主编 张金海 王金萍 郑维英

高等数学（同济五版）
学习指南

（上册）

東北大學出版社
Northeastern University Press

高等数学学习指南

（上册）

主　编　张金海　王金萍　郑维英
副主编　李晓红　金英善　许宏昕

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指南（上册）/ 张金海，王金萍，郑维英主编．—沈阳：东北大学出版社，2008.6
ISBN 978-7-81102-553-8

Ⅰ．高…　Ⅱ．①张… ②王… ③郑…　Ⅲ．高等数学—高等学校—数学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 082462 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：// www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂书画彩印中心
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：140mm×203mm
印　　张：12.125
字　　数：410 千字
出版时间：2008 年 6 月第 1 版
印刷时间：2008 年 6 月第 1 次印刷
责任编辑：孟　颖　刘宗玉　　责任校对：冬　雨
封面设计：唐敏智　　责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-553-8　　总定价：26.00 元

前　　言

《高等数学学习指南》是专门为使用同济大学编写的第五版“高等数学”的一般本科院校的学生编写的，作者都是长期从事高等数学教学工作的一线教师.

全书有上、下二册，分别与同济五版《高等数学》相配套，包括十二章和两个附录. 十二章内容与教材同步，每章含五项内容.

一、内容提要. 此项概括了每章的主要定义和常用结论. 有些结论是在数学工作中总结出来的被证明行之有效的.

二、例题分析. 此项利用分类的方法，通过各种典型例题，讲述解答问题的方法. 特别是教给学生如何分析问题和解题的思路.

三、难题解析. 对教材中的难题给出详细解答，针对有些题目给出多种解法. 这可以用于学生课后复习.

四、补充与提高. 通过课外题的解答对所学知识与解题方法进行补充. 所举例题大多具有综合性. 这会使学生对所学知识做到融会贯通，提高学生综合运用所学知识解决疑难问题的能力. 特别是对那些有志考研的学生更会大有裨益.

五、同步练习与测试. 每章后提供两套测试题，供学生自查之用. 每套题建议用两个小时做

完．书中提供了详细解答．

书后两个附录共提供了六套期末测试题，上册三套，下册三套．每册前两套为数学一的内容，最后一套为数学二的内容．

《高等数学学习指南》除供在校本科生使用外，还可供考研者使用，也可供从事高等数学教学工作的同事们参考．本书的出版得到了东北大学出版社的大力支持，在此表示诚挚的谢意．

本书系《高等数学学习指南》的上册，主编为张金海、王金萍和郑维英，副主编为李晓红、金英善和许宏昕，参与编写人员还有王学理、邢军和黄胜绢。

由于编者水平所限，加之时间仓促，书中难免会有不足之处，读者及同行的批评指教正是我们所衷心期待的．

作　者

2008 年 1 月 8 日

目　　录

上　册

第一章　函数与极限

一、内容提要

(一) 主要定义

1. 具有某种特定性质的事物的总体称为集合(简称集)，组成这个集合的事物称为该集合的元素(简称元).

2. 设 X, Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f: X \to Y,$$

其中 y 称为元素 x(在映射 f 下)的像，并记作 $f(x)$，即

$$y = f(x),$$

而元素 x 称为元素 y(在映射 f 下)的一个原像.

3. 设数集 $D \subset \mathbf{R}$，则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为 $y = f(x)$，$x \in D$.

4. 如果存在 $M > 0$，使得 $|f(x)| \leqslant M$ 对一切 $x \in I$ 都成立，则称函数 $f(x)$在 I 上有界. 如果这样的 M 不存在，就称 $f(x)$在 X 上无界.

5. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，使得当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限(也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a)，记作 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

极限不存在时，则称 $\{x_n\}$ 发散.

6. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

注　在此定义中，$0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $x_0 - \delta < x < x_0$，A 称为 $f(x)$ 当 $x \to x_0 - 0$ 时的左极限，记作 $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ 或 $f(x_0 - 0) = A$，类似地可以定义右极限 $f(x_0 + 0)$.

7. $\forall \varepsilon>0$, $\exists X>0$, 当$|x|>X$时, 恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称A为$f(x)$当$x\to\infty$时的极限, 记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

读者可以自己给出$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$和$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$的定义.

8. $\forall M>0$, $\exists \delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时, 恒有$|f(x)|>M$, 则称$f(x)$是当$x\to x_0$时的无穷大量, 记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$. 无穷大量简称为无穷大.

读者可以自己给出$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$等的定义.

注 当$x\to x_0$和$x\to\infty$结论都成立时, 以后简记作"lim". 以0为极限的量称为无穷小量. 无穷小量简称为无穷小.

