

工程力学

——中国力学学会中南西南九省（市）工程
力学学术会议论文集



广西科学技术出版社

中国力学学会

中南西南九省（市）工程力学会议论文集编委会名单

主 任	张涵信				
副主任	秦 荣				
编 委	（按姓氏笔划排序）				
	王 伟	韦树英			
	刘北辰	刘烈全	宁交贤	岑人经	杨品德
	张汝清	张发祥	张涵信	熊祝华	秦 荣
主 编	秦 荣				
副主编	韦树英				

序

随着我国经济建设和相关的科学技术的发展，工程力学在我国也得到了发展，并为四化建设作出了贡献。

本论文集反映中南、西南九省(市)近年来工程力学发展的一个侧面，内容丰富，包括理论研究和应用研究方面许多成果，对有关的工程力学界极有启发、参考和直接应用的作用和价值。它的出版丰富了我国这方面的学术文献，将促进工程力学的发展及其为四化建设多作贡献。

李国豪

1991年12月于同济大学

前 言

中国力学学会中南、西南九省(市)工程力学会议于1992年5月在桂林召开。1987年以来,中南、西南九省(市)在中国力学学会的领导下,召开了三次力学方面的学术会议,第一次于1987年在郑州召开了计算力学学术会议,第二次于1989年在重庆召开了现代力学及数学方法学术会议,第三次于1991年在桂林召开工程力学学术会议。这次会议的代表除中南、西南九省市外,还有北京、上海、南京、河北、江西的代表参加,老、中、青代表都有。

这次会议收到论文168篇,经过专家评审,本论文集收入了论文125篇。这些论文的内容包括力学中的基本理论及基本方法,弹性力学、塑性力学、结构力学、流体力学、断裂力学及损伤力学,复合材料力学、岩土力学、实验力学、计算力学、生物力学以及它们在工程中的应用,取得了许多新的成果。这些成果,无论是在理论上或应用上都有所发展,对我国社会主义四化建设有重要的意义。我们出版这本论文集,希望它能推动工程力学今后的研究和应用,促进工程力学的发展,为我国社会主义四化建设作出应有的贡献!

在本论文集的编辑过程中,得到国内许多老前辈和同志们热情关怀和大力支持,学部委员李国豪教授为本论文集写了序,对我们鼓舞很大,现借此机会表示衷心感谢!

由于本论文集编辑时间仓促,错误和缺点在所难免,敬请同志们指正。

中国力学学会中南、西南九省(市)
工程力学会议论文集编委会

1991年12月

目 录

一、基本理论及基本方法

利用加权残数法建立广义变分原理.....	秦 荣 (1)
大变形非线性弹性体的广义变分原理.....	秦 荣 (12)
结构分析的并行有限元法.....	叶碧泉 李红兵 周志红 (17)
板壳问题的摄动迭代数值分析.....	熊建刚 周焕文 (24)
用内蕴变换建立三维边界元法中计算奇异积分的统一公式.....	郑 宏 葛修润 (30)
高阶奇异积分的数值方法.....	秦 荣 韦树英 黄建动 (37)
加速 Navier—Stokes 方程的解的收敛的方法.....	莫乃榕 吴建华 (47)
地壳运动的数学模型.....	王开怡 (53)
浑沌子移位的构造.....	傅新楚 周焕文 (58)
变厚度旋转扁壳几何非线性问题的配点法.....	蔡松柏 王迪微 李家宝 (62)
电磁学中的瞬时变分原理.....	秦 荣 秦 俊 (71)
轴对称稳态热传导问题的边界元分析.....	龙述尧 蒯行成 李兰芬 陈 军 (79)
大曲率杆扭转问题的参数法.....	房腾祥 何庭慧 (85)
结构振型的有限元分析.....	周校先 (92)
振动分析中的虚位移法.....	韦读修 (99)

二、弹性及塑性力学

非均匀弹性地基扁壳分析的Green 函数法.....	张梦华 黄树熙 (103)
弹塑性问题的样条子域法.....	秦 荣 谢肖礼 吴玉友 (110)
建议一种变形近似方法.....	熊慧而 熊祝华 (118)
一类新的应力函数在求解二维弹性力学问题中的应用.....	李丽娟 罗建辉 (123)
中国古代强度知识概述.....	老 亮 (127)
厚板的一个三维弹性理论近似解法.....	李德威 范业立 李水成 (132)
混合支承边正交异性板的固有频率.....	赵廷仕 (142)
楔形体在楔面受一段均布力的弹性应力解.....	高家美 顿志林 (147)
变刚度弹性半空间地基梁的分析.....	车正华 (154)
受均布荷载的楔“佯谬的解决”拾遗.....	禹奇才 (162)
用于板材成形分析的内时本构方程.....	王洪义 范镜泓 高芝晖 王长寿 (166)
Cosserat 曲面介质的本构原理.....	扶名福 杨德品 郑泉水 (172)

