高考中的生活数学

——应用题精讲与全能训练

主　编　俞富良
副主编　王伟江
编　者　朱达峰　朱时宏
　　　　朱赛飞　邱　昇
　　　　姚龙国　褚雁平

宁波出版社

前　言

近年来，随着教育改革和高考改革的深入发展，课程设置、教学大纲、教材都相应地进行了修订，其目的就是为了全面实施素质教育，落实研究性学习课程计划，培养学生的创新能力，有助于中学教学从“重学科知识体系”转向“重学生素质优化”。因此，如何以教育改革和高考改革为契机，改革平时的教学方法和形成学生“用数学的意识”，适应高考“加强应用”的需要，就成为一个深远而现实的重要研究课题。

走遍书店，书市看不到高中数学高考应用问题的系统教学资料，这也是我们出版《高考中的生活数学——应用题精讲与全能训练》的原因，有强烈的需求，而又无人撰写，这就给我们提供了撰写的极好机遇，但能否写出使广大读者满意的较系统的读本，又对我们提出了严峻的挑战，在此情况下，我们组织了富有教学经验的高中骨干教师，经过较长时间的研究、论证、修改，编写了《高考中的生活数学——应用题精讲与全能训练》一书，力求让广大师生满意。

本书力求体现教育改革和高考改革的精神，突出对高中数学应用问题主要知识的理解、运用和综合，强调分析问题和解决问题，注重联系现实生活，培养学生的数学应用意识和创新意识，以此构建编写本书的内容体系。本书适应最新教育改革和高考改革的要求，面向广大师生，努力适合不同类型的学校和不同水平的学生。

本书按突出重点内容，编写了函数和方程问题、不等问题、数列问题、几何问题、其他问题等五章内容，其后又安排了三个附录：专题复习，优化设计；中学数学建模；近年高考应用题选。每章与附录都分为若干节，都有明确的目的要求、知识与方法的归纳，揭示规律、思路点拨，典型而贴近生活实际的例题、习题，充分体现系统性、启发性、层次性。本书既可作为高中数学教学的补充读物，也可供高三年级数学应用问题的系统复习用书。

在编写中，参考了有关的教材、期刊和书本，在此对有关的编者和作者一并表示感谢。

由于本书作者较多，写作时间紧，且水平有限，书中问题与不足在所难免，敬请读者批评指正。

编　　者

2002 年 2 月

目　录

第一章　函数和方程问题

高中数学教学目标已明确要求学生“逐步学会把实际问题归结为数学模型，然后运用数学方法进行探索、猜测、判断、证明、运算、检验，使问题得到解决”。在近几年高考数学试卷中，适当增加应用试题，引导学生重视实际、关注社会、分析问题和解决问题已成为高考命题的原则之一。对应用问题的考查，集中体现了对学生的全面素质和创新能力的要求。从近几年的高考试卷来看，应用问题有以下一些特征：

1.命题的立意、实际背景、创设的情境、设问角度和方式新颖灵活，考查学生的应用意识和解决实际问题的能力。

2.结合我国的实际情况和当前社会上的热点问题，编拟题目。有时代气息和教育意义，有实际应用价值。

3.密切联系教材，贴近实际生活，使学生有亲切感，而对问题涉及的所考查的数学知识覆盖面广、综合性强。

函数与方程是近几年高考应用题考查中涉及较多的重点知识之一。

函数与方程是描述客观世界中相互关联的量之间依存关系的工具，是对问题的数量特征及其制约关系的一种刻画。理解函数与方程思想的实质是用联系和变化的观点处理

数学对象之间的数量关系，用静止的观点看函数中变量，则函数的关系式被视为方程，用变化的观点看方程中的数，则方程式就是函数的解析式。因此，在以函数思想为背景设计的应用问题，一般是先用联系和变化的观点提出数学对象，抽象其数量特征，再运用方程思想设定某些必要的未知数，根据题设各数量间的制约关系列出函数解析式或方程解之。

§1.1 函数图象

我们经常遇到一类与函数图象有关的实际应用题，解决这类问题必须结合相关函数的特点，在正确认识函数性质和图象特点的基础上，再结合可能的实际情况方可作出正确的判断.

