# 工程力学

——中国力学学会中南西南九省（市）工程力学学术会议论文集


广西科学技术出版社

# 中国力学学会

# 中南西南九省（市）工程力学会议论文集编委会名单

# 序

随着我国经济建设和相关的科学技术的发展，工程力学在我国也得到了发展，并为四化建设作出了贡献。

本论文集反映中南、西南九省(市)近年来工程力学发展的一个侧面，内容丰富，包括理论研究和应用研究方面许多成果，对有关的工程力学界极有启发、参考和直接应用的作用和价值。它的出版丰富了我国这方面的学术文献，将促进工程力学的发展及其为四化建设多作贡献。

李国豪

1991年12月于同济大学

# 前　　言

中国力学学会中南、西南九省（市）工程力学会议于1992年5月在桂林召开。1987年以来，中南、西南九省（市）在中国力学学会的领导下，召开了三次力学方面的学术会议，第一次于1987年在郑州召开了计算力学学术会议，第二次于1989年在重庆召开了现代力学及数学方法学术会议，第三次于1991年在桂林召开工程力学学术会议。这次会议的代表除中南、西南九省市外，还有北京、上海、南京、河北、江西的代表参加，老、中、青代表都有。

这次会议收到论文168篇，经过专家评审，本论文集收入了论文125篇。这些论文的内容包括力学中的基本理论及基本方法，弹性力学、塑性力学、结构力学、流体力学、断裂力学及损伤力学，复合材料力学、岩土力学、实验力学、计算力学、生物力学以及它们在工程中的应用，取得了许多新的成果。这些成果，无论是在理论上或应用上都有所发展，对我国社会主义四化建设有重要的意义。我们出版这本论文集，希望它能推动工程力学今后的研究和应用，促进工程力学的发展，为我国社会主义四化建设作出应有的贡献！

在本论文集的编辑过程中，得到国内许多老前辈和同志们的热情关怀和大力支持，学部委员李国豪教授为本论文集写了序，对我们鼓舞很大，现借此机会表示衷心感谢！

由于本论文集编辑时间仓促，错误和缺点在所难免，敬请同志们指正。

中国力学学会中南、西南九省(市)
工程力学会议论文集编委会

1991年12月

# 目　　录

## 一、基本理论及基本方法



## 二、弹性及塑性力学

## 三、结构力学



## 四、计算力学

## 五、断裂力学及损伤力学



## 六、复合材料力学



## 七、流体力学

## 八、岩土力学



## 九、实验力学



## 十、生物力学

# 十一、工程应用

# 一　基本理论及基本方法

## 利用加权残数法建立广义变分原理*

秦　荣　（广西大学）

### 摘　　要

本文利用加权残数法建立梁、板、壳及弹性力学的广义变分原理，提出了两个最普遍的三类变量广义变分原理，它们都是三类变量的无条件变分原理。

**关键词**　加权残数法，板壳分析，广义变分原理。

### 一、前　　言

变分原理是固体力学、结构力学及计算力学的理论基础，在理论上及实用上都有重要的价值。自从本世纪初 Ritz 法产生后，对固体力学变分原理的研究和应用出现了一个高潮。50年代胡海昌（1954）和鹫津久一郎（1955）先后建立了弹性力学的三类变量广义变分原理，这个变分原理在国际上称为胡海昌-鹫津变分原理。之后，国内外对广义变分原理的研究和应用出现了一个高潮。钱伟长1964年提出了利用拉格朗日乘子法建立广义变分原理的新方法，1983年提出了建立广义变分原理的高阶拉格朗日乘子法。我国有许多学者在变分原理及广义变分原理的研究和应用方面做了大量工作，取得了许多成果，对发展变分原理及广义变分原理做出了重要的贡献。本文在上述研究的基础上，利用加权残数法建立梁、板、壳及弹性力学的广义变分原理，提出了两个最普遍的三类变量广义变分原理，它们都是三类变量的无条件变分原理。由此可以导出各种各样的三类变量广义变分原理，其中包括胡海昌—鹫津久一郎变分原理，钱伟长三类广义变分原理及梁国平—傅子智变分原理，它们都是弹性力学的三类变量广义变分原理。

