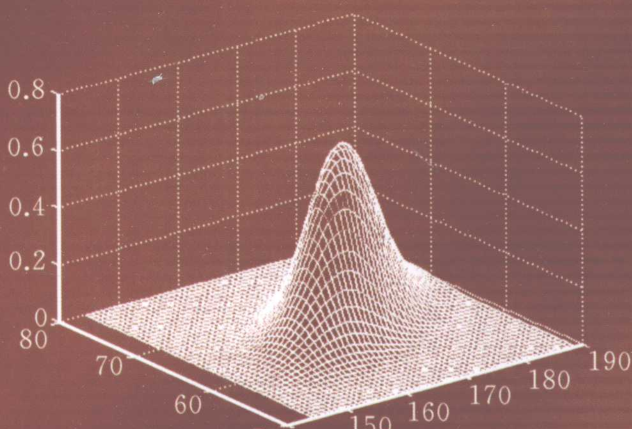
普通高等教育“十一五”规划教材

普通高等院校数学精品教材

概率论与数理统计

刘次华　主编



华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育“十一五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

概率论与数理统计

主　编　刘次华
参　编　万建平　刘继成　王湘君
　　　　胡吉卉　刘小茂　李　萍
　　　　胡晓山　叶　鹰　周晓阳

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/刘次华　主编.—武汉:华中科技大学出版社,2009 年 2 月
ISBN 978-7-5609-5086-0

Ⅰ.概…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料　②数理统计-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 004452 号

概率论与数理统计　　刘次华　主编

策划编辑:周芬娜　　封面设计:潘　群
责任编辑:周芬娜　　责任监印:周治超
责任校对:刘　竣

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉佳年华科技有限公司
印　刷:湖北恒泰印务有限公司

开本:710mm×1000mm　1/16　印张:16.75　字数:323 000
版次:2009 年 2 月第 1 版　印次:2009 年 2 月第 1 次印刷　定价:25.00 元
ISBN 978-7-5609-5086-0/O·478

序

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的数学科学，它是工程数学的重要分支，是一门重要的基础理论课。

概率论从数量上研究随机现象的统计规律性，它是本课程的理论基础；数理统计研究处理随机数据，建立有效的统计方法、进行统计推断。本书的第一章至第五章是概率论的基本理论，第六章至第九章是数理统计的基本内容，第十章是概率统计实验一个入门介绍。

本书将概率统计实验内容写入教材，不仅给学生一个提高和加深对本学科理解的机会，也给教师一种根据需要对讲授内容进行选择的余地，是一种新的教学改革模式。

本书编写中力求突出重点、深入浅出，对基本概念、重要公式和定理注意其实际意义的解释说明；力求在循序渐进的过程中，使读者逐步掌握概率论与数理统计的基本方法。

本书是华中科技大学概率统计系积累几十年教学成果的结晶。本书的作者由经验丰富的主讲教授组成。各章作者依次为万建平、刘继成、王湘君、胡吉卉、刘小茂、王湘君、李萍、胡晓山、叶鹰、周晓阳，最后由刘次华教授定稿。

本书的编写自始至终得到华中科技大学教务处及出版社的大力支持，也得到华中科技大学概率统计系全体教师的协助与鼓励。对此，我们一并表示衷心的感谢。

刘次华

2008 年 11 月于武汉

目　　录

第一章　随机事件与概率

随机事件对概率论的研究具有重要意义，随机事件的等价表示是概率建模的重要技巧，随机事件的关系、运算及公理化概率定义下涉及的概率计算公式，就是针对随机事件及其运算而设计的. 这些内容构成了后续内容学习的基础. 概率论中的全概率公式，条件概率、贝叶斯公式的科学地位可与微积分中的分部积分、变量代换相媲美，它们构成了计算概率的最常规工具.

1.1　随机试验与随机事件

掌握随机现象统计规律性的重要手段是重复观测，但在许多场合下这种观测是需要付出代价的. 这些代价可能是时间或其他资源，即人们的这些重复观测是受到约束的. 解决这些问题的一个出路就是通过精心设计的随机试验对这种观测进行模型化和简化. 随机试验是人们敲开随机现象规律性大门的巧妙工具. 例如，人们可通过反复投掷硬币观测正、反两面出现的统计规律来解释人类生育过程中男女性别之比的统计规律. 掌握一些经典的随机试验的案例及构造设计一些随机试验，对于研究概率论是很有意义的.

