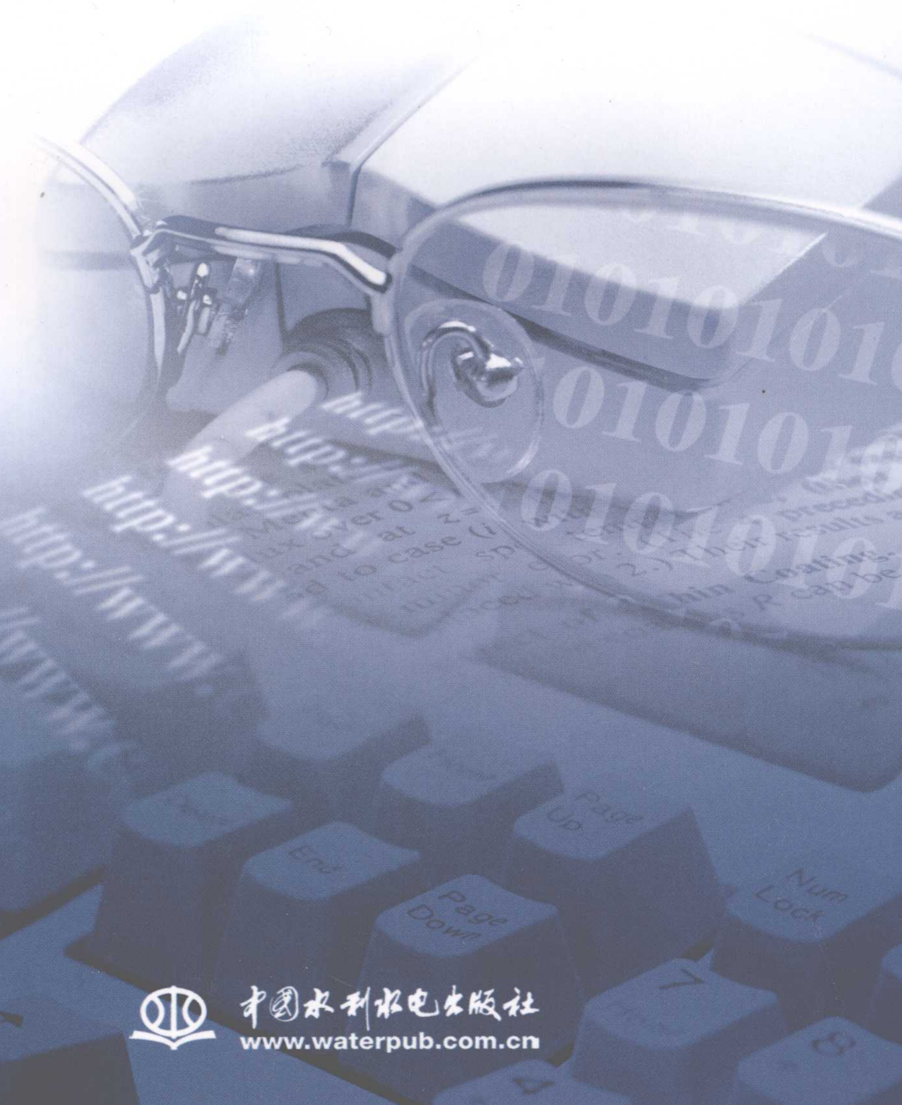
21世纪高职高专规划教材

大学数学(下册)

主　编　毛建生　副主编　刘创宇　刘仁云

21SHIJIGAOZHIGAOZHUANGUIHUAJIAOCA



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

21世纪高职高专规划教材

大学数学

（下册）

主　编　毛建生

副主编　刘创宇　刘仁云

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是高等学校大学数学公共基础课的教材，是作者在总结多年教学经验的基础上，专门针对高职高专学生编写的教材。全书分上、下两册。上册内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、无穷级数等7章；下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、行列式、矩阵、线性方程组、概率、数理统计初步等7章。每章有习题和复习题以及答案。