### 二、加权残数法

本节以边值问题为例，它的微分方程及边界条件为

*国家自然科学基金资助项目。

$$\left.\begin{aligned} &L(u)-f=0 && in\Omega \\ &G(u)-g=0 && on\Gamma_1 \\ &H(u)-h=0 && on\Gamma_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中$f$、$g$及$h$为已知的函数，$\Omega$为区域，$\Gamma$为$\Omega$的边界，而且$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$。

如果$u$为正确解，则式(1)恒能满足，如果$u$为近似解$u^*$，则式(1)不会满足，即

$$\left.\begin{aligned} &L(u^*)-f=R && \text{in}\Omega \\ &G(u^*)-g=R_1 && \text{on}\Gamma_1 \\ &H(u^*)-h=R_2 && \text{on}\Gamma_2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中$R$为域内残数，$R_1$及$R_2$分别为边界$\Gamma_1$及边界$\Gamma_2$的残数。

如果近似解$u^*$与正确解$u$一致，则$R=R_1=R_2=0$。为了使近似解$u^*$能尽量趋于正确解，必须残数在整个区域内为最小。为此，想办法选择权残数使残数在某平均意义下等于零，即

$$\int_\Omega WRd\Omega+\int_{\Gamma_1}W_1R_1d\Gamma+\int_{\Gamma_2}W_2R_2d\Gamma=0 \tag{3}$$

式中$W$为内部权函数，$W_1$及$W_2$分别为边界$\Gamma_1$及边界$\Gamma_2$的权函数。

式(3)称为加权残数法的基本方程，简称加权残数方程。利用加权残数方程可以建立变分原理及广义变分原理。这种建立变分原理及广义变分原理的方法称为加权残数法。

## 三、梁的广义变分原理

本节以线弹性梁为例，它的基本方程及边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &M''+q=0 \\ &\chi+w''=0 \\ &M-D\chi=0 \end{aligned}\right\}\quad 0\leqslant x\leqslant b \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\overline{w}-w=0, \qquad \overline{\theta}-w'=0 \\ &\overline{Q}-Q=0, \qquad \overline{M}-M=0 \end{aligned}\right\}\quad x=0,\ b \tag{5}$$

式中$w$、$\chi$、$M$及$Q$分别为梁的挠度、曲率、弯矩、剪力；$M''$及$w''$分别为$M$及$w$对$x$的二阶导数，$w'$为$w$对$x$的一阶导数；$q$为梁的横向荷载；$\overline{w}$、$\overline{\theta}$、$\overline{M}$及$\overline{Q}$分别为梁端的挠度、转角、弯矩及剪力的已知值，而且

$$\left.\begin{aligned} &M-\frac{\partial A}{\partial\chi}=0 \qquad && \chi-\frac{\partial B}{\partial M}=0 \\ &\frac{\partial A}{\partial\chi}-D\chi=0 \qquad && Q-\frac{dM}{dx}=0 \end{aligned}\right\}\quad 0\leqslant x\leqslant b \tag{6}$$

式中$A$及$B$分别为梁的应变能密度及余能密度，$D$为梁的抗弯刚度。下面利用加权残数法建

立梁的三类变量广义变分原理。

**1．第一种广义变分原理**

如果$w$、$\chi$及$M$为正确解，则式（4）、式（5）及式（6）恒能满足。如果$w$、$\chi$及$M$是近似解，它们不满足式（4）、式（5）及式（6），则由式（4）、式（5）及式（6）可得：

$$\left.\begin{aligned}&M''+q\neq 0\\&\left(\frac{\partial A}{\partial \chi}-D\chi\right)+(2+\alpha)\left(M-\frac{\partial A}{\partial \chi}\right)\neq 0\\&\left(\frac{\partial B}{\partial M}+w''\right)+(2+\alpha)\left(\chi-\frac{\partial B}{\partial M}\right)\neq 0\end{aligned}\right\}0\leqslant x\leqslant b \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}&\bar{w}-w\neq 0,\quad \bar{\theta}-w'\neq 0\\&\bar{Q}-Q\neq 0,\quad \bar{M}-M\neq 0\end{aligned}\right\}x=0,\ b \tag{8}$$