9. 若$\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=0$, 且$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, 则称$\alpha(x)$是$\beta(x)$的高阶无穷小, 记作$\alpha(x)=o(\beta(x))$; 若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, 称$\alpha(x)$是$\beta(x)$的低阶无穷小; 若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c(c\neq0)$, 则称$\alpha(x)$是$\beta(x)$的同阶无穷小, 记作$\alpha(x)=O(\beta(x))$, 当$c=1$时, 称$\alpha(x)$是$\beta(x)$的等价无穷小, 记作$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

10. 函数最简单性态

(1) $f(x)=f(-x)$, $x\in(-l, l)$, 称$f(x)$为偶函数;

(2) $f(x)=-f(-x)$, $x\in(-l, l)$, 称$f(x)$为奇函数;

(3) $f(x+T)=f(x)$, $x\in(-\infty, +\infty)$, 称$f(x)$为周期函数, 使等式成立之最小的正T值称为周期;

(4) $\forall x_1, x_2\in D$, 当$x_1>x_2$时有$f(x_1)>f(x_2)$, 则称$f(x)$为D上的单调增加函数. 类似地可以定义单调减少函数.

11. 若$y=f(x)$在x_0处有$\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$, 此处$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, 则称$f(x)$在$x_0$处连续.

若记$\Delta x=x-x_0$, 则连续定义可以写成$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 不连续时称为间断, 不连续的点称为间断点.

注 若$f(x)$在x_0某邻域内有定义(x_0可以除外), 则具有下列条件之一者即为间断:

(1) $f(x)$在x_0处无定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

12. 具有左、右极限的间断点称为第一类间断点，否则称为第二类间断点，极限存在的间断点称为可去间断点.

13. 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

14. 邻域 $U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta, \delta>0\}$,

去心邻域 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta, \delta>0\}$.

15. 基本初等函数与初等函数　幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数称为基本初等函数；由常数和基本初等函数经过有限次四则运算及复合而得到的，且可用一个式子表示的函数称为初等函数.

16. 取整函数　设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的取整函数，记为$[x]$.

17. 双曲函数　双曲正弦函数为 $\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$，双曲余弦函数为 $\operatorname{ch}x=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$，双曲正切函数为 $\operatorname{th}x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

(二) 常用结论

1. 若$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

$$\lim[f(x)+g(x)]=A+B,$$
$$\lim[f(x)g(x)]=AB,$$
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0).$$

2. 极限存在准则

Ⅰ 单调有界数列必有极限.

Ⅱ 若 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

注　准则Ⅱ亦称夹逼准则，对于函数也成立.

3. 在同一过程中的有界变量与无穷小的乘积是无穷小；有限个无穷小的和是无穷小.

注　(1) 等价无穷小具有传递性：设 α, β, γ 为同一过程的无穷小，若 $\alpha\sim\beta$, $\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$；

(2) 等价无穷小在求极限过程中可以进行如下替换：在同一极限过程

中，若 $\alpha\sim\tilde{\alpha}$，$\beta\sim\tilde{\beta}$，且 $\lim\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}$ 存在，则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}$.

4. $\lim f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，此处 $\lim\alpha(x)=0$.

5. 两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

6. 若在 $\mathring{U}(x,\delta)$ 内 $f(x)\geqslant 0(f(x)\leqslant 0)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么 $A\geqslant 0$ $(A\leqslant 0)$.

7. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0(A<0)$，则必有 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 使在此邻域中 $f(x)>0(f(x)<0)$.

注 若 $A=f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续，此时结论亦真.

8. 若极限存在，则其值必然唯一.

9. 基本初等函数在其定义域上连续，初等函数在其定义区间上连续.

10. $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在该点必连续，其逆不真.

11. 闭区间上连续函数必然有下列性质：

(1) 有最大值与最小值；

(2) 有界；

(3) 满足介值定理(任取介于最大值与最小值之间的数，必有与之相等的函数值)；

(4) 满足零点定理，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则必有 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

12. 若 $\lim\varphi(x)=0$，则 $\lim\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$.

13. 若 $\lim\varphi(x)=\infty$，则 $\lim\left[1+\frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$.

14. 若 $\lim\varphi(x)=0$，则 $\lim[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$.

注 以上三条中的 $\varphi(x)\neq 0$.

15. $a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

17. 当 $x\to 0$ 时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\mathrm{e}^x-1\sim\ln(1+x)$ $\sim\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$，$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$，

$a^x-1\sim x\ln a\quad (a>0,\ a\neq 1)$.

18. 若

$$\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=\lim A(x)=\lim B(x)=0.$$

且

$$\alpha(x)\sim A(x),\ \beta(x)\sim B(x),$$

则有

$$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{A(x)}{B(x)}$$

和

$$\lim[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\beta(x)}}=\lim[1+A(x)]^{\frac{1}{B(x)}}=e^{\lim\frac{A(x)}{B(x)}}.$$

注 分母 $\beta(x)$，$B(x)$不能取 0.

