

修正課程標準適用

高中甲組代數學

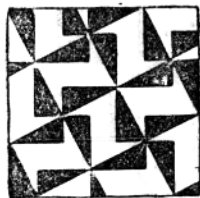
第三冊

編者 余介石

中華書局印行

解析幾何學

與分析學



▶ 新課程標準適用 ◀

高中解析幾何學 黃泰編 原售八角 改售六角四分

高中解析幾何學習題解答 丘侃編 原售一元六角 改售一元二角八分

▶ 高級中學適用 ◀

解析幾何學 黃泰編 原售九角 改售七角

新中解析幾何學 余恆編 原售九角 改售七角

▶ 新標準師範·鄉師適用 ◀

解析幾何學 雷琛編 六角

微積分學初步

李儼著

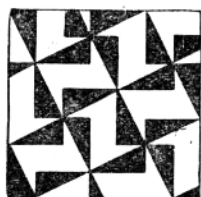
原售四角五分 改售四角

微分學

段子變何魯編著

原售一元 改售九角

中華書局出版



幾何學

- 幾何作圖題解法及其原理(中等算學研究) Juluis Petersen著 余介石譯
會叢書之一 原售五角五分 改售五角
- 幾何表解(初中學生文庫本) 孫樂陶編 原售二角五分 改售二角
- 幾何學問題解法研究(初中學生文庫本) 郝樸銀編 原售四角 改售三角二分
- 平面幾何學問題解法指導(初中學生文庫本) 匡文濤編 原售四角 改售三角二分
- 三S平面幾何學 仲光然 嚴幼芝譯 原售一元七角 改售一元三角六分
Schultze-Sevenoak-Schuyler: Plane Geometry
- 三S平面幾何學習題詳解 朱文燕著 二册 原售一元六角 改售一元二角八分
徐有吾譯 二元二角 改售一元七角六分
- 三S立體幾何學 仲光然 嚴幼芝譯 原售九角 改售七角二分
Schultze-Sevenoak-Schuyler: Solid Geometry
- 立體幾何學問題解法指導 匡文濤編 實售二角五分
- 新課程標準適用初中幾何 徐子豪 余介石編 二册 普及本 實售各四角
胡術五 道林紙本 原售各七角 改售各五角六分
- 新課程標準適用幾何習題解答(附數值) 胡萍孫編 二册 原售各二角五分 改售各二角
陳伯琴 (三角)
- 新中華初級中學幾何教本 張鵬飛編 二册 原售各七角 改售各五角五分
- 新中學初級幾何學 吳在淵編 精裝 原售一元 改售八角
並裝 原售七角 改售五角五分
- 新中學幾何學 胡敦復編 精裝 原售一元 改售八角
吳在淵編 並裝 原售七角 改售五角五分
- 修正課程標準適用高中平面幾何學 余介石編 實售二角五分
- 新中學幾何學習題詳解 張鵬飛編 精裝 原售一元八角 改售一元四角
- 新課程標準適用高級中學幾何學教科書 吳在淵編 二册 原售一元三角 改售一元〇四分
徐有吾譯 原售八角 改售六角四分
- 高級新中學幾何學 胡敦復編 精裝 原售一元六角 改售一元二角

*** 中華書局發行 ***

(大學用書之一)

代數方程式論

黃緣芳譯 精裝實售一元

L. E. Dickson: Introduction to the Theory of Algebraic Equations

本書分上下二篇：上篇論 Lamrange-Cauchy-Abel 諸氏之普通代數方程式論；下篇則論列 Galois 氏之代數方程式論。凡如何用代數解及如何用羣解方程式，以及五次以上方程式不能利用有理或無理豫解式之助解等問題，無不詳為論述。且敘述力求淺顯，立言皆從初等代數出發，不牽連及算學上其他各門類。並附有例解及初等習題甚多，以資讀者練習。

倪德基譯

方 程 式 論

原售一元一角
改售一元二角五分

(算學叢書之一)

Florian Cajori 著

著者本多年研究之心得，採數十名家之精華，輯為本書。選材豐富審慎，說理淺顯條暢。論方程式之性質也，由淺而深；述方程式之解法也，由簡而繁；不變式與協變式，化法難而不切實用則刪除之；置換法置換羣及有理範圍，應用廣而領悟不易則詳論之；葛羅華 (Galois) 之理論，其理艱深，則多設例題以明之；霍納 (Horner) 牛頓 (Newton) 之近似法，其法便利則採用之。凡已習初等代數、幾何、三角及解析幾何，而欲進習高等算學者，是殆不可不讀此書。