有限变形应力本构导数的探讨.....	扶名福	杨德品	范镜泓 (183)
任意形状平板塑性极限分析的计算.....			赵应长 (194)
弹塑性板壳结构的拟协调元分析.....			纪多敏 (199)
圆柱壳受轴向压缩塑性稳定性内时分析.....	曾祥国	高芝晖	黄 骏 (207)
材料变形特性研究新成果在塑性力学中的应用.....	李 轴	彭 意	李中郎 (214)

三、结构力学

高层建筑结构几何非线性问题分析的QR法.....	秦 荣	赵艳林 (225)
高层变截面筒体结构的扭转分析.....		李开国 (234)
半无限长圆柱形薄壳在均匀内压下的蠕变分析.....	任毕乔	付依铭 (243)
连续梁大挠度问题.....	李相麟	赵锡钱 郑泉水 (248)
负刚度的工作原理及应用初探.....	彭 献	陈树年 宋福磐 (254)
弹性支承梁的横向自由振动模态分析及其应用.....	彭如海	郭长青 孙德纶 (260)
浅悬链线壳的内力和位移.....	陈 春	范幸义 陈山林 (268)
复杂体型筒体结构的刚度中心.....		李正良 (276)
框架剪力墙结构空间分析的无剪力分配新法.....		温文刚 (285)
弹簧质量系统振动中的逆问题.....		钟蜀晖 (291)
结构—吊篮加载装置自振特性的半解析分析方法.....		王迪微 (297)
求解框架自振特性的初参数法.....	秦 荣	蒙承军 (304)

四、计算力学

高层建筑结构动力反应的样条函数方法.....	秦 荣	赵艳林	杨绿峰 (313)
剪力墙与地基基础共同工作的边界元分析.....	邓安福	杨云彪	李正良 (320)
深层水泥搅拌桩支挡结构的有限元分析.....		周顺华	张师德 (326)
计划修建的秦岭隧道的开挖方法及支护体系的有限元分析.....			张玉军 (331)
钢筋混凝土框架——剪力墙结构非线性分析有限元模型.....	吴才德	刘北辰	吴才明 (338)
试论大型结构分析程序系统元素库设计的标准化.....	孙利民	沈 林	(344)
振动系统参数的一种优化设计方法.....	唐驾时	陈树年	(348)
等强度条件下三层组合圆柱形压缩螺旋弹簧的成本优化.....	刘龙泉	刘 东	陈春义 (355)
用统计试验法解结构优化问题.....			崔 爵 (360)
最小二乘配点法分析薄壳渡槽.....		彭克明	石曼丽 (363)
地应力场主应力方向偏转时隧道锚杆支护的数值分析及模型试验研究.....			余才高 (369)
端面密封问题的数值计算.....	朱方生	陈绍林	(378)
新型高效组合式换热器结构应力分析.....	董其伍	刘敏珊	袁振伟 (384)
钢型拔制过程中内表面缺陷形成的计算模拟.....	孙 巍	沈成武	(396)

五、断裂力学及损伤力学

异弹横界面断裂问题分析的样条边界元法	秦 荣 (402)
在复杂应力情况下混凝土介质的损伤模型	吴祥云 (412)
楔入劈裂加载下带切口混凝土试块的断裂研究	王新友 (417)
对准静态Ⅲ型扩展裂纹的全新分析	易志坚 (424)
低周疲劳的连续损伤力学模型	王 军 (431)
多轴应力状态下脆性材料强度的估算	朱乃龙 彭图让 (435)
薄板点焊试件的应力强度因子计算	
..... 王元汉 李春植 陈建桥 张家义 陈冬青 赵麦英	(442)
疲劳损伤模型的理论分析修正	申鸿恩 王建强 (447)
用应变能密度判断裂纹扩展方向	田应刚 (453)
颈环裂纹的动态路径积分及其四分点元法	陈清军 赵祖耀 (457)
断裂力学在枪械中的应用	程志远 袁世增 (462)