本书适用于高职高专工科类或经济管理类各专业，也可作为“专升本”考试培训教材，还可作为职业大学、成人大学和自学考试的教材或参考书。

本书配有免费电子教案，读者可以从中国水利水电出版社网站上下载，网址为：http://www.waterpub.com.cn/softdown/。

图书在版编目（CIP）数据

大学数学．下册 / 毛建生主编．—北京：中国水利水电出版社，2008

21世纪高职高专规划教材

ISBN 978-7-5084-5447-4

Ⅰ．大… Ⅱ．毛… Ⅲ．高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第094091号

书　名	大学数学（下册）
作　者	主　编　毛建生 副主编　刘创宇　刘仁云
出版　发行	中国水利水电出版社（北京市三里河路6号　100044） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）63202266（总机）、68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京市天竺颖华印刷厂
规　格	184mm×260mm　16开本　总32.75印张　总836千字
版　次	2008年7月第1版　2008年7月第1次印刷
印　数	0001—3000册
总定价	56.00元（上、下册）

前　言

本书是高职高专规划教材，是根据教育部最新制定的《高职高专教育数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，并参考《全国各类成人高等学校专科起点本科班招生复习考试大纲（非师范类）》编写的。全书分上、下两册，适用于高职高专工科类或经济管理类各专业，也可以作为“专升本”考试培训教材，还可以作为职业大学、成人大学和自学考试的教材或参考书。

本书内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、微分方程、无穷级数、行列式、矩阵、线性方程组、线性经济模型简介、概率、数理统计初步等。

各章内容分模块、分层次编排，供工科类和经济管理类专业选用，每章后编有复习题。

本书遵循高等教育的教学规律，坚持“以应用为目的，以必须够用为度，以可读性为基点，以创新为导向”的编写原则，具有以下特色：

第一，针对现行普高和中职新数学教材编写，突出了初等数学与高等数学的紧密衔接。在第 9 章二重积分部分增补了极坐标，在第 8 章向量与空间解析几何部分删减了部分向量内容等，使初等数学与高等数学衔接得更加紧密。

第二，针对现代教育以学生为主体的理念编写，有较强的可读性。在引进数学概念时，尽量借助几何直观图形、物理意义和生活背景来进行解释，力使抽象的数学概念形象化、直观化、通俗化，切合学生的实际。为降低难度，在论证或解题时，设置了渐进式的思维层次，保留了合适的推理细节，一读就懂。对较难的概念设置为模块，学习时可忽略，不影响系统性，如 $\varepsilon-N$ 语言，$\varepsilon-\delta$ 语言，微分中值定理的证明等，因此不会对学习产生障碍。

第三，针对高职高专各专业的实际编写，有较强的选择性。高职高专教育专业繁多，且差异较大，为了适应各专业使用，对全部内容做了分层处理，选定各专业都必须使用的基本内容作为基本层，在此基础上用模块进行组装，构造出不同层次，如在第 1 章中编写了“建立函数关系举例”和“经济学中常用的函数”，在第 2 章中编写了“导数的经济学意义”和“二阶导数的力学意义”模块等，使本书既适用于理工科类专业，也适用于经济管理类各专业，还适用于各类“专升本考试”培训，弹性大，可选择性强。

第四，针对高职高专的培养目标编写，有较强的实用性。高职高专教育主要培养生产第一线的应用型高级技术人才，为了实现这一目标，本书在理论和计算方面降低了难度，但在数学的应用和使用现代信息技术手段方面进行了充实和强化。

本教材的基本教学时数约为 110 学时，标有*号的内容另行安排课时。

编写本套教材的教师有刘创宇、毛建生、姚艳文、刘仁云、朱勤、沈荣泸、熊开明、兰庭忠、陈明灿、李涛、张玲、邓敏英。他们有丰富的教学经验，教材的内容正是他们长期的教学讲义，他们既深知我国高职高专教育发展的现状，又了解本学科教与学的具体要求，为保证编写质量，对编写大纲进行了反复修改、讨论，并推选了一批教学水平高又有长期教材编写经验的老师参与教材的编写和审定。在本书的编审过程中，得到了泸州职业技术学院电子信息工