中 華 書 局 出 版



三角學

課本和題解

三角表解 (初中學生) 張鵬飛編 ----- 原售一角五分
文庫本 改售一角二分

平面三角法問題解法指導 (初中學生) 匡文濤編 原售二角
文庫本 改售一角五分

► 新課程標準適用 ◀

初中三角 張鵬飛編 ----- 普及本 原售二角
道林紙本 實售二角五分

高中三角學 余介石編 ----- 原售九角五分
 改售七角六分

高中三角學習題解答 范際平編 ----- 原售三角
 李修睦 改售二角四分

高中三角法教科書 王邦珍編 ----- 原售七角
 改售五角六分

► 新中學教科書 ◀

平面三角 胡仁源編 ----- 精裝原售八角 改售六角
 張鵬飛 並裝 五角 四角

平面三角習題詳解 張鵬飛編 ----- 精裝 原售八角
 改售六角

* * * *

新標準 師範適用 幾何及三角 余光煥等編 ----- 實售一元
鄉村師範

中華書局出版

高中甲組代數學第三冊

目 次

頁數	頁數
第十二章	
指 數 函 數	
141. 指數意義的推廣……299	151. 對數和記號……308
142. 分指數……299	152. 對數函數的圖解……309
143. 零指數……300	習題六十二……309
144. 負指數……300	153. 定位部和定值部……310
145. 廣義指數的效用……301	154. 定位部求法……310
習題五十九……301	155. 定值部求法……311
146. 新指數和舊定律……301	156. 真數對數的互求……312
147. 無理指數……303	習題六十三……314
148. 指數函數的圖解……303	157. 對數的特性……314
習題六十……304	158. 餘對數……315
149. 曲線上面重要的	159. 對數的運用……316
一段……304	160. 負數的計算……318
150. 計算上應用……306	習題六十四……318
習題六十一……308	161. 圖形對數表……321
	162. 對數尺、算尺……322
	163. 換底法……323

習題六十五	323	級數	347
164. 超函數	324	習題七十	319
165. 超性方程式	324	178. 年金的計算	350
166. 複利計算題	327	179. 其他實用題	351
習題六十六	329	習題七十一	353
第十二章摘要	331	180. 二項式定理	354
第十三章		181. 二項式定理的普 通項	355
級數		182. 算學歸納法	356
167. 級列數	332	183. 二項式定理證明	357
168. 等差級數	333	習題七十二	359
169. 等差級數的要件	333	184. 無窮連級數	360
170. 要件間關係	333	185. 二項連級數	360
171. 解答的限制	335	186. 自然對數的底 e	362
172. 等差中項插入法	336	習題七十三	363
習題六十七	336	187. 對數連級數	364
173. 高級等差級數	338	188. 模數的求法	364
174. 調和級數	340	189. 常用對數的求法	366
習題六十八	341	190. 補算法原理	366
175. 等比級數	342	習題七十四	367
176. 要件的關係	343	第十三章摘要	368
習題六十九	345	第十四章	
177. 無窮項遞減等比			

排配分析,或然率	習題七十八.....388
191. 本章研究的問題...370	205. 重複的試驗.....389
192. 基本問題同原則...370	206. 原因或然率.....391
193. 求 ${}_nP_r$ 法.....372	習題七十九.....391
194. 關於排列的問題...372	207. 經驗或然率.....392
習題七十五.....373	208. 生命年金的現價...394
195. 物件不盡相異的 排列.....374	209. 人壽保險費.....395
196. 求 ${}_nC_r$ 法.....376	習題八十.....397
197. 關於配合的定理 376	第十四章摘要.....397
198. 重複配合法.....378	附 表
199. 實際的例題.....379	一. 四位對數表
習題七十六.....380	二. 圖形四位對數表
200. 或然率.....381	三款額 1 的複利表
201. 近真出現數.....383	四. 款額 1 的複利現價 表
202. 算學的期望.....383	五. 款額 1 的年金表
習題七十七.....384	六. 款額 1 的年金現價 表
203. 複合或然率,乘法 定理.....384	七. 美國經驗生沒表
204. 完全或然率,加法 定理.....386	八. 聚積記號數值表 中西名詞對照表

第 十 二 章

指 數 函 數

141. 指數意義的推廣 以前所說的指數,以正整數爲限,因爲指數是表示相等因式連乘積內因式的個數,但爲便利計算同推展理論起見,實有將指數意義推廣的必要,推廣後,指數才能一般的存在,而爲效用最宏的利器.