例 1 某工厂 6 年来生产某种产品的情况：前三年年产量的增长速度越来越快，后三年年产量保持不变，则该厂 6 年来这种产品的总产量与时间(年)的函数关系可用图象表示的是（　　）

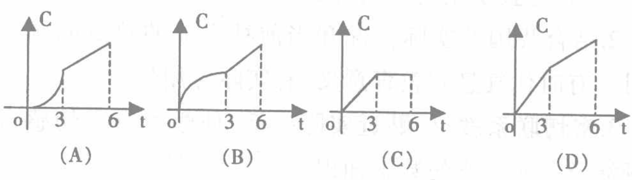

图 1–1

分析： 这是一道实际增长速度要与图象结合的应用题，要求前三年增长速度是越来越快. 从图象中可以发现前三年 B 是越来越慢，C、D 是保持不变. 故 A 正确.

例 2 （1998 年）向高为 H 的水瓶中注水，注满为止.

如果注水量 V 与水深 h 的函数关系的图象如下图所示，那么水瓶的形状是 （ ）

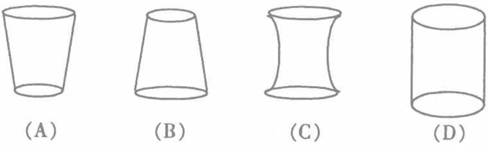

图 1–2

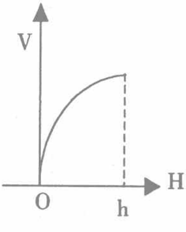

图 1–3

分析：从图中可以发现水上升的速度不是均匀的可以排除 D，水注入时上升幅度是开始慢后来快，这一点可以从图象的$\frac{1}{2}$H 处看到. 结合给定的容器形状正确的是 B.

例 3 某蔬菜基地种植西红柿，由历年市场行情得知，从二月一日起的 300 天内，西红柿市场售价与上市时间的关系用图 1–4 的一条折线表示；西红柿的种植成本与上市时间的关系用图 1–5 的抛物线表示.

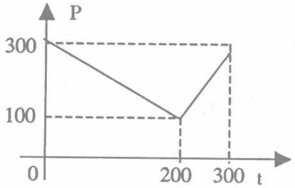

图 1–4

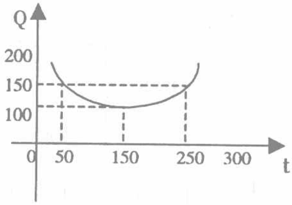

图 1–5

(1)写出图 1–4 表示的市场售价与时间的函数关系

式 $P=f(x)$

写出图 1-5 表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(x)$

(2)认定市场售价减去种植成本为纯收益,问何时上市的西红柿纯收益最大?

分析:$P=f(t)$的图象是两条直线段，可根据直线方程的两点得出其表达式；$Q=g(t)$的图象是抛物线，其顶点坐标为(150,100)，可设抛物线方程为 $y=a(x-150)^2+100$，再根据抛物线经过点(50,150)可求出 a 的值，再根据纯收益$=f(t)-g(t)$求最大值.

解:(Ⅰ) 由图 1-4 可得市场售价与时间的函数关系为

$$f(t)=\begin{cases}300-t, 0\leqslant t\leqslant 200\\ 2t-300, 200<t\leqslant 300\end{cases}$$

由图 1-5 可得种植成本与时间的函数关系为

$$g(t)=\frac{1}{200}(t-500)^2+100,\qquad 0\leqslant t\leqslant 300$$

(Ⅱ) 设 t 时刻的纯收益为 $h(t)$ 则由题意得 $h(t)=f(t)-g(t)$

$$即\ h(t)=\begin{cases}-\frac{1}{200}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t+\frac{175}{2}, 0\leqslant t\leqslant 200\\ -\frac{1}{200}t^2+\frac{7}{2}t+\frac{1025}{2}, 200<t\leqslant 300\end{cases}$$

当 $0\leqslant t\leqslant 200$ 时，配方整理得 $h(t)=-\frac{1}{200}(t-50)^2+100$,

所以,当 $t=50$ 时，$h(t)$取得区间[0,200]上的最大值 100;

当 $200<t\leq 300$ 时，配方整理得 $h(t)=-\frac{1}{200}(t-350)^2+100$，

所以，当 $t=300$ 时，$h(t)$取得区间$(200,300]$上的最大值 87.5.

综上，由 $100>87.5$ 可知，$h(t)$在区间$[0,300]$上可以取得最大值 100，此时 $t=50$，即从二月一日开始的第 50 天时，上市的西红柿纯收益最大.