1.1.1　随机试验

定义 1.1　设有试验 E，若 E 满足

(1) 试验之前可知试验的一切可能结果，

(2) 每次试验之前不能确定此次试验的结果，

(3) 试验在相同条件下可以重复进行，

则称试验 E 为随机试验.

例 1.1　表 1.1 中数据记载了几位数学家投掷硬币试验的结果.

表 1.1

实验者	掷硬币次数 n	出现正面次数 $n_{正}$	出现正面频率 $\frac{n_{正}}{n}$
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

由上述数据观测可以发现当 n 越来越大时，$\frac{n_{\text{正}}}{n}$ 有向 $\frac{1}{2}$ 集中的趋势. □

例 1.2　投针问题　设平面上画着一族平行线，它们之间的间距相等且都等于 a，向此平面任投一长度为 $l(l<a)$ 的针，观测在这种反复的投掷过程中针与平行线相交的次数. 表 1.2 给出了几位数学家实验数据的记录(设 $a=1$).

表 1.2

实验者	针　长	投掷次数	相交次数
Wolf	0.8	5000	2532
Smith	0.6	3204	1218.5
De Morgan. C	1.0	600	382.5
Fox	0.75	1030	1489
Lazzerini	0.88	3408	1808
Reina	0.5419	2520	859

有趣的是，通过对针与平行线相交概率的计算得到了一个关于 π 的统计估计方法，由此思路出发诞生了 Monte-Carlo 随机模拟方法. □

例 1.3　高尔顿板　设板上钉有图 1.1 所示排列的钉子，自上端放入一小球，使其任意自由下落，下落过程中当小球碰到钉子后，它以向左边或向右边相等的机会落下，碰到下一排钉子时情形也是如此. 在底部设有如图所示的格子，进行大量试验后观测各个格子中落入的球的堆积情况. 这样的试验表明各个格子中球的堆积曲线在进行这样的反复试验中形状几乎总是一样的. 读者可设想通过这种试验可解释哪些随机现象呢? □

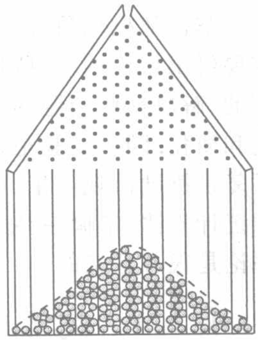


图 1.1

1.1.2　随机事件与样本空间

定义 1.2　随机试验的每一个可能结果称为一个随机事件，简称事件. 事件一般用 A、B、C 等表示. 不可能再分解的事件称为基本事件，由若干个基本事件组成的事件称为复合事件.

例 1.4　随意向桌面掷一颗骰子观察出现的点数，基本事件为 $\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$，$\{6\}$；而出现的点数为偶数 $\{2,4,6\}$ 的事件则为复合事件. □

定义 1.3　随机试验 E 产生的所有可能的结果的集合称为样本空间，记之为 Ω. 样本空间的任一子集即为一个事件，其中必然事件记之为 Ω，不可能事件记之为 $\varnothing$.

例 1.5　设随机试验 E 为两支排球队在一局比赛中某球队的净输球数，则 $\Omega=$

$\{2,3,4,\cdots,25\}$. □

例 1.6 设随机试验 E 为任取某地区某年的年降雨量记录，则 $\Omega=\{x:x\geqslant 0, x$ 为毫升，表示该地区年降雨总量$\}$. □

1.2 随机事件的关系、运算及其性质

对于一个随机试验所涉及的事件往往是非常丰富的. 正确地将一个随机试验所产生的所有事件表示出来是有意义的. 这种表示的基础是要建立事件之间的关系及引入一些有意义的事件的运算，为了更好地研究随机事件之间的关系及相关的运算，对这些运算所涉及的性质的研究也是有价值的.

1.2.1 事件的关系及其运算

定义 1.4 设 A,B 表示两个事件，若 A 发生必导致 B 发生，则称 A 包含于 B 或称 B 包含 A，记之为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

例 1.7 A 表示某国家某地区在某年发生了地震，B 表示该国家在该年发生了地震，则有 $A\subset B$. □

定义 1.5 若 $A\subset B$ 和 $B\subset A$ 同时成立，则称 A 与 B 相等或称之为等价，记为 $A=B$.

将一个事件有目的地进行等价表示通常是概率论理论研究与实际应用的关键步骤.

定义 1.6 若 A,B 至少一个发生，则称之为 A 与 B 之和(并)，记为 $A\cup B$.