本書一再的說過,凡算理的推廣,都應以公律常住性爲原則,現在從正整數指數推廣到分指數,負指數,無理指數,也要使得新指數的算法,能合於§4的指數定律.

142. 分指數 就特例 $a^{\frac{1}{2}}$ 說,要規定他的意義,合於同底乘法定律,應有 $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^1 = a$.可見必須規定 $a^{\frac{1}{2}}$ 爲 \sqrt{a} 或 $-\sqrt{a}$,再參照主根的限制(§9注意二(二)),應令 $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

同理應規定 $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

依着這種規定,根式化約律 1-4 (§125) 便可寫做

$$1. a^{m/n} = a^{m/n}, \quad 2. \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{1}{m}}.$$

$$3. \left(r^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}. \quad 4. \left(ab\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}.$$

可見分指數保持分數原有的性質,並且根式乘法定律和同指數乘法定律,形式一致.

【例】 $a^{6/8} = a^{3/4} = a^{12/16}$, $a^{6/3} = a^2 = a^{4/2}$.

【註】爲避免虛數方根的複雜情形起見,此後遇 a^m 時,除有特別聲明以外,總是假設 $a > 0$.

143. 零指數 仍爲同底乘法定律能推行無礙計,應有

$$a^0 a^m = a^{0+m} = a^m.$$

$$\therefore a^0 = a^m / a^m = 1.$$

所以應當規定 $a^0 = 1$ (參看 §16 註).

一個數的任何乘方,都與這數本身有關,只有零次乘方總是 1,不論這數是怎樣大小,這層性質,很爲奇特,值得我們注意.

144. 負指數 由零指數的規定,并爲同底乘法定律常住性起見,應該令 $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

如此才能使 $a^{-m} \cdot a^m = a^{-m+m} = a^0 = 1$.

負指數如此規定以後,同底除法定律便可寫做

$$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

將原來的兩種情形化成一種形式,並且這定律還可歸入同底乘法定律裏去.

又根式化約律 5, 可寫做同指數乘法定律的形式 $(ab^{-1})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{-\frac{1}{n}}$.

145. 廣義指數的效用 根式的化約律, 都可化爲相當的新指數表示式, 意義較爲顯明, 所以根式的運算, 也以化爲新指數再算爲便.

$$\begin{aligned} \text{【例一】 } \sqrt[5]{(\sqrt{32x^{10}})^3} &= \left\{ \left[(2^5 x^{10})^{\frac{1}{2}} \right]^3 \right\}^{\frac{1}{5}} = (2^5 x^{10})^{\frac{3}{10}} = 2^{\frac{3}{2}} x^3 \\ &= 2^{1\frac{1}{2}} x^3 = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} x^3 = 2\sqrt{2} x^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{【例二】 } \sqrt[3]{16x^5y^6} &= (2^4 x^5 y^6)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} x^{\frac{5}{3}} y^{\frac{6}{3}} = 2^{1\frac{1}{3}} x^{\frac{5}{3}} y^2 \\ &= 2xy^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} = 2xy^2 \cdot \sqrt[3]{2x^2}. \end{aligned}$$

$$\text{【例三】 } \sqrt[5]{\frac{a^6 b}{4c^3}} = \left(\frac{a^6 b}{2^2 c^3} \right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{2^3 a^6 b c^2}{2^5 c^5} \right)^{\frac{1}{5}} = \frac{a}{2c} \cdot \sqrt[5]{8abc^2}$$

$$\begin{aligned} \text{【例四】 } \sqrt[3]{a^2 b^4 c^8} \cdot \sqrt{a^3 b^5 c^3} &= a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}} b^{\frac{4}{3}+\frac{5}{2}} c^{\frac{8}{3}+\frac{3}{2}} = a^{\frac{13}{6}} b^{\frac{23}{6}} c^{\frac{25}{6}} \\ &= a^{\frac{2}{6}} b^{\frac{3}{6}} c^{\frac{4}{6}} \cdot a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{3}{6}} c^{\frac{1}{6}} = a^2 b^3 c^4 \cdot \sqrt[6]{ab^5c} \end{aligned}$$

$$\text{【例五】 } 6\sqrt{xy} / 2\sqrt[4]{xy} = 3 \cdot x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 3x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} = 3\sqrt[4]{xy}$$

【註】上面的例子, 已在 §§125—127 裏演過, 可以比較

習題五十九

用 §144 的方法演算習題五十四內各題

146. 新指數和舊定律 在上面幾節裏, 已可就例題內看出新指數能合符原有的指數定

律.換句話說,就是分指數,負指數也和正整指數性質一樣.現在再來正式加以證明.