六、复合材料力学

纤维增强复合材料强度的统计分析 (I、载荷集中分析)	邓梁波 周红玲 (470)
浅埋复合材料夹芯结构变形特征	李福厚 张聆耀 (477)
复合材料稀加筋圆柱层壳的自由振动	闻立洲 闻欣荣 (482)
复合材料结构分析计算的新型层叠杂交元	汪良忠 王 乘 (488)
受弯层合板的分叉现象	沈成武 周安宁 孙 巍 (493)
层状复合材料结构的特殊破坏形式	叶碧泉 羿旭明 张 晶 (498)
纤维增强复合材料强度的统计分析 (II、强度统计分析)	范赋群 邓梁波 (502)
复合材料的随机扩大临界核理论和叠层板的“非线性—耦合前屈二级线性—线性理论”	
..... 范赋群 黄小清 张元亿 曾庆敦	(507)

七、流体力学

涡致振动的试验研究	余永迟 胡春林 (514)
Navier-Stokes 方程的局部解及其拓扑特性	任 兵 吴其芬 (520)
Riemann 流形和准 Riemann 流形上非完整系统流体力学	李泉珍 段成尧 (527)
大型变压器线圈油流阻力的计算与实验研究	李光正 耿鲁怡 王秀春 (539)
用最优化方法进行桩的波动方程分析	胡春林 罗仁安 (544)
浆体管道主要输送参数数据预测的相似模化研究与验证	张绪良 (549)
最小二乘配置法分析管流问题	吴道全 张幼雯 (558)

八、岩土力学

单对称岩石材料的本构方程.....	顿志林	王国际 (564)
岩石断裂韧度及其非线性修正.....	黎振兹 张静宜 徐纪成 刘大安	孙宗顺 (570)
巷道的流变分析及适时支护.....	廖明成	林 峰 (576)
似然目标函数及围岩弹塑性参数的反演.....		袁 勇 (580)
岩土与防护工程非线性有限元专用程序 RSEAP 及其应用.....		周早生 (587)
高层建筑结构与地基相互作用的分析方法.....	秦 荣	赵艳林 (597)
墩基、地梁与框架结构的整体分析.....	杨世忠	陈尔能 (606)
单轴冲击压缩仪及饱和土冲击压缩性质.....	王作民	黄能法 (614)
预应力锚固岩体结构面抗剪性能.....		沈 俊 (621)
随机场地的土层地震反应分析.....	李 天	李 杰 (626)
地下工程有支护围岩的损伤力学模型.....	范秋雁	谭海文 (631)
冲击波作用下土与浅埋索网结构的相互作用.....	陈德兴	王年桥 (635)

九、实验力学

光弹模型内部应力分离的新方法.....		彭达仁 (642)
光弹性法在薄板弯曲应力分析中的应用.....		顾学甫 (648)
锰铜压阻片及其应用技术.....	尹福炎	孟凡萍 (653)
双孔斜交箱形框架桥光弹性实验应力分析	左晓钟 朱高扬 易贤仁 王建平	胡春宇 (657)
桥面防滑条胶接层三向光弹应力分析.....		李志勇 (664)
国内外低温应变测量技术的进展.....	尹福炎	孟凡萍 (668)
三牙轮钻头牙齿工作载荷的动态测试.....	杨迎新 张先普	钟功祥 (673)
电阻应变计在复合材料结构试验中的应用.....	尹福炎	孟凡萍 (678)
复制模型律在抗爆结构动载试验中的应用.....	陈志林	曾荣生 (683)

十、生物力学

心血管系统中的发展流动问题.....		岑人经 (690)
锥形血管中的管壁运动.....	岑人经	秦 婵 (694)
用有限元耦合模型计算患者在几种步态下股骨头(颈)的生理应力	张建辉 李书岐	顾志华 (701)
正畸单根牙倾斜移动的应力分析.....	左晓钟 李 强 李录丽 彭友俭	沈真祥 (704)