程系领导的大力支持，数学教研室的教师提出了许多有益的建议，谨在此表示衷心感谢！

由于成书仓促，编审人员水平有限，不足之处，请有关专家、学者及使用本书的老师指正。我们诚恳地希望各界同仁及广大教师关注并支持这套教材的建设，及时将教材使用过程中遇到的问题和改进意见反馈给我们，以供修订时参考。

编 者

2008 年 6 月

目　　录

上册

下册

第 8 章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何是学习多元函数微积分的基础，它通过坐标对空间曲线和空间曲面的性质进行研究和分析．本章首先建立空间直角坐标系，引进在工程技术上有着广泛应用的向量，介绍向量的运算，然后以向量为工具讨论空间的平面和直线，最后介绍空间曲面和空间曲线的部分内容．

§8.1　向量及其线性运算

一、空间直角坐标系

过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，分别叫 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称坐标轴．通常把 x 轴、y 轴放在水平面上，而 z 轴垂直水平面．按右手系规定 x 轴、y 轴、z 轴的正方向（右手系，又称右手螺旋法则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向），三个坐标轴具有相同的单位长度．这样就建立了一个空间直角坐标系 $O-xyz$，点 O 叫坐标原点．

每两个坐标轴所确定的三平面称为坐标平面，它们分别是 xOy 坐标平面、yOz 坐标平面、zOx 坐标平面．三个坐标平面，把整个空间分成八个部分，每一个部分称为一个卦限．含有 x 轴，y 轴与 z 轴正半轴的卦限叫第一卦限，在 xOy 平面上按逆时针方向依次为第一～第四卦限，xOy 平面下方对应的依次为第五～第八卦限．

设 P 为空间任一已知点，过 P 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，并与 x 轴、y 轴、z 轴依次交于 M、N、Q，（图 8-1）．这三点在 x、y、z 轴上的坐标分别为 x、y、z．于是，空间的一点 P 就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z)．

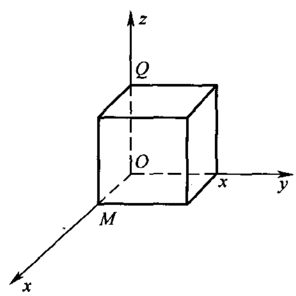


图 8-1

反之，对已知任一有序数组 (x,y,z)，我们在 x 轴、y 轴、z 轴依次取坐标为 x、y、z 的点 M、N、Q，然后过 M、N、Q 三点分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面．这三个互相垂直的平面必相交于一点 P，则 P 就是与有序数组 (x,y,z) 对应的点．

这样，通过空间直角坐标系 $O-xyz$，建立了空间点 P 和有序数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系．称数组 (x,y,z) 点 P 的坐标．其中 x、y、z 分别为点 P 的横坐标、纵坐标、竖坐标．

特别地，原点的坐标为 $(0,0,0)$．

x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$，y 轴上点的坐标为 $(0,y,0)$，z 轴上点的坐标为 $(0,0,z)$．一般情况下，坐标轴上点的坐标特征分别是：横坐标 $x\neq0$，纵坐标 $y\neq0$，竖坐标 $z\neq0$．

xOy 坐标面上点的坐标为 $(x,y,0)$，yOz 坐标面上点的坐标为 $(0,y,z)$，zOx 坐标面上点的坐标为 $(x,0,z)$．坐标面上点的坐标特征一般是：竖坐标 $z=0$；横坐标 $x=0$；纵坐标 $y=0$．

例 1　求点 $P(1,-4,6)$ 关于各坐标面、各坐标轴的对称点的坐标．

解

已知点	(1,−4,6)	(1,−4,6)	(1,−4,6)	(1,−4,6)	(1,−4,6)	(1,−4,6)
对称轴（或面）	xOy 面	yOz 面	xOz 面	x 轴	y 轴	z 轴
对称点	(1,−4,−6)	(−1,−4,6)	(1,4,6)	(1,4,−6)	(−1,−4,−6)	(−1,4,6)

例 2 求空间中任意两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离 d.