(一) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, m, n 是任何有理數.

證 設 p, q, r, s 是正整數.

(1) 如 $m = p/q, n = r/s$.

$$\begin{aligned} a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} &= \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} \quad (\text{分指數定義}) \\ &= \sqrt[qs]{a^{ps}} \cdot \sqrt[qs]{a^{qr}} \quad (\S 125, 1; \S 127) \\ &= \sqrt[qs]{a^{ps+qr}} \quad (\text{指數定律(五)(一)}) \\ &= a^{\frac{ps+qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}} \quad (\text{分指數定義}). \end{aligned}$$

(2) 如 $m = -p/q, n = -r/s$.

$$a^{-\frac{p}{q}} \cdot a^{-\frac{r}{s}} = 1/a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{r}{s}} = 1/a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}} = a^{-\frac{p}{q} + (-\frac{r}{s})}.$$

(3) 如 $m = p/q, n = -r/s$.

$$\begin{aligned} a^{p/q} a^{-r/s} &= \sqrt[q]{a^p} / \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}} / \sqrt[qs]{a^{qr}} \\ &= \sqrt[qs]{a^{ps-qr}} = a^{\frac{ps-qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q} + (-\frac{r}{s})}. \end{aligned}$$

(4) 如 $m = -p/q, n = r/s$. 證法同(3).

(二) $(a^m)^n = a^{mn}$, m, n 是任何有理數.

證 設 m 為任何有理數.

(1) 如 n 是正整數,

$$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdots (n \text{ 個因式}) = a^{m+m+\cdots+\text{共}n\text{項}} = a^{mn}.$$

(2) 如 $n = p/q, p, q$ 是正整數,

$$(a^m)^{p/q} = \sqrt[q]{(a^m)^p} = \sqrt[q]{a^{mp}} = a^{mp/q} = a^{m \cdot \frac{p}{q}}.$$

(3) 如 $n = -s$, s 是正有理數,

$$(a^m)^{-s} = 1/(a^m)^s = 1/a^{ms} = a^{-ms} = a^{m(-s)}.$$

(三) $(ab)^n = a^n b^n$, n 是任何有理數.

證 (1) 如 $n = p/q$, p, q 是正整數,

$$\begin{aligned} (ab)^{p/q} &= \sqrt[q]{(ab)^p} = \sqrt[q]{a^p b^p} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} \\ &= a^{p/q} \cdot b^{p/q}. \end{aligned}$$

(2) 如 $n = -s$, s 是正有理數.

$$(ab)^{-s} = 1/(ab)^s = 1/a^s b^s = a^{-s} b^{-s}.$$

147. 無理指數 無理指數的意義須用極限來說明.

例如 $3^{\sqrt{2}}$ 便是 $3^1, 3^{1.4} = 3^{\frac{14}{10}} = \sqrt[10]{3^{14}}$,

$3^{1.41} = 3^{\frac{141}{100}} = \sqrt[100]{3^{141}}, 3^{1.414}, \dots$ 等值所趨的極限.

【註】就理論上說,我們應當證明這種極限的存在.

無理指數的意義既然有了規定,還可證明他們也合於指數定律.這層和上面所說的極限有無一問題,都要先了解極限運算,才能明白,本書不能講到,只好作為一種假設.

148. 指數函數的圖解 現在取特例 $y = 10^x$ 來研究,

(一) $x > 1, y > 10; 1 > x > 0,$
 $10 > y > 1; x = 0, y = 1; 0 > x, y < 1;$
 $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow 0.$

