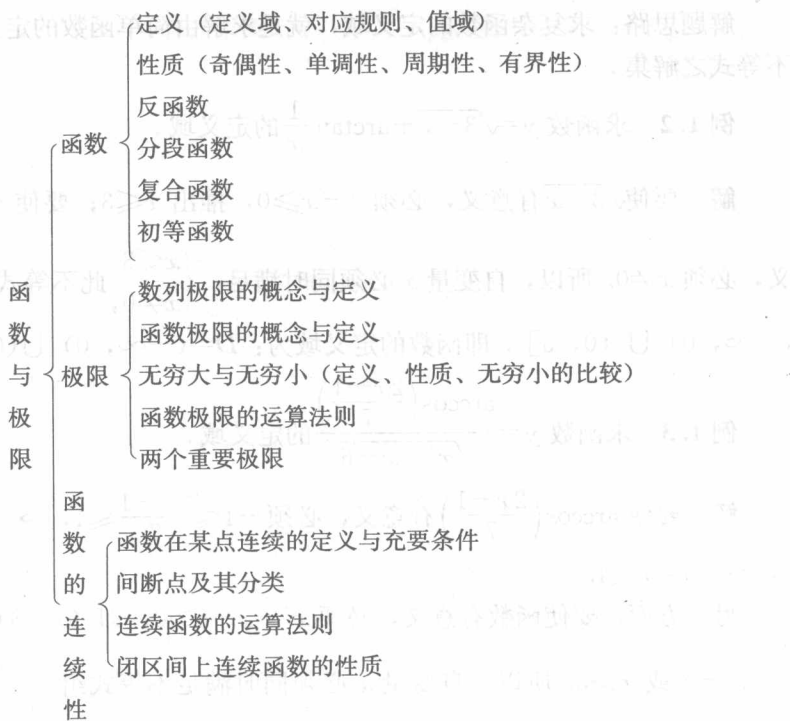
第二类间断点：左右极限至少有一个不存在的间断点，包含无穷间断点等。

(3) 连续函数的运算（和、差、积、商、复合）

(4) 闭区间上连续函数的性质

最大值最小值定理、有界性定理、零点定理、介值定理。

二、知识结构图



1.3 典型例题与解题方法

一、判断函数是否相等

解题思路: 当且仅当给定的函数, 其定义域和对应关系完全相同时, 才表示同一函数, 否则表示不同的函数.

例 1.1 判别下列各组函数是否相等.

(1) 函数 $f(x) = \frac{x}{x}$ 与 $g(x) = 1$;

(2) 函数 $f(x) = \sqrt{x^2}$ 、 $g(x) = |x|$ 与函数 $h(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

解 (1) 由于 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而函数 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 二者定义域不同, 故 $f(x) \neq g(x)$.

(2) 由于 f 、 g 、 h 的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$, 且对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 均有 $f(x) = g(x) = h(x) = |x|$, 故 $f = g = h$.

二、求函数的定义域

解题思路：求复杂函数的定义域，就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式之解集。

例 1.2 求函数 $y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x}$ 的定义域。

解 要使 $\sqrt{3-x}$ 有意义，必须 $3-x \geq 0$ ，推出 $x \leq 3$ ；要使 $\arctan \frac{1}{x}$ 有意义，必须 $x \neq 0$ 。所以，自变量 x 必须同时满足： $\begin{cases} x \leq 3 \\ x \neq 0 \end{cases}$ 此不等式组的解集为： $(-\infty, 0) \cup (0, 3]$ 。即函数的定义域为： $D = (-\infty, 0) \cup (0, 3]$ 。

例 1.3 求函数 $y = \frac{\arccos\left(\frac{2x-1}{7}\right)}{\sqrt{x^2-x-6}}$ 的定义域。

解 要使 $\arccos\left(\frac{2x-1}{7}\right)$ 有意义，必须 $-1 \leq \frac{2x-1}{7} \leq 1$ ， $\Rightarrow -7 \leq 2x-1 \leq 7$ ， $\Rightarrow -3 \leq x \leq 4$ 。

另一方面，要使函数有意义，必须 $x^2-x-6 > 0$ ，即 $(x-3)(x+2) > 0$ ， $\Rightarrow x < -2$ 或 $x > 3$ 。所以，自变量 x 必须同时满足不等式组 $\begin{cases} -3 \leq x \leq 4 \\ x < -2 \text{ 或 } x > 3 \end{cases}$ ，此不等式组的解集为 $-3 \leq x \leq -2$ 或 $3 < x \leq 4$ ，即函数的定义域为： $D = [-3, -2) \cup (3, 4]$ 。

例 1.4 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$ ，问 (1) $f(x^2)$ ；(2) $f(\sin x)$ ；(3) $f(x+a)$ ($a > 0$)；(4) $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$) 的定义域各是什么？

解 由 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$ ，有

(1) $0 \leq x^2 \leq 1$ ，即 $-1 \leq x \leq 1$ ，故 $f(x^2)$ 的定义域为 $D = [-1, 1]$ ；

(2) $0 \leq \sin x \leq 1$ ，所以 $f(\sin x)$ 的定义域为 $D = [2k\pi, 2k\pi + \pi]$ ， $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ；

(3) $0 \leq x+a \leq 1$ ，所以 $f(x+a)$ 的定义域为 $D = [-a, -a+1]$ ；

(4) 有 $\begin{cases} 0 \leq x+a \leq 1 \\ 0 \leq x-a \leq 1 \end{cases}$ ，可解得 $\begin{cases} -a \leq x \leq 1-a \\ a \leq x \leq 1+a \end{cases}$ ，因 $a > 0$ ，故当 $1-a < a$

时，即 $a > \frac{1}{2}$ 时，此不等式组无解，函数的定义域为空集；而当 $1-a \geq a$ ，即

$a \leq \frac{1}{2}$ 时，不等式的解为 $a \leq x \leq 1-a$ ，从而函数的定义域为： $[a, 1-a]$ 。

三、求函数表达式

例 1.5 已知 $f[\varphi(x)] = 1 + \cos x$, $\varphi(x) = \sin \frac{x}{2}$, 求 $f(x)$.