式中$\alpha$是一个任意的已知权函数。

对式（7）及式（8），利用加权残数法可得：

$$\begin{aligned}&\int_0^b(M''+q)\delta w dx+\int_0^b\left[\left(\frac{\partial A}{\partial \chi}-D\chi\right)+(2+\alpha)\left(M-\frac{\partial A}{\partial \chi}\right)\right]\delta\chi dx\\&+\int_0^b\left[\left(\frac{\partial B}{\partial M}+w''\right)+(2+\alpha)\left(\chi-\frac{\partial B}{\partial M}\right)\right]\delta M dx+(\bar{w}-w)\delta(\bar{Q}-Q)\Big|_0^b\\&-(\bar{\theta}-w')\delta(\bar{M}-M)\Big|_0^b+(\bar{Q}-Q)\delta(\bar{w}-w)\Big|_0^b-(\bar{M}-M)\delta(\bar{\theta}-w')\Big|_0^b\\&=0\end{aligned} \tag{9}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^b(M''+q)\delta w dx=\delta\int_0^b(M''+q)w dx-\int_0^b w\delta M'' dx\\&\int_0^b w\delta M'' dx=(w\delta Q-w'\delta M)\Big|_0^b+\int_0^b w''\delta M dx\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}&\chi\delta M+M\delta\chi=\delta(M\chi)\\&\frac{\partial A}{\partial \chi}\delta\chi=\delta A\qquad \frac{\partial B}{\partial M}\delta M=\delta B\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

将式(10)及式(11)代入式（9）可得：

$$\begin{aligned}&\delta\int_0^b\left[(M''+q)w+A+B-\frac{1}{2}D\chi^2-(2+\chi)(A+B-M\chi)\right]dx-\delta(\bar{w}Q-\bar{\theta}M)\Big|_0^b\\&-\delta\left[(\bar{Q}-Q)w-(\bar{M}-M)w'\right]\Big|_0^b=0\end{aligned} \tag{12}$$

由此可得

$$\delta\Gamma_3^*=0 \tag{13}$$

式中 $\Gamma_3^* = \int_0^b [A + B - \frac{1}{2}D\chi^2 - (2+\alpha)(A + B - M\chi) + (M'' + q)w]dx - (\overline{w}Q - \overline{\theta}M)\Big|_0^b$

$$+ [(\overline{Q} - Q)w - (\overline{M} - M)w']\Big|_0^b \tag{14}$$

由式(13)所示的变分驻值条件可得下列自然条件：

$$\left.\begin{aligned} &M'' + q = 0 \\ &\left(\frac{\partial A}{\partial x} - Dx\right) + (2+\alpha)\left(M - \frac{\partial A}{\partial x}\right) = 0 \\ &\left(\frac{\partial B}{\partial M} + w''\right) + (2+\alpha)\left(x - \frac{\partial B}{\partial M}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant b \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} &\overline{w} - w = 0 \qquad \overline{\theta} - w' = 0 \\ &\overline{Q} - Q = 0 \qquad \overline{M} - M = 0 \end{aligned}\right\} x = 0,\ b \tag{16}$$

因为$\alpha$为任意的值，因此由式(15)可得：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial \chi} - D\chi = 0 \qquad M - \frac{\partial A}{\partial \chi} = 0 \\ &\frac{\partial B}{\partial M} + w'' = 0 \qquad \chi - \frac{\partial B}{\partial M} = 0 \end{aligned}\right\} 0 \leqslant x \leqslant b \tag{17}$$

将式(17)代入式(15)可得式(4)。由上述可知，利用式(13)可以自然地导出线弹性梁的全部基本方程及全部边界条件。这就证明了式(14)是一个三类变量的泛函，对应的变分原理是梁的三类变量的广义变分原理。这个变分原理有三类完全独立的变量（$w$，$x$及$M$），它们在变分中不受任何约束条件，因此这个变分原理是一种三类变量的无条件变分原理。

对于线弹性梁，因为$A = \frac{1}{2}D\chi^2$，因此式(14)可变为

$$\begin{aligned} \Gamma_3^* = &\int_0^b [B - (2+\alpha)(A + B - M\chi) + (M'' + q)w]dx \\ &- (\overline{w}Q - \overline{\theta}M)\Big|_0^b + [(\overline{Q} - Q)w - (\overline{M} - M)w']\Big|_0^b \end{aligned} \tag{18}$$