19. 不为零的无穷小的倒数为无穷大，无穷大的倒数为无穷小.

20. $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n>m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$$

21. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right)^{hx+k}=e^{\frac{(b-c)h}{a}}.$$

22. 在同一极限过程中，若 $f(x)=o(g(x))$，则 $f(x)+g(x)\sim g(x)$.

23. 设 $y=f(x)$是连续函数，则 $y=|f(x)|$也是连续函数.

24. 若 $f(x)$与 $g(x)$都是连续函数，则

$$\varphi(x)=\min\{f(x),\ g(x)\},\ \psi(x)=\max\{f(x),\ g(x)\}$$

也都是连续函数.

25. 若 $\lim u(x)=1$，$\lim v(x)=0$，$v(x)\neq 0$，则

$$\lim u(x)^{\frac{1}{v(x)}}=\exp\lim\frac{u(x)-1}{v(x)}.$$

二、典型例题

(一) 函数简单性态

1. 函数的定义域

【例 1-1】 求 $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}+\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$的定义域.

【解】 由

$$\begin{cases}2+x-x^2\geqslant 0,\\ \left|\lg\dfrac{x}{10}\right|\leqslant 1,\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}(2-x)(1+x)\geqslant 0,\\ -1\leqslant\lg\dfrac{x}{10}\leqslant 1.\end{cases}$$

从$(2-x)(1+x)\geqslant 0$，得

$$-1\leqslant x\leqslant 2;$$

从$-1\leqslant\lg\dfrac{x}{10}\leqslant 1$，得

$$1\leqslant x\leqslant 10^2=100.$$

x 的取值范围，即函数的定义域为$[1,2]$.

【例 1-2】 设 $f(x)$的定义域为$(0,1)$，求 $F(x)=f(x-a)+f(x+a)$ 的定义域$(a>0)$.

【解】 $f(x-a)$的定义域为 $0<x-a<1$，即

$$a<x<1+a,$$

而 $f(x+a)$的定义域为 $0<x+a<1$，即

$$-a<x<1-a,$$

解不等式组

$$\begin{cases}a<x<1+a,\\ -a<x<1-a,\end{cases}$$

得 $a<x<1-a$，此时应有 $a<1-a$，即 $a<\dfrac{1}{2}$.

综上可知，当 $a<\dfrac{1}{2}$时，$F(x)$的定义域为 $x\in(a,1-a)$；而当 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$时，对任何 x，$F(x)$无意义.

2. 函数的求法

【例 1-3】 设 $f(x)$满足关系式

$$2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{x+1}, \qquad ①$$

求 $f(x)$.

【解】 在所给方程中以$\dfrac{1}{x}$替代x，得

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{1+2x}{x+x^2}, \qquad ②$$

以 $x^2\times②-2\times①$，得

$$-3f(x)=\frac{-3x}{x+1},$$

从而 $f(x)=\frac{x}{x+1}$.

【例 1-4】 已知 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

【解】 $f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), & f(x)<0;\\ 1, & f(x)\geqslant 0.\end{cases}$

先求 $f(x)\geqslant 0$ 及 $f(x)<0$ 的区域. 由 $f(x)\geqslant 0$，得 $1+x\geqslant 0$，于是 $x\geqslant -1$；由 $f(x)<0$，得 $1+x<0$，于是 $x<-1$. 所以

$$f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), & x<-1,\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

又当 $x<-1$ 时，$f(x)=1+x$，故

$$f[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x<-1,\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

【例 1-5】 欲做一容积为 $300\mathrm{m}^3$ 的无盖金属圆柱筒，筒底单位造价是筒壁单位造价的 2 倍，给出筒的总造价与半径的函数关系.

【解】 设周围单位造价为 a，则底面单位造价为 $2a$，设底面半径为 r，高为 h，则由已知条件有 $\pi r^2h=300$. 设总造价为 y，则

$$\begin{aligned}y&=2a\pi r^2+a\cdot 2\pi rh=2a\pi r^2+2a\pi r\cdot\frac{300}{\pi r^2}\\&=2a\pi r^2+\frac{600a}{r}\quad r\in(0,+\infty).\end{aligned}$$

【例 1-6】 设 $f(x)=ax^2+bx+2$，且 $f(x+1)-f(x)=2x-1$，求 $f(x)$.

【解】 由 $f(x+1)-f(x)=2x-1$，得

$$a[(x+1)^2-x^2]+b[(x+1)-x]+(2-2)=2x-1,$$

即

$$2ax+(a+b)=2x-1.$$

对比系数，得 $a=1$，$b=-2$，故

$$f(x)=x^2-2x+2.$$

3. 函数的最简单性态

【例 1-7】 证明 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数.