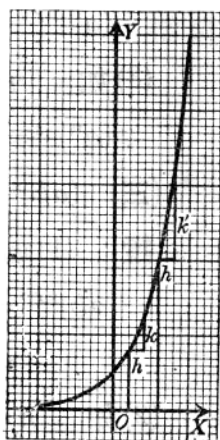
(二) x 的數值增加, y 的也增加, 即曲線常向右上升。

(三) 如 x 增加一個正值 h , y 所增加的正值是 k , 即

$$y + k = 10^{x+h} = 10^x 10^h,$$

$$\therefore k = 10^x(10^h - 1).$$

可見對於同一的 h 值, 在 x 值大時, k 值也大, 就是說曲線在愈右的地方, 上升愈快。



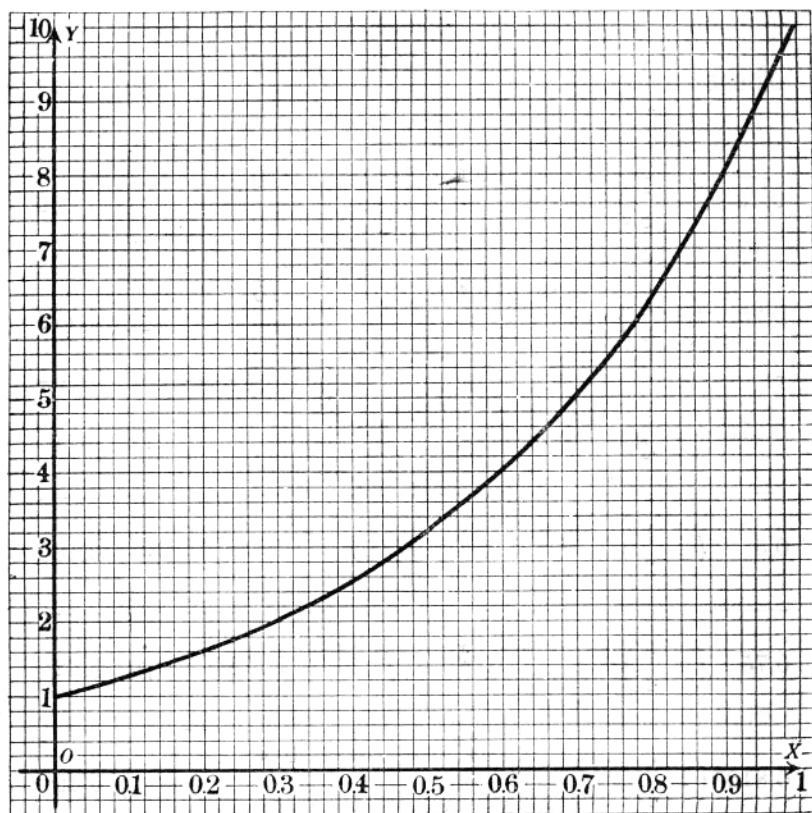
習題六十

1. 如無理指數意義未定, 能作指數函數的曲線麼?
2. 討論 $y = 1^x, y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ 的圖解性質, 并作略圖。

149. 曲線上面重要的一段 x 自 0 到 1 的一段曲線, 很為重要, 現在算出對應值, 再作圖如下:

x	算	法	次序	y
0	$10^0 = 1$			1.000

$0.0625 \left(= \frac{1}{16} \right)$	$10^{\frac{1}{16}} = \sqrt[16]{10} = \sqrt{\sqrt[8]{10}}$ $= \sqrt{1.333}$	(四)	1.154
$0.125 \left(= \frac{1}{8} \right)$	$10^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{10} = \sqrt{\sqrt[4]{10}}$ $= \sqrt{1.778}$	(三)	1.333
$0.25 \left(= \frac{1}{4} \right)$	$10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10} = \sqrt{\sqrt{10}}$ $= \sqrt{3.162}$	(二)	1.778
$0.375 \left(= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right)$	$10^{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = 10^{\frac{1}{4}} \cdot 10^{\frac{1}{8}}$ $= 1.778 \times 1.333$	(四)	2.37
$0.5 \left(= \frac{1}{2} \right)$	$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$	(一)	3.162
$0.75 \left(= \frac{3}{4} \right)$	$10^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{10})^3 = (1.778)^3$	(四)	5.62
$0.8125 \left(= \frac{3}{4} + \frac{1}{16} \right)$	$10^{\frac{3}{4} + \frac{1}{16}} = 10^{\frac{3}{4}} \cdot 10^{\frac{1}{16}}$ $= 5.62 \times 1.154$	(五)	6.49
$0.875 \left(= \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \right)$	$10^{\frac{3}{4} + \frac{1}{8}} = 10^{\frac{3}{4}} \cdot 10^{\frac{1}{8}}$ $= 5.62 \times 1.333$	(五)	7.49
$0.9375 \left(= \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right)$	$10^{\frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} = 10^{\frac{3}{4} + \frac{1}{8}} \cdot 10^{\frac{1}{16}}$ $= 7.49 \times 1.154$	(六)	8.65



從上圖又可讀出各組相當值如下：

x	0	0.30	0.48	0.60+	0.70-	0.78	0.85	0.90+	0.95	1
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

就是已知 y 的值,也可讀出相當的 x 值來。

150. 計算上應用 上節所列的圖解,對於計算問題,有許多應用舉例如下: