FEM IN SURFACE HYDROLOGY

地表水文有限元模拟

沈 冰 编著

西北工业大学出版社

技术设计：潘玉浩

封面设计：范　桦

ISBN 7-5612-0884-7

9 787561 208847 >

ISBN 7 - 5612 - 0884 - 7/O · 123

定价：　12.00 元

地表水文有限元模拟

沈 冰 编著

西北工业大学出版社
1996年6月 西安

（陕）新登字 009 号

【内容简介】　本书系统地阐述了有限元方法的数学原理和应用步骤。在此基础上，着重分析了这种方法在地表水文模拟领域应用时初始条件、边界条件的特征，求解的技巧和应注意的问题。内容涉及坡地降雨漫流、土壤水分运动、河道流量演算、流域降雨径流和二维洪流模拟等各个方面，可应用于水利工程规划、设计、管理的各个阶段。

本书可供水文水资源、水土保持、地理等专业师生参考，亦便于具有一般微积分知识的科技人员阅读。

地表水文有限元模拟
沈　冰　　编　著
责任编辑　胡梦仙
责任校对　齐随印
*

（710072　西安市友谊西路 127 号　电话 8492314）
全国各地新华书店经销
陕西新世纪印刷印装
ISBN 7-5612-0884-7/O·123
*
开本 787×1092 毫米　1/32　7.4375 印张　插页 2　154　千字
1996 年 6 月第 1 版　　1996 年 6 月第 1 次印刷
印数：1—600 册　　定价：12.00　元

序

有限元法是用来求解工程和数学物理方面具有初、边值的偏微分方程的近似数值方法。近10多年来，这种方法在水资源研究和工程规划设计中的应用发展迅速，不仅为水文、气象、地理等领域中涉及的流体力学计算开辟了新途径，也为洪泛区水流模拟、水环境保护等新学科中许多复杂问题提供了有效的计算手段。这种方法因其便于应用计算机求解，并有通用性好、适应面广、统筹处理复杂问题功能强的特点，已成为公认的一种工程分析计算和科学研究方法。

目前，有限元法应用于地表水文模拟，在我国还处于起步阶段。如何在这一领域中采用，亦未见有专门著作。针对这种情况，本书较全面地阐述了有限元法的基本原理和处理地表水文实际问题的思路与方法，对今后的推广应用和进一步发展具有一定的意义。

本书的基础理论部分注意吸取了国外有关专著和国内相关学科有限元法教材的优点，系统性较强，推导方式适当，所采用的例子紧密结合水文问题并具有一定代表性，因而便于初学者理解和掌握这种方法的本质与应用的途径。书中还阐述了有限元法在地表水文模拟各个环节中应用的成功实例，着重于对实际问题的边界条件处理和求解过程，提纲挈领，略去了某些读者可自行推导的细节，故较为精炼、紧凑。尤为可贵者，书中用一定篇幅阐述了作者本人在坡面流、壤中流

模拟等方面应用有限元法的若干成果和经验，探讨了应用条件以及对资料和计算机的要求等具体问题，对读者今后开展这方面的工作有重要参考价值。

现阶段，在大范围内应用有限元法求解以流体力学为基础的地表水文动力数学模型，还受到各种资料的观测搜集以及计算机容量和速度等的限制。但随着遥感等现代化观测设施以及计算机科学的迅速发展，这些问题必将逐步解决，因而有限元法在这一领域中具有良好的应用前景。在这方面，开展基础研究是很必要的，作者做了大量有益的工作。相信该书的问世，将会受到广大的水文、水资源科技工作者、研究人员和高等院校师生的欢迎与赞许。

沈　晋

1995 年 11 月于西安

前　言

随着经济建设的日益发展和生活水平的提高，人们对水文研究也提出了更高的要求，即在掌握水文现象客观规律的基础上模拟和预测未来水文要素的变化。并且不仅须要模拟某一断面的流量过程，还须要了解某一区域内水流的速度、方向以及水深；不仅须要估计水量，还须要分析预测水质及水温等要素的变化，从而帮助人们更好地利用有限的水资源，减少暴雨洪水灾害所造成的损失。

近年来，具有一定物理意义的动力水文数学模型发展迅速，逐步拓宽了应用面，具有良好前景。而有限元法正是求解这类模型的有力工具。目前，有限元法在我国工程结构计算、坝体应力分析、地下水流模拟等方面已广为应用，但在地表水文模拟领域还处于研究阶段，为此，本书首先结合水文问题介绍有限元法的基本原理和应用途径。在此基础上，分析论述在地表水文各环节的应用原则、条件和处理方法。

本书在介绍有限元法基本理论的基础上，讨论将这种方法用于地表水文模拟的思路和途径，涉及有限元法的数学理论基础则作尽可能简要的说明。本书可分为两大部分：第一部分包括前三章，介绍数值模拟基本概念和有限元的基本方法；第二部分由后五章组成，用来说明如何应用有限元法求解地表水文动态问题，当然也要涉及水文学领域的一些问题。