解 过 P_1、P_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，构成以 P_1P_2 为对角线的长方体，如图 8-2 所示．在长方体中三条棱长 $|BC|=|x_2-x_1|$，$|BA|=|y_2-y_1|$，$|BP_2|=|z_2-z_1|$，由勾股定理得

$$d=|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

这就是空间两点间的距离公式.

特殊地，点 $P(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为 $d=|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

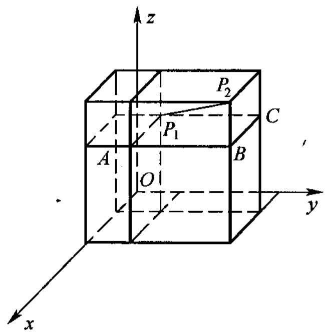


图 8-2

例 3 在 xOz 坐标面上，求与三个点 $A(1,3,2)$，$B(-2,4,-2)$，$C(5,0,1)$ 等距离的点的坐标.

解 设 xOz 坐标面上所求点 $P(x,0,z)$，由题意有 $|PA|=|PB|=|PC|$.

从而 $\sqrt{(x-1)^2+(0-3)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(0-4)^2+(z+2)^2}$，

$\sqrt{(x-1)^2+(0-3)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(0-0)^2+(z-1)^2}$.

两边平方，联立解得 $x=1,z=-2$．故所求点 P 的坐标为 $(1,0,-2)$.

二、向量的概念

人们在日常生活和生产实践中常遇到两类量，一类如温度、距离、体积、质量等，这种只有大小没有方向的量称为数量，也称为纯量或标量．另一类如力、位移、速度、力矩等它们不但有大小而且有方向，这种既有大小又有方向的量称为向量，也称为矢量.

一般地，几何上常用有向线段表示向量，起点为 M，终点为 N 的向量记为 $\overrightarrow{MN}$，如图 8-3 所示．也可用黑体小写字母表示，如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 等（而在书写中，则用带箭头的小写字母 $\vec{a},\vec{b}$ 表示).

向量的大小称为向量的模，用 $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$|\overrightarrow{AB}|$，$|\overrightarrow{MN}|$ 表示向量的模.

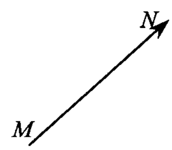


图 8-3

特别地，模为 1 的向量称为单位向量，模为 0 的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$，规定零向量的方向为任意方向.

一个向量经平行移动后，模和方向都不变，即认为还是同一个向量，这种向量叫自由向量．自由向量只与模和方向有关，而与向量的始点位置无关．本章讨论的向量均为自由向量.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，方向相同，则称这两个向量相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$（图 8-4)．如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，方向相反，则称这两个向量互为负向量，记作 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$（图 8-5).

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

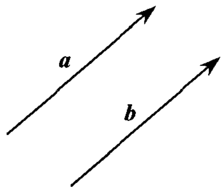


图 8-4

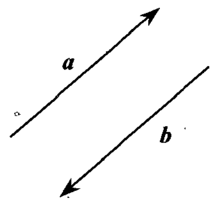


图 8-5

三、向量的线性运算

1. 向量的加减法

定义 1 已知两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，将 $\boldsymbol{b}$ 平移使其始点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，则以 $\boldsymbol{a}$ 的始点为始点，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

如图 8-6 所示，这一方法叫做向量加法的三角形法则. 三角形法则还可以推广到求空间中任意有限个向量的和.