式中$\alpha$为任意选定的值。

2．第二种广义变分原理

如果$w$、$x$及$M$不满足式(4)、式(5)及式(6)，则有

$$\left.\begin{aligned} &M'' + q \neq 0 \\ &(M - D\chi) + (1+\alpha)\left(M - \frac{\partial A}{\partial \chi}\right) \neq 0 \\ &(\chi + w'') + (1+\alpha)\left(\chi - \frac{\partial B}{\partial M}\right) \neq 0 \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant b \tag{19}$$

$$\left.\begin{array}{ll} w-\bar{w}=0 & w'-\bar{\theta}=0 \\ \bar{Q}-Q=0 & \bar{M}-M=0 \end{array}\right\} x=0,\ b \tag{20}$$

对于式(19)及式(20)，利用加权残数法可得：

$$\begin{aligned} &\int_0^b (M''+q)\delta w dx+\int_0^b\left[(M-D\chi)+(1+\alpha)\left(M-\frac{\partial A}{\partial \chi}\right)\right]\delta\chi dx \\ &+\int_0^b\left[(\chi+w'')+(1+\alpha)\left(\chi-\frac{\partial B}{\partial M}\right)\right]\delta M dx \\ &+\left[(\bar{Q}-Q)\delta w-(\bar{M}-M)\delta w'+(w-\bar{w})\delta Q-(w'-\bar{\theta})\delta M\right]\Big|_0^b \\ &=0 \end{aligned} \tag{21}$$

由此可得

$$\delta\Pi_3^*=0 \tag{22}$$

式中
$$\begin{aligned} \Pi_3^* = &\int_0^b\left[\frac{1}{2}D\chi^2-M(\chi+w'')+(1+\alpha)(A+B+M\chi)-qw\right]dx-(\bar{Q}w-\bar{M}w')\Big|_0^b \\ &+\left[(\bar{w}-w)Q-(\bar{\theta}-w')M\right]\Big|_0^b \end{aligned} \tag{23}$$

因为利用式(22)也可以自然地导出线弹性梁的全部基本方程及全部边界条件。因此，式(22)也是一个三类变量（$w$，$x$及$M$）的泛函，对应的变分原理也是梁的三类变量的广义变分原理。

由上述可知：

$$\Pi_3^*+\Gamma_3^*=0 \tag{24}$$

## 四、弹性力学广义变分原理

本节以线弹性体为例，如果采用张量记法，它的基本方程及边界条件为

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_{ij,j}+f_i=0 & \text{in}\,\Omega \\ e_{ij}-\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)=0 & \text{in}\,\Omega \\ \sigma_{ij}-R_{ijkl}e_{kl}=0 & \text{in}\,\Omega \\ \bar{u}_i-u_i=0 & \text{on}\,\Gamma_u \\ \bar{p}_i-\sigma_{ij}n_j=0 & \text{on}\,\Gamma_p \end{array}\right\} \tag{25}$$

式中$\Gamma=\Gamma_u+\Gamma_p$；$u_i$、$e_{ij}$及$\sigma_{ij}$分别为弹性体的位移分量、应变分量及应力分量，所有记号及提法与文献[2]相同，而且

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=0 \qquad e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}=0 \tag{26}$$

式中$A$及$B$分别为弹性体的应变能密度及余能密度。下面利用加权残数法建立弹性力学问题

的三类变量广义变分原理：

1．第一种广义变分原理

如果$u_i$、$e_{ij}$及$\sigma_{ij}$为正确解，则式(25)及式(26)恒能满足。如果 $u_i$、$e_{ij}$及$\sigma_{ij}$ 是近似解，则由式(25)及式(26)可得：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sigma_{ij,j}+f_i\neq 0 \qquad \text{in}\Omega \\
&\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-R_{ijkl}e_{kl}\right)+(2+\alpha)\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\neq 0 \qquad \text{in}\Omega \\
&\left[\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}-\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)\right]+(2+\alpha)\left(e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}\right)\neq 0 \qquad \text{in}\Omega \\
&\overline{u_i}-u_i\neq 0 \qquad \text{on}\Gamma_u \\
&\overline{p_i}-\sigma_{ij}n_j\neq 0 \qquad \text{on}\Gamma_p
\end{aligned}
\right\}
\tag{27}
$$