解 因为 $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, 故

$$\begin{aligned} f[\varphi(x)] &= 1 + \cos x = 1 + \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right) = 2 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \\ &= 2 \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right) = 2[1 - \varphi^2(x)], \end{aligned}$$

故

$$f(x) = 2(1 - x^2).$$

例 1.6 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f(\varphi(x)) = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解 因为 $f(\varphi(x)) = e^{\varphi^2(x)} = 1 - x$, 故 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$. 再由 $\ln(1-x) \geq 0$, 得 $1-x \geq 1$, 即 $x \leq 0$, 故 $\varphi(x)$ 的定义域为 $D = (-\infty, 0]$.

例 1.7 设 $y = f(u) = \arctan u$, $u = \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $t = \psi(x) = x^2 - 1$, 求 $f\{\varphi[\psi(x)]\}$.

$$\text{解 } f\{\varphi[\psi(x)]\} = \arctan \varphi[\psi(x)] = \arctan \frac{1}{\sqrt{\psi(x)}} = \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

四、判断函数的有界性

例 1.8 判断函数 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否有界.

解 对任给的一个正数 M , 取 $x = (2[M] + 1)\pi$, 则 $\cos x = -1$.

此时, $|f(x)| = |(2[M] + 1)\pi \cos(2[M] + 1)\pi| = (2[M] + 1)\pi > M$,

因此, 函数 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

五、求反函数

解题思路: 求函数 $y = f(x)$ 的反函数可以分为两个步骤: (1) 从 $y = f(x)$ 中求解出 $x = f^{-1}(y)$; (2) 将 x 与 y 互换, 即得 $y = f(x)$ 的反函数为: $y = f^{-1}(x)$.

例 1.9 求函数 $y = 10^{x-1} - 2$ 的反函数.

解 $y = 10^{x-1} - 2 \Rightarrow 10^{x-1} = y + 2 \Rightarrow x - 1 = \lg(y + 2) \Rightarrow x = \lg(y + 2) + 1$,

将 x 与 y 互换, 即得 $y = 10^{x-1} - 2$ 的反函数为: $y = \lg(x + 2) + 1$.

六、求数列或函数的极限

极限概念与求极限的运算可以说贯穿了高等数学的始终,因此,掌握好求极限的基本方法和技巧是学好高等数学的基本要求.

求极限的基本方法包括分子、分母有理化,多项式因式分解,同除以分子、分母的最高次项,利用重要极限,利用等价无穷小替换等.但在做题时,必须灵活应用,并且这些方法不是孤立的,常常在一个问题中用到几种方法.

例 1.10 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2n} - \sqrt{2n-1})$.

提示:分子有理化.

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2n} - \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n} + \sqrt{2n-1})}{(\sqrt{2n} + \sqrt{2n-1})} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n - (2n-1)}{(\sqrt{2n} + \sqrt{2n-1})} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{2n} + \sqrt{2n-1})} = 0. \end{aligned}$$

例 1.11 计算 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{(\sqrt{x}-2)}$.

提示:分子、分母同时有理化.

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{1+2x}+3)} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

例 1.12 求极限 $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 13x - 7}{x^2 - 49}$.

提示:对于 $\frac{0}{0}$ 型的分子、分母都是多项式的函数,可以考虑分解因式,然后约去公因子的方法求极限.

$$\text{解 原式} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(2x+1)(x-7)}{(x+7)(x-7)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x+1}{x+7} = \frac{15}{14}.$$

例 1.13 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x^3-1} - \frac{1}{x-1} \right)$.

提示：先通分，然后约去公因子，再求极限。

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - (x^2 + x + 1)}{(x^3 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)(x-1)}{(x^3 - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{x^2 + x + 1} = -1.\end{aligned}$$

例 1.14 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

提示：分子、分母同除以 x^{50} 。

$$\text{解 原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{x}\right)^{20} \left(3 + \frac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2 + \frac{1}{x}\right)^{50}} = \frac{2^{20} \cdot 3^{30}}{2^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$$

例 1.15 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 6x + 5}}{3x - 2}$.

解 分子、分母同除以 x ，得

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}}{3 - \frac{2}{x}} = \frac{2}{3}.$$

例 1.16 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha+x) - \sin \alpha}{x}$.

提示：先对分子使用和差化积公式化为两个三角函数的乘积，然后利用重要极限 1: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 。

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{\alpha+x+\alpha}{2} \sin \frac{\alpha+x-\alpha}{2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{2\alpha+x}{2} \sin \frac{x}{2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{2\alpha+x}{2} \sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \cos \alpha.\end{aligned}$$

注 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$.

例 1.17 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$.