向量的加法运算同数量的加法运算不同，向量的加法运算既要考虑到方向，又要考虑到模. 由图 8-6 知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，向量 $\boldsymbol{c}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，它既有大小又有方向，这里 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\neq|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的模不等于 $\boldsymbol{a}$ 的模加 $\boldsymbol{b}$ 的模，只有当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为同向平行向量时才有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

向量的加法满足：

交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

因为 $-\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{b}$ 的负向量，所以 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

即为向量 $\boldsymbol{a}$ 减 $\boldsymbol{b}$，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

由图 8-7 可知，以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为一组邻边的平行四边形中，一条对角线为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，另一条对角线为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

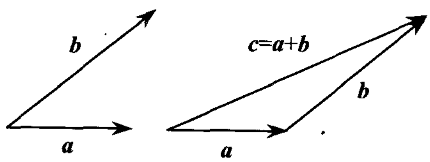


图 8-6

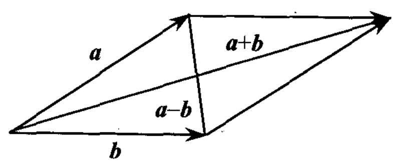


图 8-7

2. 向量的数乘

定义 2 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，称为 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的数乘，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量.

数乘向量满足：

交换律 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\lambda$；

结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$；

分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加法运算和数与向量的乘法统称为向量的线性运算.

四、向量的坐标表示

1. 向量的坐标表示

起点在坐标原点 O，终点为 P 的向量 $\overrightarrow{OP}$，称为点 P 的向径，记作 $r(P)=\overrightarrow{OP}$.

在坐标系中分别与 x 轴，y 轴，z 轴正向相同的单位向量称为基本单位向量，分别用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 表示，如图 8-8 所示.

设点 P 的坐标为 (x,y,z)，则有 $\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{ON}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OQ}=z\boldsymbol{k}$.

于是 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 称为向径 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标表示式，简记为 $\{x,y,z\}$，即 $\overrightarrow{OP}=\{x,y,z\}$.

例 1 设起点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，终点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示式.

解 如图 8-9 所示，有 $\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}$，从而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

简记为 $$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.$$

这就是任意向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示式.

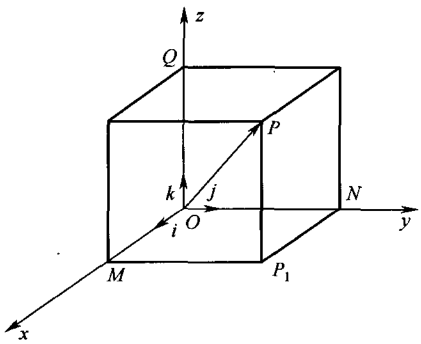


图 8-8

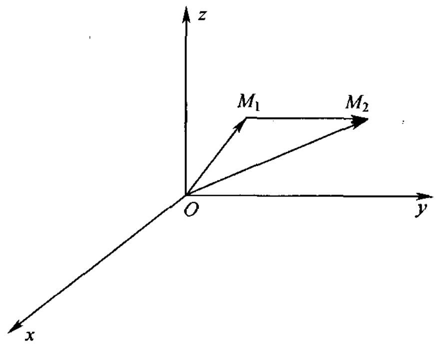


图 8-9

2. 坐标表示下的向量运算

设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，有

（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k}$；

（2）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1)\boldsymbol{i}+(a_2-b_2)\boldsymbol{j}+(a_3-b_3)\boldsymbol{k}$；

（3）$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_1\boldsymbol{i}+\lambda a_2\boldsymbol{j}+\lambda a_3\boldsymbol{k}$；

（4）$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$；

（5）$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

例 2 已知 $\boldsymbol{a}=\{3,5-1\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,2,3\}$，$\boldsymbol{c}=\{4,-1,-3\}$，求 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$.

解 $$\begin{aligned}2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}&=2\{3,5,-1\}-3\{2,2,3\}+4\{4,-1,-3\}\\&=\{6,10,-2\}-\{6,6,9\}+\{16,-4,-12\}=\{16,0,-23\}.\end{aligned}$$

注意 向量的坐标与向量坐标表示式的区别．向量的坐标是一组有序数，向量的坐标表示式是一个向量．例如：$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$ 是向量坐标表示式，其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的系数 (x_2-x_1)，(y_2-y_1)，(z_2-z_1) 正是向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标.