说明：由于 $f(t)$是一个分段函数，所以 $h(t)$也是一个分段函数，因而 $h(t)$在求最大值时，先求出在区间$[0, 200]$上的最大值，再求出在区间$(200, 300]$上的最大值，对这两种情况下的最大值进行比较，确定在$[0,300]$ 上的最大值.

§1.2 函数表达式

许多应用问题都是通过利用相关实际问题中提供的重要信息、数据，经过适当的加工、概括，建立与之相关的函数表达式，利用函数关系来刻画实际问题中所需的重要量之间的变化关系，并借助它达到解决问题的目的.

例 4 某商人购货，进价已按原价 30 元/件扣去 25%，他希望对货物定一新价，以便按新价让利 20%销售后，仍可获得售价 25%的纯利.那么此商人经营这种货物时，按新价让利总额 y 与货物件数 x 之间的函数关系式是什么?

分析：应先求出每件货物的新价，再求让利总额 y 与 x 的关系式.

解：设每件货物的新价为 a 元，则销售价为 $a(1-20\%)=a\cdot 80\%$（元），而进价为 $30(1-25\%)=30\times 75\%$（元/件），因此销售每件货物的利润为 $a\cdot 80\%-30\times 75\%$由题设知 $a\cdot 80\%-30\times$

$75\%=a\cdot 80\%\cdot 25\%$ $\therefore a=\frac{75}{2}$ 故 $y=a\cdot 20\%\cdot x=\frac{15}{2}x$

说明：①利润=售价−进价；②利润=进价×利润率.本题中利用①②两个关系式列出方程确定新价 a 是解题的关键.

例 5 某工厂今年 1 月、2 月、3 月生产某产品的数量分别为 1 万件、1.2 万件、1.3 万件，为了估计以后每个月的产量，以这三个月的产品数量为依据，用一个函数模拟该产品的月产量 y 与月份 x 的关系.模拟函数可以选用二次函数或函数 $y=ab^x+c$（其中 a,b,c 为常数）.已知 4 月份该产品的产量为 1.37 万件，请问用以上哪个函数作为模拟函数较好，并说明理由.

分析：根据题意，该产品的月产量 y 是月份 x 的函数，可供选用的函数有两种，其中哪一种函数确定的 4 月份该产品的产量越接近 1.37 万元，那种函数作为模拟函数就较好，故应先确定出两个函数的具体表达式.

解：设 $y_1=f(x)=px^2+qx+r$（p,q,r 为常数 $p\neq 0$ ）

$y_2=g(x)=ab^x+c$

据题意得 $\begin{cases} p+q+r=1 \\ 4p+2q+r=1.2 \\ 9p+3q+r=1.3 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} ab+c=1 \\ ab^2+c=1.2 \\ ab^3+c=1.3 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} p=-0.05 \\ q=0.35 \\ r=0.7 \end{cases}$ $\begin{cases} a=-0.8 \\ b=0.5 \\ c=1.4 \end{cases}$

$\therefore f(x)=-0.05x^2+0.35x+0.7$ $g(x)=-0.8\times 0.5^x+1.4$

$\therefore f(4)=1.3$

$g(4)=1.35$ 显然 $g(4)$ 更接近于 1.37，故选用

$y=-0.8\times 0.5^x+1.4$ 较好.

例 6 “依法纳税是每个公民应尽的义务.”国家征收个人工资、薪金所得税是分段计算的，总收入不超过 800 元的，免征个人工资、薪金所得税；超过 800 元部分需征税.设全月纳税所得额为 x，x=全月总收入−800 元.税率如下：

级数	全月应纳税所得额 x	税率
1	不超过 500 元部分	5%
2	超过 500 元至 2000 元部分	10%
3	超过 2000 元至 5000 元部分	15%
……	……	……
9	超过 100000 元部分	45%

(1) 若应纳税额为 f(x),试用分段函数表示 1−3 级纳税额 f(x)的计算公式；

(2) 某人 1999 年 3 月份工资总收入 3000 元，试计算这个人 3 月份应缴纳个人所得税多少元?

分析：在税率表里各级纳税所得额中“部分”两个字是正确理解题意，搞清纳税金额的计算方法的关键.一个人纳税的多少应根据工资、薪金的多少，将全月纳税所得额划分成若干个区间分别计算.