求事件和的运算可推广到可列无限多个事件的场合(一个集合称为可列无限是指该集合中的元素可与自然数集建立一一对应的关系). 设 $A_1,A_2,\cdots$ 为一列事件，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots$ 至少一个事件发生.

定义 1.7 若 A 与 B 同时发生，则称之为 A 与 B 之积(交)，记为 $A\cap B$，简记为 AB.

同理，$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots$ 同时发生.

定义 1.8 若 $AB=\varnothing$，称 A 与 B 互不相容或互斥. 若 $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=\Omega$，则称 A 与 B 互为逆事件，记 $B=\overline{A}$.

显然 A 与 B 互逆，则 A 与 B 必互不相容，但反之不然.

定义 1.9 若 A 发生而 B 不发生则称之为 A 与 B 之差，记为 $A-B$.

在建立了上述概念的基础上为了定义概率，有必要引入如下 σ 域的定义.

定义 1.10 设 $\mathscr{F}$ 是由 Ω 中的一些子集组成的集合，具有性质

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$,

(2) 若 $A\in\mathscr{F}$,则 $\overline{A}=\Omega-A\in\mathscr{F}$,

(3) 若 $A_n\in\mathscr{F}, n=1,2,\cdots$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$,

则称 $\mathscr{F}$ 是 Ω 中的一个 σ 域(或称为 σ 代数).

由于我们关心的事件往往需通过事件的运算才能表达出来,但若干事件通过这些运算后是否满足某些封闭性呢?这个问题是很尖锐的.σ 域的建立就在于防范这种情形的发生.直观地可以认为 σ 域就是这样一些事件构成的集合,这个集合内的事件关于 Ω、关于事件的逆运算及关于事件的可列求和运算封闭.

1.2.2 事件的运算性质

上节介绍的事件的运算具有如下性质.

(1) 事件和的运算满足

$$A\cup B=B\cup A \quad (交换律), \tag{1.1}$$

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) \quad (结合律), \tag{1.2}$$

$$A\cup A=A,\quad A\cup\varnothing=A,\quad A\cup\Omega=\Omega.$$

(2) 事件的交运算满足

$$A\cap B=B\cap A \quad (交换律), \tag{1.3}$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \quad (结合律), \tag{1.4}$$

$$A\cap A=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing,\quad A\cap\Omega=A.$$

(3) 事件的并与交运算满足分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \quad (第一分配律), \tag{1.5}$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \quad (第二分配律). \tag{1.6}$$

(4) 德摩根对偶律

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}, \tag{1.7}$$

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{A_n},\quad \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}. \tag{1.8}$$

例 1.8 设有事件 A_1,A_2,A_3,用事件的运算表示(1) $B_1=\{A_1,A_2,A_3$ 中至多发生 2 个$\}$;(2) $B_2=\{A_1,A_2,A_3$ 中至少发生 2 个$\}$.

解 (1) $B_1=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$.

(2) $B_2=A_1A_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$. □

例 1.9 设 A,B,C 表示三个事件,用 A,B,C 表示如下事件:

(1) A 发生且 B 与 C 至少有一个发生;

(2) A 与 B 发生而 C 不发生;

(3) A,B,C 中恰有一个发生.

解 (1) $A(B\cup C)$;

(2) $AB\overline{C}$;

(3) $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$. □

例 1.10 证明:若 A,B 为两事件,则 $A\cup B=A\cup(B-A)$.

证明 $A\cup(B-A)=A\cup(B\overline{A})=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{A})=A\cup B$. □

例 1.11 把 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 表示成 n 个互斥事件之和.

解 $A_1\cup(A_2-A_1)\cup(A_3-(A_1\cup A_2))\cup\cdots\cup(A_n-(A_1\cup\cdots\cup A_{n-1}))$. □

例 1.12 化简事件$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$.

解 $AB\cup A\overline{B}=A(B\cup\overline{B})=A$. □

例 1.13 设$(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup\overline{B})\cup(\overline{A\cup B})\cup(\overline{\overline{A}\cup B})=C$,求 B.

解 $B=\overline{C}$. □

1.3 事件的概率及其计算

定义 1.11 设 $\mathscr{F}$ 是样本空间 Ω 上的一个 σ 域,$P=P(\cdot)$是 $\mathscr{F}$ 上定义的实函数,P 满足

(1) $P(\Omega)=1$,

(2) $P(A)\geqslant 0$ (对一切的 $A\in\mathscr{F}$),

(3) 若 $A_n\in\mathscr{F}$ $(n=1,2,\cdots)$,且两两互不相容,有 $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)$ 成立,

则称 P 是 $\mathscr{F}$ 上的一个概率,$P(A)$称为事件 A 发生的概率.