十一、工程应用

框架支承塔动力特性的分析.....	金昌宁 (708)
板架理论在船体结构设计中的应用.....	黄琮念 (714)
刚性地基上钢筋混凝土环形板基础设计.....	贾乃文 沈 攸 (722)
多层螺旋胶管的曲挠计算问题的研究.....	梁 涛 (728)
小口径火炮机械传动系统振动频率简易算法.....	朱东初 丁知因 (736)
多关节机械手碰撞约束反力冲量和冲量矩的计算法.....	李明义 (743)
混凝土结构受弯配筋的简捷计算公式.....	温文刚 (752)
ADINA在薄腹板梁承载力计算中的应用.....	叶梅新 (756)
往复式隔膜泵隔膜的强度分析.....	李震华 (762)
轧钢机传动系统大型装配件过盈联接失效机理探讨.....	黄汉舟 (770)
概率方法在强度理论分析中的应用.....	陈祖英 (775)
高速锤空打力的测定及计算.....	王可赞 (781)
关于六矩式平衡方程组的各种情形.....	郑贵然 (789)
矿井提升容器在绳罐道上的横向摆振.....	郭源君 (798)
Z20 装载机车架有限元分析和试验.....	邓广学 (803)
用 TVD 格式计算爆炸波绕流防空地下室.....	刘瑞朝 陈志林 (811)

一 基本理论及基本方法

利用加权残数法建立广义变分原理*

秦 荣 (广西大学)

摘 要

本文利用加权残数法建立梁、板、壳及弹性力学的广义变分原理,提出了两个最普遍的三类变量广义变分原理,它们都是三类变量的无条件变分原理。

关键词 加权残数法,板壳分析,广义变分原理。

一、前 言

变分原理是固体力学、结构力学及计算力学的理论基础,在理论上及实用上都有重要的价值。自从本世纪初 Ritz 法产生后,对固体力学变分原理的研究和应用出现了一个高潮。50年代胡海昌(1954)和鹭津久一郎(1955)先后建立了弹性力学的三类变量广义变分原理,这个变分原理在国际上称为胡海昌-鹭津变分原理。之后,国内外对广义变分原理的研究和应用出现了一个高潮。钱伟长1964年提出了利用拉格朗日乘子法建立广义变分原理的新方法,1983年提出了建立广义变分原理的高阶拉格朗日乘子法。我国有许多学者在变分原理及广义变分原理的研究和应用方面做了大量工作,取得了许多成果,对发展变分原理及广义变分原理做出了重要的贡献。本文在上述研究的基础上,利用加权残数法建立梁、板、壳及弹性力学的广义变分原理,提出了两个最普遍的三类变量广义变分原理,它们都是三类变量的无条件变分原理。由此可以导出各种各样的三类变量广义变分原理,其中包括胡海昌-鹭津久一郎变分原理,钱伟长三类广义变分原理及梁国平-傅子智变分原理,它们都是弹性力学的三类变量广义变分原理。

二、加权残数法

本节以边值问题为例,它的微分方程及边界条件为

*国家自然科学基金资助项目。

$$\left. \begin{aligned} L(u) - f &= 0 & \text{in } \Omega \\ G(u) - g &= 0 & \text{on } \Gamma_1 \\ H(u) - h &= 0 & \text{on } \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 f 、 g 及 h 为已知的函数， Ω 为区域， Γ 为 Ω 的边界，而且 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ 。

如果 u 为正确解，则式(1)恒能满足，如果 u 为近似解 u^* ，则式(1)不会满足，即

$$\left. \begin{aligned} L(u^*) - f &= R & \text{in } \Omega \\ G(u^*) - g &= R_1 & \text{on } \Gamma_1 \\ H(u^*) - h &= R_2 & \text{on } \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 R 为域内残数， R_1 及 R_2 分别为边界 Γ_1 及边界 Γ_2 的残数。

如果近似解 u^* 与正确解 u 一致，则 $R = R_1 = R_2 = 0$ 。为了使近似解 u^* 能尽量趋于正确解，必须残数在整个区域内为最小。为此，想办法选择权残数使残数在某平均意义下等于零，即

$$\int_{\Omega} W R d\Omega + \int_{\Gamma_1} W_1 R_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_2} W_2 R_2 d\Gamma = 0 \quad (3)$$

式中 W 为内部权函数， W_1 及 W_2 分别为边界 Γ_1 及边界 Γ_2 的权函数。

式(3)称为加权残数法的基本方程，简称加权残数方程。利用加权残数方程可以建立变分原理及广义变分原理。这种建立变分原理及广义变分原理的方法称为加权残数法。

三、梁的广义变分原理

本节以线弹性梁为例，它的基本方程及边界条件为

$$\left. \begin{aligned} M'' + q &= 0 \\ \chi + w'' &= 0 \\ M - D\chi &= 0 \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq b \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} - w &= 0, & \bar{\theta} - w' &= 0 \\ \bar{Q} - Q &= 0, & \bar{M} - M &= 0 \end{aligned} \right\} x = 0, b \quad (5)$$

