全国高等农林院校“十一五”规划教材

高等数学

学习指导

李任波　伍　勇　主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

高等数学学习指导

李任波　伍　勇　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导／李任波，伍勇主编．—北京：中国农业出版社，2008.7
全国高等农林院校“十一五”规划教材
ISBN 978-7-109-12712-8

Ⅰ．高…　Ⅱ．①李…②伍…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 082507 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100125）
责任编辑　朱　雷　刘新团

北京通州皇家印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行
2008 年 7 月第 1 版　　2008 年 7 月北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　　印张：13.25
字数：235 千字
定价：19.80 元

内 容 简 介

本教材是“全国高等农林院校‘十一五’规划教材”《高等数学》的配套学习辅导书，根据高等农林院校有关《考试大纲》的内容和要求，为高等农、林、经管及医学类院校相关专业本（专）科学生学习高等数学课程的需要而编写的。主要内容分为四个部分。第一部分是《高等数学》各章的基本要求、知识点及知识结构图；第二部分是各章典型例题及解题方法介绍；第三部分是各章所有习题的详细解答；第四部分是根据《考试大纲》编写的五套模拟测试题及参考答案。本教材可供有关院校教学辅导或学生自学时使用。

编 者 名 单

主　编 李任波　伍　勇

副主编 黄　斌　刘　雯

参　编（按姓氏拼音排序）

丁　琨　和亚珺　林　敏　罗锡春

任丽洁　杨建红　张　健

前　言

本教材是与“全国高等农林院校‘十一五’规划教材”《高等数学》相配套的学习辅导书。本书按教材的章次对应编写，根据有关教学大纲和考试大纲的要求，在各章的知识要点、知识结构图和典型例题分析上既注意到科学性和系统性，又有一定的广度与深度，较好地贯彻了“基础理论教育以应用为目的，以必要、够用为度。基础课程内容应当体现宽口径、具有通用性和稳定性”的精神。适合高等农、林、经管及医学类相关院校的专业作为学习高等数学的学习辅导书。

本教材既是教学同步的学习辅导书，又是阶段复习及模拟测试的指导书。它有助于使学生对高等数学这门课程的基本概念、基本理论、基本方法有较全面、深刻的理解和掌握，有利于培养学生分析问题、解决问题的能力。

参加本教材编写工作的有：西南林学院李任波（第一、二、三、九章），黄斌（第六、八、九章），罗锡春（第四、七章），和亚珺（第四、六章），丁琨（第四、五章），林敏（第二、七章），张健（第一、三、七章），任丽洁（第二、三、九章）；云南农业大学伍勇（第一、二、四、九章），刘雯（第六、八、九章），杨建红（第六、七、九章）。

本教材在编写过程中，得到西南林学院、云南农业大学教务处和相关学院、系、部以及中国农业出版社的大力支持，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中若有不当之处，恳请读者批评指正。

编　者

2008年5月

郑 重 声 明

目　录

第一章　函数与极限

1.1　基本要求

一、理解函数的概念，会求函数的定义域．

二、了解函数的表示和函数的简单性态——有界性、单调性、奇偶性和周期性．

三、掌握基本初等函数的性质和图形．

四、理解数列极限的概念（对“$\varepsilon-N$”形式的定义不作过高要求）．

五、理解函数极限的定义，会描述各种极限状态．

六、熟练掌握极限的四则运算法则．

七、会用各种基本方法以及两个重要极限求数列和函数的极限．

八、理解无穷大量、无穷小量的概念及其运算性质，掌握无穷小量的比较．

九、理解函数的连续性的概念，掌握函数的间断点的分类．

十、理解连续函数的和、差、积、商及复合函数的连续性．

十一、了解初等函数的连续性，掌握闭区间上连续函数的性质．

1.2　知识点及知识结构图

一、知识点

1. 函数

（1）函数的概念（定义域、对应规则、值域）；

（2）分段函数（自变量在不同范围变化时，因变量依照不同的对应法则与之对应）；

（3）函数的四种特性（奇偶性、单调性、周期性、有界性）；

（4）复合函数（函数复合的条件、中间变量）；

（5）反函数（$y=f^{-1}(x)$）；

（6）初等函数；

五类基本初等函数（定义域、值域、图形、性质）；

初等函数概念：由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算而得到的、能用一个式子表示的函数．

2. 函数极限

（1）数列极限的概念与 $\varepsilon - N$ 定义；

（2）函数极限的概念与定义；

（3）无穷大与无穷小．

3. 计算函数的极限

（1）函数极限的运算法则（和、差、积、商、复合）；

（2）两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}\quad (\text{或}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e})；$$