式中$\alpha$是一个任意选定的权函数。

对于式(27)、利用加权残数法可得：

$$
\begin{aligned}
&\delta\int_{\Omega}\left[(\sigma_{ij,j}+f_i)u_i+A+B-\frac{1}{2}R_{ijkl}e_{ij}e_{kl}-(2+\alpha)(A+B-\sigma_{ij}e_{ij})\right]d\Omega \\
&-\delta\int_{\Gamma_u}\overline{u}\sigma_{ij}n_j d\Gamma+\delta\int_{\Gamma_p}(\overline{p_i}-\sigma_{ij}n_j)u_i d\Gamma \\
&=0
\end{aligned}
\tag{28}
$$

由此可得：

$$\delta\Gamma_3^*=0 \tag{29}$$

式中

$$
\begin{aligned}
\Gamma_3^*=&\int\left[(\sigma_{ij,j}+f_i)u_i+A+B-\frac{1}{2}R_{ijkl}e_{ij}e_{kl}-(2+\alpha)(A+B-\sigma_{ij}e_{ij})\right]d\Omega \\
&-\int_{\Gamma_u}\overline{u}\sigma_{ij}n_j d\Gamma+\int_{\Gamma_p}(\overline{p_i}-\sigma_{ij}n_j)u_i d\Gamma
\end{aligned}
\tag{30}
$$

因为利用式(29)可以自然地导出线弹性力学的全部基本方程及全部边界条件，因此式(29)是一个三类变量（$u_i$，$e_{ij}$及$\sigma_{ij}$）的泛函，对应的变分原理是弹性力学的三类变量的广义变分原理。这个变分原理有三类完全独立的变量（$u_i$，$e_{ij}$及$\sigma_{ij}$），它们在变分中不受任何约束条件，故这个变分原理是一种三类变量的无条件变分原理。

对于线弹性力学，因为$A=\frac{1}{2}R_{ijkl}e_{ij}e_{kl}$，因此式(30)可变为

$$
\begin{aligned}
\Gamma_3^*=&\int_{\Omega}\left[(\sigma_{ij,j}+f_i)u_i+B-(2+\alpha)(A+B-\sigma_{ij}e_{ij})\right]d\Omega \\
&-\int_{\Gamma_u}\overline{u}\sigma_{ij}n_j d\Gamma-\int_{\Gamma_p}(\sigma_{ij}n_j-\overline{p_i})u_i d\Gamma
\end{aligned}
\tag{31}
$$

式中$\alpha$是任意选定的值。由此可以导出各种各样的泛函，例如：当$\alpha=-1$时，则式(31)可变为

胡海昌提出的第一种三类变量广义变分原理的泛函；当$\alpha=-(2+\lambda)$时，则式(31)可变为钱伟长提出的第一种三类变量广义变分原理的泛函，当$\alpha=-\frac{3}{2}$时，则式(31)可变为梁国平和傅子智提出的第一种三类变量广义变分原理的泛函。

2．第二种广义变分原理

如果$u_i$、$e_{ij}$及$\sigma_{ij}$不满足式(25)及式(26)，则

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{ij,j}+f_i\neq 0 \quad \text{in}\Omega\\&(\sigma_{ij}-R_{ijkl}e_{kl})+(1+\alpha)\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\neq 0 \quad \text{in}\Omega\\&[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})]+(1+\alpha)\left(e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}\right)\neq 0 \quad \text{in}\Omega\\&\overline{u_i}-u_i\neq 0 \quad \text{on}\Gamma_u\\&\overline{p}_i-\sigma_{ij}n_j\neq 0 \quad \text{on}\Gamma_p\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

对于式(32)，利用加权残数法可得：

$$\delta\Pi_3^*=0 \tag{33}$$

式中
$$\Pi_3^*=\int_\Omega[A-\sigma_{ij}(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i})+(1+\alpha)(A+B-\sigma_{ij}e_{ij})-f_iu_i]d\Omega$$
$$-\int_{\Gamma_p}\overline{p}_iu_id\Gamma-\int_{\Gamma_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-u_i)d\Gamma \tag{34}$$