式中 w 、 χ 、 M 及 Q 分别为梁的挠度、曲率、弯矩、剪力； M'' 及 w'' 分别为 M 及 w 对 x 的二阶导数， w' 为 w 对 x 的一阶导数， q 为梁的横向荷载， $\bar{w}$ 、 $\bar{\theta}$ 、 $\bar{M}$ 及 $\bar{Q}$ 分别为梁端的挠度、转角、弯矩及剪力的已知值，而且

$$\left. \begin{aligned} M - \frac{\partial A}{\partial \chi} &= 0 & \chi - \frac{\partial B}{\partial M} &= 0 \\ \frac{\partial A}{\partial \chi} - D\chi &= 0 & Q - \frac{dM}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq b \quad (6)$$

式中 A 及 B 分别为梁的应变能密度及余能密度， D 为梁的抗弯刚度。下面利用加权残数法建

立梁的三类变量广义变分原理。

1. 第一种广义变分原理

如果 w 、 χ 及 M 为正确解，则式(4)、式(5)及式(6)恒能满足。如果 w 、 χ 及 M 是近似解，它们不满足式(4)、式(5)及式(6)，则由式(4)、式(5)及式(6)可得：

$$\left. \begin{aligned} M'' + q &\neq 0 \\ \left(\frac{\partial A}{\partial \chi} - D\chi \right) + (2 + \alpha) \left(M - \frac{\partial A}{\partial \chi} \right) &\neq 0 \\ \left(\frac{\partial B}{\partial M} + w'' \right) + (2 + \alpha) \left(\chi - \frac{\partial B}{\partial M} \right) &\neq 0 \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq b \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} - w &\neq 0, \quad \bar{\theta} - w' \neq 0 \\ \bar{Q} - Q &\neq 0, \quad \bar{M} - M \neq 0 \end{aligned} \right\} x = 0, b \quad (8)$$

式中 α 是一个任意的已知权函数。

对式(7)及式(8)，利用加权残数法可得：

$$\begin{aligned} &\int_0^b (M'' + q) \delta w dx + \int_0^b \left[\left(\frac{\partial A}{\partial \chi} - D\chi \right) + (2 + \alpha) \left(M - \frac{\partial A}{\partial \chi} \right) \right] \delta \chi dx \\ &+ \int_0^b \left[\left(\frac{\partial B}{\partial M} + w'' \right) + (2 + \alpha) \left(\chi - \frac{\partial B}{\partial M} \right) \right] \delta M dx + (\bar{w} - w) \delta (\bar{Q} - Q) \Big|_0^b \\ &- (\bar{\theta} - w') \delta (\bar{M} - M) \Big|_0^b + (\bar{Q} - Q) \delta (\bar{w} - w) \Big|_0^b - (\bar{M} - M) \delta (\bar{\theta} - w') \Big|_0^b \\ &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{式中 } \left. \begin{aligned} \int_0^b (M'' + q) \delta w dx &= \delta \int_0^b (M'' + q) w dx - \int_0^b w \delta M'' dx \\ \int_0^b w \delta M'' dx &= (w \delta Q - w' \delta M) \Big|_0^b + \int_0^b w'' \delta M dx \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi \delta M + M \delta \chi &= \delta (M \chi) \\ \frac{\partial A}{\partial \chi} \delta \chi &= \delta A \quad \frac{\partial B}{\partial M} \delta M = \delta B \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

将式(10)及式(11)代入式(9)可得：

$$\begin{aligned} &\delta \int_0^b \left[(M'' + q) w + A + B - \frac{1}{2} D\chi^2 - (2 + \alpha) (A + B - M\chi) \right] dx - \delta (wQ - \bar{\theta}M) \Big|_0^b \\ &- \delta [(\bar{Q} - Q)w - (\bar{M} - M)w'] \Big|_0^b = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

由此可得

$$\delta \Gamma_3^* = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } \Gamma^* = & \int_0^b [A + B - \frac{1}{2}D\chi^2 - (2+\alpha)(A+B-M\chi) + (M''+q)w]dx - (wQ - \bar{\theta}M) \Big|_0^b \\ & + [(\bar{Q}-Q)w - (\bar{M}-M)w'] \Big|_0^b \end{aligned} \quad (14)$$