（3）无穷小的比较（高阶、低阶、同阶、等价）；

（4）无穷小量的性质（等价无穷小替换、无穷小量与有界函数之积仍为无穷小量等）．

4. 函数的连续性

（1）函数在点 x_0 连续的概念与定义

定义一：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$；

定义二：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$；

左连续的定义：

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)=f(x_0)；$$

右连续的定义：

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)=f(x_0)；$$

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是：$f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续．

（2）函数的间断点及其分类

第一类间断点：左右极限都存在的间断点，包含可去、跳跃两种类型；

第二类间断点：左右极限至少有一个不存在的间断点，包含无穷间断点等.

（3）连续函数的运算（和、差、积、商、复合）

（4）闭区间上连续函数的性质

最大值最小值定理、有界性定理、零点定理、介值定理．

二、知识结构图

- 函数与极限
  - 函数
    - 定义（定义域、对应规则、值域）
    - 性质（奇偶性、单调性、周期性、有界性）
    - 反函数
    - 分段函数
    - 复合函数
    - 初等函数
  - 极限
    - 数列极限的概念与定义
    - 函数极限的概念与定义
    - 无穷大与无穷小（定义、性质、无穷小的比较）
    - 函数极限的运算法则
    - 两个重要极限
  - 函数的连续性
    - 函数在某点连续的定义与充要条件
    - 间断点及其分类
    - 连续函数的运算法则
    - 闭区间上连续函数的性质

1.3 典型例题与解题方法

一、判断函数是否相等

解题思路：当且仅当给定的函数，其定义域和对应关系完全相同时，才表示同一函数，否则表示不同的函数．

例 1.1 判别下列各组函数是否相等．

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$；

(2) 函数 $f(x)=\sqrt{x^2}$、$g(x)=|x|$ 与函数 $h(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$.

解 (1) 由于 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，而函数 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，二者定义域不同，故 $f(x)\neq g(x)$．

(2) 由于 f、g、h 的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$，且对任意 $x\in(-\infty, +\infty)$，均有 $f(x)=g(x)=h(x)=|x|$，故 $f=g=h$.

二、求函数的定义域

解题思路：求复杂函数的定义域，就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式之解集．

例 1.2 求函数 $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$ 的定义域．

解 要使 $\sqrt{3-x}$ 有意义，必须 $3-x\geqslant 0$，推出 $x\leqslant 3$；要使 $\arctan\dfrac{1}{x}$ 有意义，必须 $x\neq 0$. 所以，自变量 x 必须同时满足：$\begin{cases}x\leqslant 3\\x\neq 0,\end{cases}$ 此不等式组的解集为：$(-\infty,0)\cup(0,3]$．即函数的定义域为：$D=(-\infty,0)\cup(0,3]$．

例 1.3 求函数 $y=\dfrac{\arccos\left(\dfrac{2x-1}{7}\right)}{\sqrt{x^2-x-6}}$ 的定义域．

解 要使 $\arccos\left(\dfrac{2x-1}{7}\right)$ 有意义，必须 $-1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1$，$\Rightarrow -7\leqslant 2x-1\leqslant 7$，$\Rightarrow -3\leqslant x\leqslant 4$.

另一方面，要使函数有意义，必须 $x^2-x-6>0$，即 $(x-3)(x+2)>0$，$\Rightarrow x<-2$ 或 $x>3$. 所以，自变量 x 必须同时满足不等式组 $\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4\\x<-2 \text{ 或 } x>3\end{cases}$，此不等式组的解集为 $-3\leqslant x\leqslant -2$ 或 $3<x\leqslant 4$，即函数的定义域为：$D=[-3,-2)\cup(3,4]$．

例 1.4 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，问 (1) $f(x^2)$； (2) $f(\sin x)$；(3) $f(x+a)(a>0)$；(4) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 的定义域各是什么？

解 由 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，有

(1) $0\leqslant x^2\leqslant 1$，即 $-1\leqslant x\leqslant 1$，故 $f(x^2)$ 的定义域为 $D=[-1,1]$；

(2) $0\leqslant \sin x\leqslant 1$，所以 $f(\sin x)$ 的定义域为 $D=[2k\pi,2k\pi+\pi]$，$k=0$，±1，±2，…；