性质(3)通常称为概率的 σ 可加性.

通常将$(\Omega,\mathscr{F},P)$称为一个概率空间.细心的读者会发现上述定义的基本作用在于判断 P 是否构成 $\mathscr{F}$ 上的一个概率,但对于一个 $A\in\mathscr{F}$ 如何具体地求出 $P(A)$呢?为此我们需要从上述概率的公理化定义出发获得常用的一些概率计算的性质.

定理 1.1 概率具有如下性质:

(1) $P(\varnothing)=0$. (1.9)

(2) 有限可加性:若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i). \tag{1.10}$$

(3) 逆事件概率公式:

$$P(\overline{A})=1-P(A). \tag{1.11}$$

(4) 差事件概率公式:若 $B\subset A$,则

$$P(A-B)=P(A)-P(B). \tag{1.12}$$

(5) 概率的单调性:若 $B\subset A$ 则

$$P(B)\leqslant P(A).$$

(6) 加法公式:设 A,B,C 为任意三个事件,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.13}$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC). \tag{1.14}$$

对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,下式成立:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n). \tag{1.15}$$

证明 (1) 由 $\Omega=\Omega\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$ 及概率的非负性及 $P(\Omega)=1$(规范性)知 $P(\varnothing)=0$.

(2) 只需令 $B_1=A_1,\cdots,B_n=A_n,B_{n+1}=\varnothing,B_{n+2}=\varnothing,\cdots$,可知 $B_1,B_2,\cdots,B_n,B_{n+1},\cdots$ 两两互不相容,且有

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i,$$

从而有

$$\begin{aligned}P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)&=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i)=P(B_i)+\cdots+P(B_n)+P(B_{n+1})+\cdots\\&=P(B_1)+\cdots+P(B_n)=P(A_1)+\cdots+P(A_n).\end{aligned}$$

(3) 由 $A\cup\overline{A}=\Omega$ 及有限可加性,有

$$P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}),\quad P(A\cup\overline{A})=P(\Omega)=1,$$

故性质(3)成立.

(4) 当 $B\subset A$ 时,有 $A=(A-B)\cup B$,又 $A-B$ 与 B 互不相容,从而由有限可加性即知性质(4)成立.

(5) 由性质(4)知当 $B\subset A$ 时,有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$,又 $P(A-B)\geqslant 0$,从而性质(5)成立.

(6) 下面仅就 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 给出证明.

由于 $A\cup B=A\cup(B-AB)$,$AB\subset B$,A 与 $B-AB$ 互不相容,从而

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

下面就两个常见的概型讨论概率公理化定义的性质是否满足的问题.

定义 1.12 设随机试验 E 只产生有限个基本事件(也称样本点),此时样本空间中的样本点总数有限,并设每次试验中各个基本事件出现的可能性是相同的. 若 A 是由 m 个基本事件组成的事件,则 A 的古典型概率的定义为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}}. \tag{1.16}$$

读者在利用此公式计算 A 的概率时一定要验证 Ω 中样本点总数有限及每一个样本点出现机会均等的条件.

由于 $P(A)$ 的定义式中分子分母所涉及的数均非负，故对任意的 $A\in\Omega$，有 $P(A)\geqslant 0$，$P(\Omega)=1$ 是显然的. 由于 Ω 中的样本点总数有限，故由 Ω 的样本点构成的所有子集的个数是有限的，从而概率公理化定义中的 σ 可加性应取代为有限可加性. 事实上设 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，$A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 两两不相容，从而 A 中的样本点数为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中样本点数之和，所以

$$P(A)=P(A_1\cup\cdots\cup A_n)=\frac{A_1,A_2,\cdots,A_n\text{ 中样本点数之和}}{\Omega\text{ 中样本点总数}}=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

古典概率的计算涉及如下两条计数原理：

定义 1.13 加法原理：设事件 A 有 n 类方法出现，并设第 i 类方法由 m_i 种方式组成，则 A 的出现方式共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种.

定义 1.14 乘法原理：若事件 A 有 m 种不同方式出现，设另有事件 B 对 A 的每一种出现方式有 n 种出现方式对应，那么 AB 就应以 nm 种不同方式出现.