由式(13)所示的变分驻值条件可得下列自然条件:

$$\left. \begin{aligned} M'' + q &= 0 \\ \left(\frac{\partial A}{\partial \chi} - D\chi \right) + (2+\alpha) \left(M - \frac{\partial A}{\partial \chi} \right) &= 0 \\ \left(\frac{\partial B}{\partial M} + w'' \right) + (2+\alpha) \left(\chi - \frac{\partial B}{\partial M} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq b \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} - w &= 0 & \bar{\theta} - w' &= 0 \\ \bar{Q} - Q &= 0 & \bar{M} - M &= 0 \end{aligned} \right\} x = 0, b \quad (16)$$

因为 α 为任意的值, 因此由式(15)可得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \chi} - D\chi &= 0 & M - \frac{\partial A}{\partial \chi} &= 0 \\ \frac{\partial B}{\partial M} + w'' &= 0 & \chi - \frac{\partial B}{\partial M} &= 0 \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq b \quad (17)$$

将式(17)代入式(15)可得式(4)。由上述可知, 利用式(13)可以自然地导出线弹性梁的全部基本方程及全部边界条件。这就证明了式(14)是一个三类变量的泛函, 对应的变分原理是梁的三类变量的广义变分原理。这个变分原理有三类完全独立的变量(w , χ 及 M), 它们在变分中不受任何约束条件, 因此这个变分原理是一种三类变量的无条件变分原理。

对于线弹性梁, 因为 $A = \frac{1}{2}D\chi^2$, 因此式(14)可变为

$$\begin{aligned} \Gamma^* = & \int_0^b [B - (2+\alpha)(A+B-M\chi) + (M''+q)w]dx \\ & - (wQ - \bar{\theta}M) \Big|_0^b + [(\bar{Q}-Q)w - (\bar{M}-M)w'] \Big|_0^b \end{aligned} \quad (18)$$

式中 α 为任意选定的值。

2. 第二种广义变分原理

如果 w , χ 及 M 不满足式(4)、式(5)及式(6), 则有

$$\left. \begin{aligned} M'' + q &\neq 0 \\ (M - D\chi) + (1+\alpha) \left(M - \frac{\partial A}{\partial \chi} \right) &\neq 0 \\ (\chi + w'') + (1+\alpha) \left(\chi - \frac{\partial B}{\partial M} \right) &\neq 0 \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq b \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} w - \bar{w} = 0 \quad w' - \bar{\theta} = 0 \\ \bar{Q} - Q = 0 \quad \bar{M} - M = 0 \end{aligned} \right\} x = 0, b \quad (20)$$

对于式(19)及式(20), 利用加权残数法可得:

$$\begin{aligned} & \int_0^b (M'' + q) \delta w dx + \int_0^b \left[(M - D\chi) + (1 + \alpha) \left(M - \frac{\partial A}{\partial \chi} \right) \right] \delta \chi dx \\ & + \int_0^b \left[(\chi + w'') + (1 + \alpha) \left(\chi - \frac{\partial B}{\partial M} \right) \right] \delta M dx \\ & + [(\bar{Q} - Q) \delta w + (\bar{M} - M) \delta w' + (w - \bar{w}) \delta Q - (w' - \bar{\theta}) \delta M] \Big|_0^b \\ & = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

由此可得

$$\delta \Pi_3^* = 0 \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{式中} \quad \Pi_3^* = & \int_0^b \left[\frac{1}{2} D \chi^2 - M(\chi + w'') + (1 + \alpha)(A + B + M\chi) - qw \right] dx - (\bar{Q}w - \bar{M}w') \Big|_0^b \\ & + [(\bar{w} - w)Q - (\bar{\theta} - w')M] \Big|_0^b \end{aligned} \quad (23)$$

因为利用式(22)也可以自然地导出线弹性梁的全部基本方程及全部边界条件。因此, 式(22)也是一个三类变量(w , χ 及 M)的泛函, 对应的变分原理也是梁的三类变量的广义变分原理。

由上述可知:

$$\Pi_3^* + \Gamma_3^* = 0 \quad (24)$$

四、弹性力学广义变分原理

本节以线弹性体为例, 如果采用张量记法, 它的基本方程及边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,j} + f_i &= 0 & \text{in } \Omega \\ e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) &= 0 & \text{in } \Omega \\ \sigma_{ij} - R_{ijkl} e_{kl} &= 0 & \text{in } \Omega \\ \bar{u}_i - u_i &= 0 & \text{on } \Gamma_u \\ \bar{p}_i - \sigma_{ij} n_j &= 0 & \text{on } \Gamma_p \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式中 $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_p$, u_i 、 e_{ij} 及 σ_{ij} 分别为弹性体的位移分量、应变分量及应力分量, 所有记号及提法与文献[2]相同, 而且

$$\sigma_{ij} - \frac{\partial A}{\partial e_{ij}} = 0 \quad e_{ij} - \frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \quad (26)$$