解：(1)由题意得

$$f(x)=\begin{cases}5\%\cdot x\,(0<x\leqslant 500)\\(x-500)\cdot 10\%+5\%\cdot 500 \quad (500<x\leqslant 2000)\\(x-2000)\cdot 15\%+1500\cdot 10\%+500\cdot 5\% \quad (2000<x\leqslant 5000)\end{cases}$$

(2) 某人 1999 年 3 月份应纳所得税额为 x=3000−800=2200 其应纳个人所得税为 f (2200)=205 故这个人 3 月份应纳税 205 元.

说明：本例结合国家征收个人工资、薪金所得税问题，给出了一个有关分段函数的应用实例.在经济关系中函数解析式的函数模型有需求函数、供给函数、成本函数、收益函数等建立上述模型都需要细致审题、明确题意，同时了解应用问题的背景知识也相当重要.

§1.3 方程

有一类实际应用题，可以通过建立方程或方程组，把解决的问题转化为求解相关方程的根，从而找到实际问题中有关重要量之间的内在关系，也就达到了解决问题的目的.

例 7 某企业出售某种牌号的收音机，每台的价格成本是 24 元.若直接设立门市部销售，则每台售价 32 元，销售费用每月 2400 元；若批发给商家销售，则出厂价每台 28 元，问每月销售量为多少时，需要设立门市部. 若要求销售量每月达到 2000 台，试问采用那种销售方式效益好.

分析：效益好坏的标准是销售利润的大小.若设 x 为两种销售形式下利润相等时的销售量，则根据利润相等可列出关于 x 的方程，求得 x，再与 2000 比较，便可确定销售方式.

解：设 x 为两种销售方式下利润相等时的销售量，依题得

$$(32-24)x-2400=(28-24)x \quad 解得\ x=600(台)$$

因此，当销售量大于 600 台时，直接销售的利润大于间接销售的利润，这时应设立门市部.因此每销售 2000 台时，采用设立门市部直接销售的方式效益好.

例 8 麒麟电器公司生产 A 型号的家庭电脑.1993 年平均每台电脑生产成本为 5000 元，并以纯利润 20%标定出厂价，1994 年开始，公司更新设备，加强管理，逐步推行股份制，从而使生产成本逐年降低.1997 年平均每台 A 型号的家庭电脑尽管出厂价仅是 1993 年出厂价的 80%，但却实现了纯利润 50%的高效益.

（1）求 1997 年每台电脑的生产成本；

（2）以 1993 年生产成本为基数，求 1993 年至 1997 年生产成本平均每年降低的百分数.（精确到 0.01 以下数据可供参考 $\sqrt{5}=2.236,\sqrt{6}=2.449$ ）

分析:（1）一方面可以根据 1993 年的出厂价求得 1997 年的出厂价；另一方面根据题意可把 1997 年的出厂价用 1997 年的生产成本来表示，列出方程求解.

（2）因为 1993~1997 年四年间成本平均每年降低的百分率相等，因此可把 1997 年每台的生产成本用这个百分数表示，而这个量应与第（1）问中求得 1997 年每台电脑的生产成本相等，据此列出方程求解.

解:(1)设 1997 年每台电脑的生产成本为 x 元,依题意得 $x(1+50\%)=5000\times(1+20\%)\times80\%$,解得 $x=3200$ 元

(2)设 1993 年至 1997 年间每年平均生产成本降低百分率为 y，则依题意得 $5000(1-y)^4=3200$ 解得，$y_1=1-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$y_2=1+\frac{2\sqrt{5}}{5}$（舍去）

故 $y=1-\frac{2\sqrt{5}}{5}\approx0.106\approx0.11=11\%$

所以 1997 年每台电脑的成本为 3200 元，1993~1997 年

生产成本平均每年降低 11%.

说明: ①出厂价=成本+利润,利润=成本·利润率. ②寻找等量关系是建立方程模型解答实际应用问题的关键.