本书是在西安水资源研究所为研究生开设专题讲座基础

上完成的，补充了部分数学和水文的基础内容，希望它能为具有微积分知识的读者理解，并能对从事实际水利、水文工作的科技人员有所启发和帮助。笔者在研究有限元法应用于地表水文模拟课题及整理书稿过程中得到王文焰、钱善琪教授的指导，并承沈晋教授为本书作序，在此一并表示衷心的感谢。

由于有限元法涉及的数学理论较深，国内的地表水文方面的应用资料极为缺乏，加之笔者的理论水平和实践经验有限，书中难免存在许多缺欠和错误，敬希读者批评指正。

沈　冰

1995年10月于西安理工大学

目　录

第一章 绪 论

第一节 概 述

地表水文数学模型描述的是降雨径流形成和径流沿地表运动的物理过程。

本书讨论动力水文数学模型，即以水动力学为基础的数学模型，内容涉及坡面降雨漫流、坡地非饱和带土壤水分运移、河道洪流演进、流域降雨径流以及二维洪水泛滥等水文过程的模拟。这种模型不仅可以模拟河流某一断面的流量过程，还可以预测模拟区域内不同地点的水流状况，如水深、流向和流速以及水温、水质等。从而为水利工程的兴建，已有水利设施的合理利用以及分洪、蓄洪决策提供科学依据。在我国，随着计算机和数值计算技术的发展，动力水文模型已开始进入实用阶段。然而，由于天然流域地形及河网分布结构复杂，水动力学方法不仅对计算机内存、运算速度有较高的要求，而且对输入数据的数量和质量有较高的要求。在实际应用动力水文模型时，还要依据条件作适当处理。

在动力水文模型中，地表径流形成与运动是由偏微分方程描述的，如描述河流洪水运动的圣维南(Barre de Saint Venant)方程、描述土壤水分运移的理查德(Richards)方程等等。这些偏微分方程在一般条件下没有解析解，要用数值方法

求其近似解，而有限元法则正是求此类具有初、边值的偏微分方程数值解的一种有效途径。近10多年来，应用这种数值方法模拟水文动态，已由探索迅速发展成为研究水资源问题公认的工程计算方法和科学研究方法。

有限元属于一种离散化方法。它将一个连续体剖分为有限个“基本单元”(如三角形、四边形等)的集合，并在单元内选定适当的结点。将描述水流运动的偏微分方程中的变量改写成各变量或其导数的结点值与选定的插值函数构成的适当表达式。借助于变分原理或伽辽金(Галёркин)法，将基本微分方程转换为控制所有孤立单元的“有限元方程”。然后，将所有局部单元上的方程汇集构成总体的微分方程组或代数方程组，再加上应有的边界和初始条件。于是，通过对方程组的求解，可得出各结点的变量值，从而构成对原水文物理过程的数值描述。

对于多变量的非恒定流问题，如河川、流域等一维、二维径流运动问题以及边界条件复杂的水文问题，有限元法均可得到较满意的结果。

60年代后期，有限元法引入了流体力学领域，其应用广度和深度迅速发展。70年代初，有限元法开始在水文水资源研究中应用，并专门创办了《有限元法在水资源中应用》的国际学术刊物。我国水文界首先将这种方法应用于地下水的动态模拟[1,2]，在地表水文模拟中的应用则刚刚开始。

第二节　数学模型的误差与运算的几项原则

一、数学模型的误差

通过观测和科学实验，人们对水文现象的认识逐步深入并积累了大批数据，在这种感性认识的基础上，就可以抓住主要矛盾，建立起描述水文过程中各种量值变化的数学模型。当然，所建立的模型总是近似的，这种近似带来的差异称为模型误差。在水文模型中常有许多参变量，如水的密度和动粘滞系数、地表径流的糙率、土壤水分运移中的导水率和扩散率等。它们通常是由野外观测或实验测定的，因而也含有误差，称为观测误差。实际水文问题的数学模型很复杂，难以得到准确解，一般必须采用一套行之有效的近似方法，即数值方法求解。模型的准确解与数值方法准确解之差称为方法误差或截断误差。计算机的实际运算是以有限位数字进行的，所以数值解的每一步都可能存在误差，即舍入误差。

例 1-1　μ_t 是水在温度 t 时的动粘滞系数，设所建立的数学模型 μ_t 为

$$\mu_t \approx \hat{\mu}_t = a + b\exp\left(-\frac{t^{0.9}}{22}\right)$$

其中参数 a,b 的误差估计如下：

$$a = 0.230\,2 \pm 10^{-4}, \qquad b = 1.588\,3 \pm 10^{-4}$$

$\mu_t - \hat{\mu}_t$ 为模型误差，10^{-4} 为 a,b 的观测误差。当 $t = 10$ ℃ 时，$\hat{\mu}_{10}$ 的误差如何？

因为 $$0.203\,1 \leqslant a \leqslant 0.203\,3$$
$$1.588\,2 \leqslant b \leqslant 1.588\,4$$
所以 $$0.303\,1 + 1.588\,2\exp(-10^{0.9}/22) \leqslant \hat{\mu}_{10} \leqslant 0.203\,3 + 1.588\,4\exp(-10^{0.9}/22)$$
即
$$1.310\,0 \leqslant \hat{\mu}_{10} \leqslant 1.310\,3$$

上述的 $\hat{\mu}_{10}$ 估算式就是数值方法计算结果的误差范围。

例 1-2 某水库泄水洞完工后，其半径的测量值 $r = 2.53$ m，如果其测量误差的 $|\varepsilon| \leqslant 0.01$ m，若 r_0 为其准确值，那么泄水洞过水面积 误差 E 有多大？

由于 $$E = \pi r_0^2 - \pi r^2$$
从而
$$|E| = \pi|r_0 - r||r_0 + r| = \pi|\varepsilon|(r_0 + r) \leqslant 0.01\pi(2r + 0.01) \leqslant 0.16\ \mathrm{m}^2$$

这表明泄水洞半径测量若有小于 0.01 m 的误差时，计算的过水面积则有不超过 0.16 m^2 的误差。

在有限元数值分析中，一般已知函数 $f(x)$ 的某些性质，希望了解更多信息使之对于特定目的更有用。通常，或假定 $f(x)$ 已知，或要求它在指定域内连续。为了获得关于 $f(x)$ 的更多信息，选出一组坐标函数 $\omega_i(x)(i = 0,1,2,\cdots,n)$，共 $n+1$ 个，使我们能利用它们的性质从中提取所希望得到的信息。这些坐标函数线性组合构成了函数集 s_n。若 $f(x)$ 是 s_n 中之一时，所得信息就是对 $f(x)$ 的准确描述。当 s_n 中没有 $f(x)$ 时，就必须以 s_n 中选取一个 $y(x)$ 近似代替 $f(x)$，称为逼近。二者之差 $E(x) = f(x) - y(x)$，为逼近的截断误差或余项。当 $f(x)$ 连续且近似区间有限时，常采用多项式逼近。由 $n+1$ 个

函数 $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 表示的 n 次多项式不仅便于积分及求导，且构成了函数集 s_n，其中至少有一个函数能在允许精度范围内逼近 $f(x)$。因此，在有限元法中几乎无一例外地采用多项式逼近。

用适当函数 $y(x)$ 逼近 $f(x)$ 会引入截断误差，而用 n 位数近似表示 n 位以上数字才能准确表示的结果时，还会有舍入误差。

例 1－3　分析函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$。

在点 a 的邻域内，它可由一个具有无限多项的泰勒级数表达，即

$$f(x)=f(a)+\frac{1}{1}\frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}x}(x-a)+\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2f(a)}{\mathrm{d}x^2}(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^nf(a)}{\mathrm{d}x^n}(x-a)^n+\cdots \tag{1-1}$$

当只采用这一级数的前 n 项时，截断误差为

$$E_r=\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^nf(\zeta)}{\mathrm{d}x^n}(x-a)^n$$

式中 ζ 为 a 与 x 之间的某一数值。

当 $a=0$ 时，应用泰勒级数求 e^{-x} 的四项近似式为

$$\mathrm{e}^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+E_r \tag{1-2}$$

式中 $E_r=\frac{1}{24}\mathrm{e}^{-\zeta x^4}$（$\zeta$ 介于 0 与 x 之间）。

若 x 为正，ζ 也为正，且 $\mathrm{e}^{-\zeta}<1$，因而截断误差必小于 $x^4/24$，特别当 x 取 1/3 时有

$$e^{-1/3} \approx 1 - 1/3 + 1/18 - 1/162$$
$$= 116/162 \approx 0.7160$$

其截断误差为 $0.00036 \leqslant E_r \leqslant 0.00052$，它取决于 ζ 值。将 116/162 舍入取到小数点后 4 位，得到 0.715 9，其舍入误差为 4.9×10^{-5}。因此，$e^{-1/3}$ 近似式的总误差小于 5.7×10^{-4}，它是截断误差 5.2×10^{-4} 与舍入误差 4.9×10^{-5} 之和。在 $x = 0$ 附近取泰勒级数更多项可减小截断误差，在小数点后保留更多位数字可减小舍入误差。

若 u 为某一水文量，u_1 为数学模型准确解，u_2 为在模型中参数有观测误差条件下所得的解，u_3 为对上述参数模型建立的数值方法的准确解，u_4 为计算机运算所得数值方法近似解。则总误差为

$$u - u_4 = (u - u_1) + (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + (u_3 - u_4) \tag{1-3}$$

等式右侧各项依次为模型误差、参数观测误差、截断误差（方法误差）和舍入误差。若通过某种物理或数学手段得知这些误差分别小于 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$，那么 $|u - u_4|$ 的上限估计为这四部分之和，即

$$|u - u_4| \leqslant |u - u_1| + |u_1 - u_2| + |u_2 - u_3| + |u_3 - u_4| \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \tag{1-4}$$

二、绝对误差、相对误差与有效数字

（一）绝对误差与相对误差

若 x 为准确数，$\hat{x}$ 为近似数，则二者的绝对误差为

$$E(x) = x - \hat{x} \tag{1-5}$$

它具有与 x 相同的量纲。例如，圆周率取 $\pi = 3.141$ 时，其