式中 A 及 B 分别为弹性体的应变能密度及余能密度。下面利用加权残数法建立弹性力学问题

的三类变量广义变分原理:

1. 第一种广义变分原理

如果 u_i 、 e_{ij} 及 σ_{ij} 为正确解, 则式(25)及式(26)恒能满足。如果 u_i 、 e_{ij} 及 σ_{ij} 是近似解, 则由式(25)及式(26)可得:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{i,j,j} + f_i &\neq 0 && \text{in } \Omega \\ \left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} - R_{ijkl} e_{kl} \right) + (2+\alpha) \left(\sigma_{ij} - \frac{\partial A}{\partial e_{ij}} \right) &\neq 0 && \text{in } \Omega \\ \left[\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] + (2+\alpha) \left(e_{ij} - \frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} \right) &\neq 0 && \text{in } \Omega \\ \bar{u}_i - u_i &\neq 0 && \text{on } \Gamma_u \\ \bar{p}_i - \sigma_{ij} n_j &\neq 0 && \text{on } \Gamma_p \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式中 α 是一个任意选定的权函数。

对于式(27)、利用加权残数法可得:

$$\begin{aligned} &\delta \int_{\Omega} [(\sigma_{i,j,j} + f_i) u_i + A + B - \frac{1}{2} R_{ijkl} e_{ij} e_{kl} - (2+\alpha)(A + B - \sigma_{ij} e_{ij})] d\Omega \\ &- \delta \int_{\Gamma_u} \bar{u}_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma + \delta \int_{\Gamma_p} (\bar{p}_i - \sigma_{ij} n_j) u_i d\Gamma \\ &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

由此可得:

$$\delta \Gamma_3^* = 0 \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } \Gamma_3^* = &\int_{\Omega} [(\sigma_{i,j,j} + f_i) u_i + A + B - \frac{1}{2} R_{ijkl} e_{ij} e_{kl} - (2+\alpha)(A + B - \sigma_{ij} e_{ij})] d\Omega \\ &- \int_{\Gamma_u} \bar{u}_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_p} (\bar{p}_i - \sigma_{ij} n_j) u_i d\Gamma \end{aligned} \quad (30)$$

因为利用式(29)可以自然地导出线弹性力学的全部基本方程及全部边界条件, 因此式(29)是一个三类变量 (u_i 、 e_{ij} 及 σ_{ij}) 的泛函, 对应的变分原理是弹性力学的三类变量的广义变分原理。这个变分原理有三类完全独立的变量 (u_i 、 e_{ij} 及 σ_{ij}), 它们在变分中不受任何约束条件, 故这个变分原理是一种三类变量的无条件变分原理。

对于线弹性力学, 因为 $A = \frac{1}{2} R_{ijkl} e_{ij} e_{kl}$, 因此式(30)可变为

$$\begin{aligned} \Gamma_3^* = &\int_{\Omega} [(\sigma_{i,j,j} + f_i) u_i + B - (2+\alpha)(A + B - \sigma_{ij} e_{ij})] d\Omega \\ &- \int_{\Gamma_u} \bar{u}_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Gamma_p} (\sigma_{ij} n_j - \bar{p}_i) u_i d\Gamma \end{aligned} \quad (31)$$

式中 α 是任意选定的值。由此可以导出各种各样的泛函, 例如: 当 $\alpha = -1$ 时, 则式(31)可变为

胡海昌提出的第一种三类变量广义变分原理的泛函, 当 $\alpha = -(2+\lambda)$ 时, 则式(31)可变为钱伟长提出的第一种三类变量广义变分原理的泛函, 当 $\alpha = -\frac{3}{2}$ 时, 则式(31)可变为梁国平和傅子智提出的第一种三类变量广义变分原理的泛函。