例 9 某种冰淇淋是用球型塑料壳包装的，有 60 克和 150 克装两种规格. 假设冰淇淋售价=(冰淇淋成本+包装成本)×(1+利润率).并且包装成本与球型外壳表面积成正比.已知 60 克装冰淇淋售价 1.5 元. 其中冰淇淋成本为 1 分/克.利润率为 25%，问在利润率不变的情况下，150 克装冰淇淋应售价多少？两种规格中，买哪种合算？

(参考数据：$\sqrt[3]{50}=3.7$ 精确到 1 分)

分析: 合不合算的关键是单位重量的价格哪种高？

解: 60 克装冰淇淋的包装成本为 $1.5\div(1+25\%)-60\times0.01=0.60$ 元. 设 60 克和 150 克装冰淇淋球型外壳表面积分别是 S_1,S_2;容积分别是 V_1,V_2，150 克装冰淇淋的包装成本为 x，则可得以 x 为未知数的方程

$\frac{x}{0.60}=\frac{S_2}{S_1}$.而 $\frac{S_2}{S_1}=(\frac{V_2}{V_1})^{\frac{2}{3}}=(\frac{150}{60})^{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt[3]{50}}{2}=1.85$,$\therefore x=1.11$(元).

因此 150 克装冰淇淋售价为 $(150\times0.01+x)\times(1+25\%)\approx3.26$ 元. 又因为两种规格的冰淇淋单位重量的价格比为 $\frac{1.5}{60}:\frac{3.26}{150}=1.2:1$,所以买大包装的比买小包装的合算点.

§1.4 最值

现实生活中普遍存在着所谓“最优化”问题，如成本最低、利润最大、效益最好等. 这些问题都可以归结为函数最值问题,即把实际问题，通过建立相应的目标函数，确定变量的限制条件,运用数学知识和方法加以解决.

例 10 某商场预计全年分批购入每台价格为 2000 元的电视机共 3600 台，每批都购入 x 台($x\in N$)且每批均需付运费 400 元，储藏购入的电视机全年所付的保管费与每批购入电视机的总价值(不含运费)成正比.若每批购入 400 台，则全年需用去运费和保管总费是 43600 元. 现在全年只有 24000 元资金可以用于支付这笔费用. 试问：能否恰当安排每批进货的数量，使资金够用?

分析:以总费用为目标函数,求它的最小值,若这个最小值小于或等于 24000 元，则可作出安排；若这个最小值大于 24000 元，则不能作出安排.

解：设全年的运输和保管总费用为 y 元，则 $y=\frac{3600}{x}\times 400+k\cdot(2000x)$ 依条件当 $x=400$ 时,$y=43600$ 可以解得 $k=0.05$，故 $y=\frac{3600\times400}{x}+100x\geqslant2\sqrt{\frac{3600\times400}{x}\cdot100x}=24000$(元) 当且仅当 $x=120$ 时上式取等号. 因此只需要每批购入 120 台电视机，就可以使预定资金够用.

例 11 某工厂在甲、乙两地的两个分厂各生产某种机器 12 台和 6 台. 现销售给 A 地 10 台,B 地 8 台.已知从甲地调运 1 台至 A 地、B 地的运费分别为 400 元和 800 元，从乙地

调运 1 台至 A 地、B 地的运费分别为 300 元和 500 元.

(1) 设从乙地调运 x 台至 A 地， 求总费用 y 关于 x 的函数关系式；

(2) 若总运费不超过 9000 元， 问共有几种调运的方案；

(3) 求出总运费最低的调运方案及最低的费用.

解：由甲、乙两地调运至 A、B 两地的机器台数及费用(元)如下表：

调出地	甲地		乙地	
调至地	A 地	B 地	A 地	B 地
台数	10−x	12−(10−x)	x	6−x
每台运费	400	800	300	500
运费合计	400(10−x)	800[12−(10−x)]	300x	500(6−x)

(1) 依题意得 $y=400(10-x)+800[12-(10-x)]+300x+500(6-x)$

即 $y=200(x+43)\quad(0\leqslant x\leqslant 6, x\in Z)$

(2)由 $y\leqslant 9000$，解得 $x\leqslant 2$ $\because x\in Z$ $0\leqslant x<6$ $\therefore x=0,1,2$ 所以共有三种调运方案.

(3)由一次函数的单调性知，当 $x=0$ 时，总运费 y 最低，$y_{min}=8600$ 元， 即从乙地调 6 台给 B 地， 甲地调 10 台给 A 地，调 2 台给 B 地的调运方案的总费用最低， 最低费用为 8600 元.

说明：本题数量关系较多，利用列表法将数量关系明朗化，有利于函数关系的准确建立.