(3) $0\leqslant x+a\leqslant 1$，所以 $f(x+a)$ 的定义域为 $D=[-a,-a+1]$；

(4) 有 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$，可解得 $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$，因 $a>0$，故当 $1-a<a$ 时，即 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，此不等式组无解，函数的定义域为空集；而当 $1-a\geqslant a$，即 $a<\dfrac{1}{2}$ 时，不等式的解为 $a\leqslant x\leqslant 1-a$，从而函数的定义域为：$[a,1-a]$．

三、求函数表达式

例 1.5 已知 $f[\varphi(x)]=1+\cos x$，$\varphi(x)=\sin\dfrac{x}{2}$，求 $f(x)$．

解 因为 $\cos x=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$，故

$$f[\varphi(x)]=1+\cos x=1+\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)=2-2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$=2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)=2[1-\varphi^2(x)],$$

故

$$f(x)=2(1-x^2).$$

例 1.6 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$并写出它的定义域．

解 因为 $f(\varphi(x))=e^{\varphi^2(x)}=1-x$，故 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$．再由 $\ln(1-x)\geqslant 0$，得 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$，故 $\varphi(x)$的定义域为 $D=(-\infty, 0]$．

例 1.7 设 $y=f(u)=\arctan u$，$u=\varphi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$，$t=\psi(x)=x^2-1$，求 $f\{\varphi[\psi(x)]\}$．

解 $f\{\varphi[\psi(x)]\}=\arctan\varphi[\psi(x)]=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{\psi(x)}}=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

四、判断函数的有界性

例 1.8 判断函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否有界．

解 对任给的一个正数 M，取 $x=(2[M]+1)\pi$，则 $\cos x=-1$.

此时，$|f(x)|=|(2[M]+1)\pi\cos(2[M]+1)\pi|=(2[M]+1)\pi>M$，

因此，函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界．

五、求反函数

解题思路：求函数 $y=f(x)$的反函数可以分为两个步骤：(1) 从 $y=f(x)$中求解出 $x=f^{-1}(y)$；(2) 将 x 与 y 互换，即得 $y=f(x)$ 的反函数为：$y=f^{-1}(x)$．

例 1.9 求函数 $y=10^{x-1}-2$ 的反函数．

解 $y=10^{x-1}-2\Rightarrow 10^{x-1}=y+2\Rightarrow x-1=\lg(y+2)\Rightarrow x=\lg(y+2)+1$，

将 x 与 y 互换，即得 $y=10^{x-1}-2$ 的反函数为：$y=\lg(x+2)+1$.

六、求数列或函数的极限

极限概念与求极限的运算可以说贯穿了高等数学的始终，因此，掌握好求极限的基本方法和技巧是学好高等数学的基本要求．

求极限的基本方法包括分子、分母有理化，多项式因式分解，同除以分子、分母的最高次项，利用重要极限，利用等价无穷小替换等．但在做题时，必须灵活应用，并且这些方法不是孤立的，常常在一个问题中用到几种方法．

例 1.10 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1})$．

提示：分子有理化．

解 原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1})}{(\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1})}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-(2n-1)}{(\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1})}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1})}=0.$$

例 1.11 计算 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{(\sqrt{x}-2)}$.

提示：分子、分母同时有理化．

解 原式 $=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{1+2x}+3)}=\frac{4}{3}.$$

例 1.12 求极限 $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-49}$.

提示：对于 $\dfrac{0}{0}$ 型的分子、分母都是多项式的函数，可以考虑分解因式，然后约去公因子的方法求极限．

解 原式 $=\lim\limits_{x\to7}\dfrac{(2x+1)(x-7)}{(x+7)(x-7)}=\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2x+1}{x+7}=\dfrac{15}{14}$.

例 1.13 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

提示：先通分，然后约去公因子，再求极限．

解　原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-(x^2+x+1)}{(x^3-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x+2)(x-1)}{(x^3-1)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{x^2+x+1}=-1.$$

例 1.14　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

提示：分子、分母同除以 x^{50}.

解　原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\dfrac{2^{20}\cdot 3^{30}}{2^{50}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{30}$.

例 1.15　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}$.

解　分子、分母同除以 x，得

原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4+\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}{3-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{2}{3}$.

例 1.16　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\alpha+x)-\sin\alpha}{x}$.

提示：先对分子使用和差化积公式化为两个三角函数的乘积，然后利用重要极限 1：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos\dfrac{\alpha+x+\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha+x-\alpha}{2}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos\dfrac{2\alpha+x}{2}\sin\dfrac{x}{2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\dfrac{2\alpha+x}{2}\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}=\cos\alpha.$$

注　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}=1$.

例 1.17　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^x$.