加法原理体现了并行的理念，乘法原理涉及计数的分步机理.

此外，古典概型往往涉及排列组合问题，笔者认为这些知识读者已经熟悉故不作介绍.

例 1.14 (1) $A=\{$一批产品共 N 件，其中有 M 件次品，从中任取一件，这件产品恰为次品$\}$，求 $P(A)$.

(2) $B=\{$一批产品共 N 件，其中 M 件次品，从中任取 n 件，这 n 件中恰有 l 件次品$\}$，求 $P(B)$.

(3) $C=\{$一批产品共 N 件，分成 $1,2,\cdots,k$ 个等级，第 i 个等级中有 M_i 件产品，$i=1,2,\cdots,k$，$M_1+M_2+\cdots+M_k=N$. 从中任取 n 件，这 n 件中恰有第 i 个等级的产品 l_i 件，$i=1,2,\cdots,k\}$，求 $P(C)$.

解 显然此时符合古典概型条件.

(1) $P(A)=\dfrac{M}{N}$.

(2) 由乘法原理

$$P(B)=\frac{C_M^l C_{N-M}^{n-l}}{C_N^n}. \tag{1.17}$$

(3) 由乘法原理

$$P(C)=\frac{C_{M_1}^{l_1}C_{M_2}^{l_2}\cdots C_{M_k}^{l_k}}{C_N^n}.$$ □

涉及的概率可抽象出一个称之为超几何分布的概率模型，在第二章中将进行介绍.

定义 1.15 几何概型：设样本空间中的样本点的集合与平面(或一维、三维空间)某区域 G 一一对应，即 Ω 可认为是 G，并设 Ω 中的样本点出现的机会相等，设 $A\subset\Omega$，对应地有 $A_0\subset G$，不妨设 $A_0=A$，称

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积(体积)}}{G\text{ 的面积(体积)}} \tag{1.18}$$

为事件 A 的几何概型下定义的几何概率，简称 $P(A)$ 为 A 的概率.

几何概型可认为是古典概型的推广，一方面几何概型将古典概型中的样本空间中的点数从有限多个推广到无穷多个，另一方面古典概型中的点可看成是一些孤立的点，几何概型中 Ω 中的点为充满了一个平面(或空间)区域中的点. 几何概型的计算主要涉及将所关心的概率计算问题，在满足几何概型的条件下，转化为对线的长度或面积或空间体积的度量问题，解题的关键是能根据问题含义，作出正确的相应的几何图形，再进行度量.

例 1.15　在一张画了小方格的纸上随机地投一枚直径为1 (cm)的圆片，方格要多小时才能使圆片与线不相交的概率小于 1%？(设方格边长为 a(cm).)

解　方格边长为 a (cm)，当圆片圆心落入图 1.2 中阴影部分时才与边界不相交. 由几何概型有

$$P(\text{圆片不与线相交})=\frac{\text{阴影部分面积}}{\text{方格面积}}=\frac{(a-1)^2}{a^2}.$$

令 $\frac{(a-1)^2}{a^2}<0.01$，当 $a\leqslant 1$ (cm)时，圆片必与线相交，只需考虑 $a>1$，

$$\frac{a-1}{a}<0.1,\quad a<1\frac{1}{9},$$

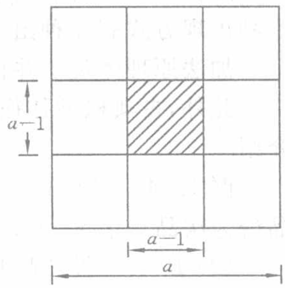


图 1.2

故 $1<a<1\frac{1}{9}$ 时可达到要求. □

读者可自行验证几何概型满足概率公理化定义中的全部条件.

1.4　条件概率公式、全概率公式、贝叶斯公式及事件的独立性

回顾以上概率的计算，其基本方法是利用概率的运算性质计算概率，当问题符合古典概型和几何概型条件时，可利用这两个模型计算概率. 概率的计算性质的实质是讨论概率计算与事件和、差运算交换后所满足的性质. 下面我们要从另外的途径发掘事件概率计算的新方法. 其方向是从事件之间发生的影响关系、从事件的局部到全局的关系出发，作为获得概率计算新方法的突破口.

定义 1.16　设有随机试验 E 及事件 A,B，若 $P(B)>0$，则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.19}$$

为 A 在 B 发生的条件下的条件概率.