3. 向量的方向角及方向余弦

有了自由向量，可把非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点移至坐标系原点．设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}$.

定义 3 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的正向的夹角分别为 α，β，γ，则 α，β，γ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$

的方向角，并规定$0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$（图 8-10）．方向角的余弦$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$称为向量$\boldsymbol{a}$的方向余弦．

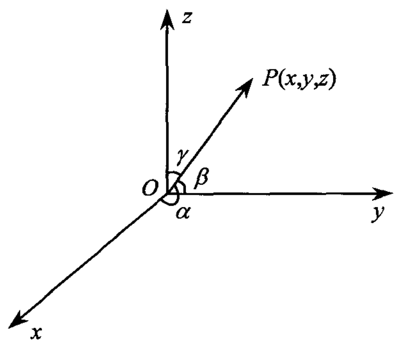


图 8-10

如果$P(x,y,z)$，那么$\overrightarrow{OP}=\{x,y,z\}$即$x=|\overrightarrow{OP}|\cos\alpha$，$y=|\overrightarrow{OP}|\cos\beta$，$z=|\overrightarrow{OP}|\cos\gamma$，

则
$$\cos\alpha=\frac{x}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\cos\beta=\frac{y}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\cos\gamma=\frac{z}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

由上面三个式子两边平方后相加得
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

例 3　已知向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的始点为$P_1(2,-2,5)$，终点为$P_2(-1,4.7)$，试求：

（1）向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的模；（2）向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向余弦．

解　因为$\overrightarrow{P_1P_2}=\{-1-2,4-(-2),7-5\}=\{-3,6,2\}$，所以

（1）$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{(-3)^2+6^2+2^2}=7$．

（2）$\overrightarrow{P_1P_2}$在x,y,z三个坐标轴上的方向余弦分别为
$$\cos\alpha=-\frac{3}{7}\ \cos\beta=\frac{6}{7},\quad \cos\gamma=\frac{2}{7}.$$

例 4　设$\boldsymbol{a}$为一单位向量，它在x,y轴上的坐标分别为$-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$，求向量$\boldsymbol{a}$与z轴正向的夹角γ．

解　设$\boldsymbol{a}=\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},z\}$，

$\because|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+z^2}=1$，$\therefore z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$．

$\therefore\cos\gamma==\dfrac{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故 $$\gamma=\frac{\pi}{4}\text{或}\gamma=\frac{3}{4}\pi.$$

此题还可用方向余弦的平方关系式来求解，读者不妨一试.

五、两向量的数量积

1. 数量积的定义

定义 4 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为两个非零向量，其夹角为$\theta$，乘积$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的数量积，也称为点积、内积．记为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$．即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

由数量积的定义可得

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$；

（2）两个非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角的余弦为$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$；

（3）如果$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是两个非零向量，则$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$的充要条件是$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

由此，三个基本单位向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$之间的数量积为：

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1.$$

数量积是从常力作功中抽象出来的，常力作功就是力$\boldsymbol{f}$与位移$\boldsymbol{s}$的数量积，即$W=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}$.

2. 数量积的运算规律：

（1）交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

（2）结合律　$m(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(m\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(m\boldsymbol{b})$；

（3）分配律　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

3. 数量积的坐标表示式

设$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=a_1b_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_1b_3\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_2b_1\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_2b_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_2b_3\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_3b_1\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_3b_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_3b_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\end{aligned}$$

这就是利用向量的坐标表示式求两向量数量积的公式，也称为两向量数量积的坐标表示式，表明两向量的数量积等于其对应坐标积的和.

由两向量数量积的定义及其坐标表示式可得向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角余弦公式为：

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

这时两非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$互相垂直的充要条件可表示为：$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.

例 5　（1）已知$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$方向相反，求：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；

（2）已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=5$，且两向量的夹角$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，求$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$.

解　（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\pi=-3$.