【证】 $f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})$

$$=\log_a\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}},$$

化简后得

$$f(-x)=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x).$$

证毕.

【例 1-8】 证明 $f(x)=2^{x-1}$是单调增加函数.

【证】 取 $h>0$, 有

$$f(x+h)-f(x)=2^{x+h-1}-2^{x-1}=2^{x-1}(2^h-1),$$

故

$$f(x+h)-f(x)>0,$$

即

$$f(x+h)>f(x),\ x+h>x.$$

故 $f(x)=2^{x-1}$是单调增加函数.

【例 1-9】 求 $f(x)=[x]-x+3\left(\frac{x}{3}-\left[\frac{x}{3}\right]\right)$的周期.

【解】 记 $\varphi(x)=[x]-x$, 则

$$\begin{aligned}\varphi(x+1)&=[x+1]-(x+1)=1+[x]-x-1\\&=[x]-x=\varphi(x),\end{aligned}$$

$\varphi(x)$以 1 为周期;

记 $\psi(x)=\frac{x}{3}-\left[\frac{x}{3}\right]$, 则

$$\begin{aligned}\psi(x+3)&=\frac{x+3}{3}-\left[\frac{x+3}{3}\right]=\left(\frac{x}{3}+1\right)-\left[\frac{x}{3}+1\right]\\&=\frac{x}{3}+1-\left[\frac{x}{3}\right]-1=\frac{x}{3}-\left[\frac{x}{3}\right]=\psi(x),\end{aligned}$$

$\psi(x)$以 3 为周期, 则

$$f(x)=[x]-x+3\left(\frac{x}{3}-\left[\frac{x}{3}\right]\right)$$

必以 3 为周期.

（二）函数的连续性

1．函数间断点的判定

【例 1-10】 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$ 的间断点类型．

【解】 当 $x=1$ 时，函数无定义，当 $x=0$ 时，函数也无定义，而函数在 $x=0$，$x=1$ 附近有定义．故 $x=0$，$x=1$ 是函数的间断点．有

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}=+\infty,$$

则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，属于第二类间断点；

$$\lim_{x\to1+0} f(x)=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}=0,$$

$$\lim_{x\to1-0} f(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}=1,$$

则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点，属于第一类间断点．

【例 1-11】 求函数

$$f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\leqslant1,\\ |x-1|, & |x|>1\end{cases}$$

的连续区间．

【解】 $\displaystyle\lim_{x\to-1-0} f(x)=\lim_{x\to-1-0}|x-1|=2,$

$$\lim_{x\to-1+0} f(x)=\lim_{x\to-1+0}\cos\frac{\pi x}{2}=0,$$

则 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点．

$$\lim_{x\to1-0} f(x)=\lim_{x\to1-0}\cos\frac{\pi x}{2}=0,$$

$$\lim_{x\to1+0} f(x)=\lim_{x\to1+0}|x-1|=0,$$

$$f(1)=\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续．连续区间是 $(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ +\infty)$．

【例 1-12】 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的间断

点类型.

【解】 $f(x)=\exp\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}-1\right)\cdot\dfrac{x}{\sin t-\sin x}$

$$=\exp\lim_{t\to x}\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\cdot\frac{x}{\sin t-\sin x}=e^{\frac{x}{\sin x}},$$

$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e,$

则 $x=0$ 是 $f(x)$的可去间断点，属于第一类间断点.

2. 利用连续性确定常数

【例 1-13】 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)}, & x\neq 1,\ x\neq -2,\\ 2, & x=1\end{cases}$$

在 $x=1$ 处连续，试求 a，b 的值.

【解】 $f(x)$在 $x=1$ 处连续，必有$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$，即

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+ax+b}{x^2-x-2}=2,$$

而

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+ax+b}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{4x^3+a}{2x+1}=\frac{4+a}{3}=2,$$

即 $a=2$.

又必有$\lim\limits_{x\to 1}(x^4+2x+b)=0$，故 $b=-3$.

总之，当 $a=2$，$b=-3$ 时，$f(x)$在 $x=1$ 处连续.

【例 1-14】 设

$$f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ e^{x}+\beta, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

试讨论 $f(x)$在 $x=0$ 处的连续性.

【解】 $f(0)=1+\beta$，$\lim\limits_{x\to +0}f(x)=\lim\limits_{x\to +0}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}$

此极限值当 $\alpha>0$ 时为 0，当 $\alpha\leqslant 0$ 时不存在．故 $\alpha>0$，$\beta=-1$ 时，$f(x)$在 $x=0$处连续；当 $\alpha>0$，$\beta\neq -1$ 时，$x=0$ 为 $f(x)$的跳跃间断点；当 $\alpha\leqslant 0$，β 为任意实数时，$x=0$ 为 $f(x)$的振荡间断点.