式中$\alpha$是一个任意选定的值。

因为利用式(33)可以自然地导出线弹性力学的全部基本方程及全部边界条件，因此式(34)也是一个三类变量广义变分原理的泛函。由此可以导出各种各样的泛函，例如，当$\alpha=$ $=-1$时，则式(34)可变为胡海昌提出的第二种三类变量广义变分原理的泛函，当$\alpha=\lambda'-1$时，则式(34)可变为钱伟长提出的第二种三类变量广义变分原理的泛函，当$\alpha=-\frac{3}{2}$时，则式(34)可变为梁国平和傅子智提出的第二种三类变量广义变分原理的泛函。

## 五、薄板广义变分原理

本节以小挠度弹性薄板弯曲问题为例，它的基本方程及边界条件为

$$E^TM+q=0\,,\ \chi+Ew=0\,,\ M-D\chi=0 \qquad \text{in}\Omega$$
$$\overline{w}-w=0\,,\ \overline{\theta}-\frac{\partial w}{\partial n}=0 \qquad \text{on}\Gamma_1$$
$$\overline{w}-w=0\,,\ \overline{M}_n-M_n=0 \qquad \text{on}\Gamma_2$$
$$\overline{M}-M=0\,,\ \overline{V}_n-V_n=0 \qquad \text{on}\Gamma_3$$
$$\overline{w}-w=0 \qquad at A_1$$
$$\overline{R}-R=0 \qquad at A_2 \tag{35}$$

式中　$\chi=[\chi_x\ \ \chi_y\ \ 2\chi_{xy}]^T \qquad M=[M_x\ \ M_y\ \ M_{xy}]^T$

$$0=[0\quad 0\quad 0]^T \qquad V_n=Q_n+\frac{\partial M_{nt}}{\partial t}$$

$$E=\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\quad 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right]^T \tag{36}$$

$$D=\begin{Bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{Bmatrix} \tag{37}$$

其中$w$、$\chi$及$M$分别为薄板的挠度、曲率及弯曲内力，而且

$$M-\frac{\partial A}{\partial \chi}=0,\quad \chi-\frac{\partial B}{\partial M}=0,\quad \frac{\partial A}{\partial \chi}-D\chi=0 \tag{38}$$

式中$A$及$B$分别为弹性薄板的应变能密度及余能密度。

### 1．第一种广义变分原理

如果$w$、$\chi$及$M$为近似解，利用加权残数法可得薄板的第一种三类变量广义变分原理：

$$\delta\Gamma_3^*=0 \tag{39}$$

式中

$$\begin{aligned}\Gamma_3^*=&\int_\Omega\left[(E^TM+q)w+A+B-\frac{1}{2}\chi^TD\chi-(2+\alpha)(A+B-M^T\chi)\right]d\Omega\\ &-\int_{\Gamma_1+\Gamma_2}V_n\overline{w}d\Gamma+\int_{\Gamma_1}M_n\overline{\theta}d\Gamma-\int_{\Gamma_3}(V_n-\overline{V}_n)wd\Gamma\\ &+\int_{\Gamma_2+\Gamma_3}(M_n-\overline{M}_n)\frac{\partial w}{\partial n}d\Gamma-\sum_{k=1}^{L}R_k\overline{w}_k-\sum_{k=1}^{L}(R-\overline{R})_kw_k\end{aligned} \tag{40}$$

### 2．第二种广义变分原理

如果$w$、$\chi$及$M$为近似解，利用加权残数法可得薄板的第二种三类变量广义变分原理：

$$\delta\Pi_3^*=0 \tag{41}$$

式中

$$\begin{aligned}\Pi_3^*=&\int_\Omega\left[\frac{1}{2}\chi^TD\chi-M^T(\chi+Ew)+(1+\alpha)(A+B-M^T\chi)-qw\right]d\Omega\\ &-\int_{\Gamma_1+\Gamma_2}V_n(w-\overline{w})d\Gamma+\int_{\Gamma_1}M_n\left(\frac{\partial w}{\partial n}-\overline{\theta}\right)d\Gamma-\int_{\Gamma_3}\overline{V}_nwd\Gamma\\ &+\int_{\Gamma_2+\Gamma_3}\overline{M}_n\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)d\Gamma-\sum_{k=1}^{L}R_k(w-\overline{w})_k-\sum_{k=1}^{L}R_kw\end{aligned} \tag{42}$$

式中$\alpha$为任意选定的值。