（2）$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})&=3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=3|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3}-4|\boldsymbol{b}|^2=3\times4-4\times2\times5\times\frac{1}{2}-4\times25=-108.\end{aligned}$$

例 6　已知三点$A(2,1,-2)$，$B(1,2,-2)$，$C(1,1,-1)$，求向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$的数量积及夹角.

解　$\overrightarrow{AB}=\{1-2,2-1,-2-(-2)\}=\{-1,1,0\}$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{BC}=\{0,-1,1\}$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2}$.

所以　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(-1)\times 0+1\times(-1)+0\times 1=-1$，

设 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 θ，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}，\text{即 }\theta=\frac{2}{3}\pi .$$

例 7　已知等边三角形 ABC 的边长为 1，且 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，求：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解　如图 8-11 所示，知 $\angle A=\frac{\pi}{3}$，

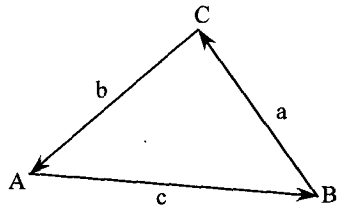


图 8-11

故　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=1\cdot 1\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$，

同理　$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-\frac{1}{2}$，$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}$，

因此　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$.

习题 8-1

1．在空间直角坐标系中，指出下列各点位置的特点：

$A(0,-1,0)$　　$B(2,-2,0)$　　$C(5,0,-2)$

$D(3,0,0)$　　$E(0,3,-4)$　　$F(0,0,-7)$.

2．已知点 $A(2,-1,1)$，则点 A 与 z 轴的距离是______，与 y 轴的距离是______，与 x 轴的距离是______.

3．求点 $(2,-3,-1)$ 关于各坐标面、各坐标轴、坐标原点的对称点的坐标.

4．求点 $M_1(5,10,15)$ 到点 $M_2(25,35,45)$ 之间的距离.

5．设 A,B 两点为 $A(4,-7,1)$，$B(6,2,z)$，它们之间的距离为 $|AB|=11$，求 z.

6．求起点为 $A(1,2,1)$，终点为 $B(-19,-18,1)$ 的向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标表达式及 $|\overrightarrow{AB}|$.

7．把三角形 ABC 的 BC 边五等分，设分点依次为 D_1,D_2,D_3,D_4，再把各分点与点 A 连接，试以 $\overrightarrow{AB}=c$，$\overrightarrow{BC}=a$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A_1},\overrightarrow{D_2A},\overrightarrow{D_3A},\overrightarrow{D_4A}$.

8．试用向量的线性运算证明：三角形两边中点的连线平行第三边且等于第三边的一半.

9．求平行于 $a=(1,1,1)$ 的单位向量.

10．求 λ 使向量 $a=(\lambda,1,5)$ 与向量 $b=(2,10,50)$ 平行.

11．求与向量 $a=(1,5,6)$ 平行，模为 10 的向量 b 的坐标表达式.

12．设向量 $a=(a_x,a_y,a_z)$，若它满足下列条件之一：（1）a 与 z 轴垂直；（2）a 垂直于 xOy 面；（3）a 平行于 yOz 面，那么它的坐标有何特征?

13．已知向量 $\overrightarrow{AB}=(4,-4,7)$，它的终点坐标为 $B(2,-1,7)$，求它的起点坐标 A.

14．已知向量 $a=(6,1,-1)$，$b=(1,2,0)$，求（1）$c=a-2b$；（2）与 C 平行的单位向量.

15．设向量 $a=2i-j+3k$，$b=i+2j+nk$，$c=5i-3j-k$，求向量 $d=a+2b-2c$ 在 x 轴和 y 轴上的分量.

16．试确定数 m 和 n，使向量 $a=-2i+3j+nk$ 和 $b=mi-6j+2k$ 平行.

17．设 $a=3i-j-2k$，$b=i+2j-k$，求：

（1）$a\cdot b$；　（2）$\cos\langle a,b\rangle$；　（3）$(2a-b)\cdot(a+2b)$.