2. 第二种广义变分原理

如果 u_i 、 e_{ij} 及 σ_{ij} 不满足式(25)及式(26), 则

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,j} + f_i &\neq 0 && \text{in } \Omega \\ (\sigma_{ij} - R_{ijkl} e_{kl}) + (1+\alpha) \left(\sigma_{ij} - \frac{\partial A}{\partial e_{ij}} \right) &\neq 0 && \text{in } \Omega \\ [e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})] + (1+\alpha) \left(e_{ij} - \frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} \right) &\neq 0 && \text{in } \Omega \\ \bar{u}_i - u_i &\neq 0 && \text{on } \Gamma_u \\ \bar{p}_i - \sigma_{ij} n_j &\neq 0 && \text{on } \Gamma_p \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

对于式(32), 利用加权残数法可得:

$$\delta \Pi_2^* = 0 \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } \Pi_2^* = & \int_{\Omega} [A - \sigma_{ij}(e_{ij} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i}) + (1+\alpha)(A + B - \sigma_{ij}e_{ij}) - f_i u_i] d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_i u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \sigma_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma \end{aligned} \quad (34)$$

式中 α 是一个任意选定的值。

因为利用式(33)可以自然地导出线弹性力学的全部基本方程及全部边界条件, 因此式(34)也是一个三类变量广义变分原理的泛函。由此可以导出各种各样的泛函, 例如, 当 $\alpha = -1$ 时, 则式(34)可变为胡海昌提出的第二种三类变量广义变分原理的泛函, 当 $\alpha = \lambda' - 1$ 时, 则式(34)可变为钱伟长提出的第二种三类变量广义变分原理的泛函, 当 $\alpha = -\frac{8}{2}$ 时, 则式(34)可变为梁国平和傅子智提出的第二种三类变量广义变分原理的泛函。

五、薄板广义变分原理

本节以小挠度弹性薄板弯曲问题为例, 它的基本方程及边界条件为

$$\begin{aligned} E^2 M + q &= 0, \quad \chi + Ew = 0, \quad M - D\chi = 0 && \text{in } \Omega \\ \bar{w} - w &= 0, \quad \bar{\theta} - \frac{\partial w}{\partial n} = 0 && \text{on } \Gamma_1 \\ \bar{w} - w &= 0, \quad \bar{M}_n - M_n = 0 && \text{on } \Gamma_2 \\ \bar{M} - M &= 0, \quad \bar{V}_n - V_n = 0 && \text{on } \Gamma_3 \\ \bar{w} - w &= 0 && \text{at } A_1 \\ \bar{R} - R &= 0 && \text{at } A_2 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\text{式中 } \chi = [\chi_x \quad \chi_y \quad 2\chi_{xy}]^T \quad M = [M_x \quad M_y \quad M_{xy}]^T$$

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t}$$

$$E = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \quad (36)$$

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{pmatrix} \quad (37)$$

其中 w 、 χ 及 M 分别为薄板的挠度、曲率及弯曲内力，而且

$$M - \frac{\partial A}{\partial \chi} = 0, \quad \chi - \frac{\partial B}{\partial M} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial \chi} - D\chi = 0 \quad (38)$$

式中 A 及 B 分别为弹性薄板的应变能密度及余能密度。

1. 第一种广义变分原理

如果 w 、 χ 及 M 为近似解，利用加权残数法可得薄板的第一种三类变量广义变分原理：

$$\delta \Gamma_3^* = 0 \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } \Gamma_3^* = & \int_{\Omega} [(E^T M + q)w + A + B - \frac{1}{2}\chi^T D\chi - (2 + \alpha)(A + B - M^T \chi)] d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} V_n \bar{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} M_n \bar{\theta} d\Gamma - \int_{\Gamma_3} (V_n - \bar{V}_n) w d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_2 + \Gamma_3} (M_n - \bar{M}_n) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \sum_{k=1}^L R_k \bar{w}_k - \sum_{k=1}^L (R - \bar{R})_k w_k \end{aligned} \quad (40)$$

2. 第二种广义变分原理

如果 w 、 χ 及 M 为近似解，利用加权残数法可得薄板的第二种三类变量广义变分原理：

$$\delta \Pi_3^* = 0 \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } \Pi_3^* = & \int_{\Omega} [\frac{1}{2}\chi^T D\chi - M^T (\chi + Ew) + (1 + \alpha)(A + B - M^T \chi) - qw] d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} V_n (w - \bar{w}) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} M_n \left(\frac{\partial w}{\partial n} - \bar{\theta} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_3} \bar{V}_n w d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_2 + \Gamma_3} \bar{M}_n \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^L R_k (w - \bar{w})_k - \sum_{k=1}^L R_k w \end{aligned} \quad (42)$$

式中 α 为任意选定的值。