18．设$|a|=3$，$|b|=2$，$\langle a,b\rangle=\dfrac{\pi}{3}$，求：

（1）$(3a+2b)\cdot(2a-5b)$．　　（2）$|a-b|$．

19．已知点$A(1,-3,4)$，$B(-2,1,-1)$，$C(-3,-1,1)$，求∠ABC．

§8.2　向量的向量积

上一节讲了向量的四种运算．这一节要讲向量乘向量，相乘结果是一个向量的乘法叫向量积．

1．向量积的定义

定义　若由两个非零向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$所确定的一个向量$\boldsymbol{c}$满足下列条件：

（1）$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$都垂直，其方向按$\boldsymbol{a}$到$\boldsymbol{b}$的右手定则所确定；

（2）$\boldsymbol{c}$的大小为$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$．

则称向量$\boldsymbol{c}$为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的向量积，记为$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$．向量积也称为外积或叉积．

由向量积的定义可得

（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

（2）$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$　（其中$|\boldsymbol{a}|\neq0$，$|\boldsymbol{b}|\neq0$）．

对于三个基本单位向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$之间的向量积有：

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0,\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}.$$

又向量$\boldsymbol{c}$的模$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$是以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为两个邻边的平行四边形的面积，这就是向量积的几何意义．

向量积是从力矩等问题中抽象出来的，当用扳手去拧螺丝帽时，如果扳手逆时针方向转动，则螺丝帽沿螺栓朝上方移动而拧松．如果扳手顺时针方向转动，则螺丝帽沿螺栓朝下方移动而拧紧．这就是力矩的方向，力矩的大小等于力臂乘力．

2．向量积的运算规律

（1）反交换律$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

（2）数乘结合律$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$；

（3）分配律$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，　$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$．

3．向量积的坐标表示式

设$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\times(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=a_1b_1\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_1b_3\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+a_2b_1\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_2b_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}\\&\quad+a_2b_3\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+a_3b_1\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_3b_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+a_3b_3\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\\&=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

这就是向量坐标表示下的向量积计算坐标公式，为便于记忆，

引入记号：$\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$（称二阶行列式）及

$$\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1&b_3\\c_1&c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1&b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}\quad\text{（称三阶行列式）,}$$

这样向量积计算坐标公式可写成

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}$$

$$=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

上式还说明，两个非零向量平行的充要条件是它们的对应坐标成比例，

即：$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$　（若分母为零，则认为分子也为零）.

例 1　已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，

求：（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；　（2）$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；　（3）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{i}$.

解　（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 3\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$.

（2）$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$.

（3）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{i}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

例 2　求以 $A(1,1,1)$，$B(2,2,2)$，$C(4,3,5)$ 为顶点的三角形面积.

解　$\triangle ABC$ 的面积等于以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 为邻边的平行四边形面积的一半.

$\because\overrightarrow{AB}=(2-1)\boldsymbol{i}+(2-1)\boldsymbol{j}+(2-1)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，

$\overrightarrow{AC}=(4-1)\boldsymbol{i}+(3-1)\boldsymbol{j}+(5-1)\boldsymbol{k}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

由向量积的几何意义知：

$$\triangle ABC\text{ 的面积 }S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

例 3　已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 30°，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=4$，求：$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$.

解　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$

$\therefore|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=|2(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})|=2|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|\sin30^\circ=2\times4\times1\times\dfrac{1}{2}=4$.

习题 8-2

1．已知 $i=(1,0,0)$，$j=(0,1,0)$，$k=(0,0,1)$，$i\times j$，$i\times k$，$j\times k$.

2．已知 $a=(1,1,2)$，$b=(2,2,1)$，求 $a\times b$.

3．已知三点 $M_1(1,-2,3)$，$M_2(1,1,4)$，$M_3(2,0,2)$，求 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$.

4．已知向量 $a=(2,-3,1)$，$b=(1,-1,3)$，$c=(1,-2,0)$，求：

（1）$(a+b)\times(b+c)$；（2）$(a\times b)\cdot c$；（3）$(a\times b)\times c$；（4）$(a\cdot b)c-(a\cdot c)b$.