修正課程標準適用

高中甲組代數學

第三冊

編者　余介石

中華書局印行

中1821〔全〕26,4.

中1918〔仝〕26,5-

修正課程標準適用

高中甲組代數學第三冊

目次

第十三章

級數

第十四章

第十二章

指數函數

141. 指數意義的推廣　以前所說的指數,以正整數爲限.因爲指數是表示相等因式連乘積內因式的個數.但爲便利計算同推展理論起見,實有將指數意義推廣的必要.推廣後,指數才能一般的存在,而爲效用最宏的利器.

本書一再的說過,凡算理的推廣,都應以公律常住性爲原則.現在從正整數指數推廣到分指數,負指數,無理指數,也要使得新指數的算法,能合於§4的指數定律.

142. 分指數　就特例 $a^{\frac{1}{2}}$ 說,要規定他的意義,合於同底乘法定律,應有 $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a.$ 可見必須規定 $a^{\frac{1}{2}}$ 爲 $\sqrt{a}$ 或 $-\sqrt{a}$,再參照主根的限制(§9 注意二(二)),應令 $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$.

同理應規定　$$a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}.$$

依着這種規定,根式化約律 1－4(§125) 便可寫做

$$1.\ a^{m/n}=a^{mk/nk}.\qquad 2.\ \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}.$$

$$3.\ \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}.\qquad 4.\ \left(ab\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}.$$

可見分指數保持分數原有的性質,并且根式乘法定律和同指數乘法定律,形式一致.

【例】$a^{6/8}=a^{3/4}=a^{12/16}$, $a^{6/3}=a^2=a^{4/2}$.

【註】為避免虛數方根的複雜情形起見,此後遇a^m時,除有特別聲明以外,總是假設$a>0$.

143. 零指數　仍為同底乘法定律能推行無礙計,應有　$a^0a^m=a^{0+m}=a^m$.

$$\therefore\qquad a^0=a^m/a^m=1.$$

所以應當規定$\boldsymbol{a^0=1}$(參看§16註).

一個數的任何乘方,都與這數本身有關.只有零次乘方總是1,不論這數是怎樣大小.這層性質,很為奇特,值得我們注意.

144. 負指數　由零指數的規定,并為同底乘法定律常住性起見,應該令 $\boldsymbol{a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}}$.

如此才能使　$a^{-m}\cdot a^m=a^{-m+m}=a^0=1$.

負指數如此規定以後,同底除法定律便可寫做　$a^m\div a^n=a^{m-n}$.

將原來的兩種情形,化成一種形式,并且這定律還可歸入同底乘法定律裏去.

又根式化約律 5,可寫做同指數乘法定律的形式　$\left(ab^{-1}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{-\frac{1}{n}}$.

145. 廣義指數的效用　根式的化約律,都可化為相當的新指數表示式,意義較為顯明,所以根式的運算,也以化為新指數再算為便.

【例一】 $\sqrt[5]{(\sqrt{32x^{10}})^3}=\left\{\left[(2^5x^{10})^{\frac{1}{2}}\right]^3\right\}^{\frac{1}{5}}=(2^5x^{10})^{\frac{3}{10}}=2^{\frac{3}{2}}x^3$

$$=2^{1\frac{1}{2}}x^3=2\cdot2^{\frac{1}{2}}x^3=2\sqrt{2}\,x^3.$$

【例二】 $\sqrt[3]{16x^5y^6}=(2^4x^5y^6)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{6}{3}}=2^{1\frac{1}{3}}x^{1\frac{2}{3}}y^2$

$$=2xy^2\cdot2^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}=2xy^2\cdot\sqrt[3]{2x^2}.$$

【例三】 $\sqrt[5]{\dfrac{a^6b}{4c^3}}=\left(\dfrac{a^6b}{2^2c^3}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(\dfrac{2^3a^6bc^2}{2^5c^5}\right)^{\frac{1}{5}}=\dfrac{a}{2c}\cdot\sqrt[5]{8abc^2}$

【例四】 $\sqrt[3]{a^2b^4c^8}\cdot\sqrt{a^3b^5c^3}=a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}b^{\frac{4}{3}+\frac{5}{2}}c^{\frac{8}{3}+\frac{3}{2}}=a^{\frac{13}{6}}b^{\frac{23}{6}}c^{\frac{25}{6}}$

$$=a^{2\frac{1}{6}}b^{3\frac{5}{6}}c^{4\frac{1}{6}}=a^2b^3c^4\cdot\sqrt[6]{ab^5c}$$

【例五】 $6\sqrt{xy}/2\sqrt[4]{xy}=3\cdot x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}=3\sqrt[4]{xy}$

【註】上面的例子,已在§§125—127裏演過,可以比較

習題五十九

用§144的方法演算習題五十四內各題

146. 新指數和舊定律　在上面幾節裏,已可就例題內看出新指數能合符原有的指數定

律.換句話說,就是分指數,負指數也和正整指數性質一樣.現在再來正式加以證明.

(一) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$,m,n 是任何有理數.

證 設 p,q,r,s 是正整數.

(1) 如 $m=p/q,\quad n=r/s.$

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[s]{a^r}\quad(\text{分指數定義})$$
$$=\sqrt[qs]{a^{ps}}\cdot\sqrt[qs]{a^{qr}}(\S125,1;\S127)$$
$$=\sqrt[qs]{a^{ps+qr}}(\text{指數定律(五)(一)})$$
$$=a^{\frac{ps+qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}(\text{分指數定義}).$$

(2) 如 $m=-p/q,\quad n=-r/s.$

$$a^{-\frac{p}{q}}\cdot a^{-\frac{r}{s}}=1/a^{\frac{p}{q}}a^{\frac{r}{s}}=1/a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}=a^{-\frac{p}{q}+\left(-\frac{r}{s}\right)}.$$

(3) 如 $m=p/q,\quad n=-r/s.$

$$a^{p/q}a^{-r/s}=\sqrt[q]{a^p}/\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[qs]{a^{ps}}/\sqrt[qs]{a^{qr}}$$
$$=\sqrt[qs]{a^{ps-qr}}=a^{\frac{ps-qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\left(-\frac{r}{s}\right)}.$$

(4) 如 $m=-p/q,n=r/s.$ 證法同(3).

(二) $(a^m)^n=a^{mn}$, m,n 是任何有理數.

證 設 m 爲任何有理數.

(1) 如 n 是正整數,

$$(a^m)^n=a^m\cdot a^m\cdots(n\text{個因式})=a^{m+m+\cdots\text{共}n\text{項}}=a^{mn}.$$

(2) 如 $n=p/q$, p,q 是正整數,

$$(a^m)^{p/q}=\sqrt[q]{(a^m)^p}=\sqrt[q]{a^{mp}}=a^{mp/q}=a^{m\cdot\frac{p}{q}}.$$

(3) 如 $n=-s$, s 是正有理數,

$$(a^m)^{-s}=1/(a^m)^s=1/a^{ms}=a^{-ms}=a^{m(-s)}.$$

(三) $(ab)^n=a^nb^n$, n 是任何有理數.

證 (1) 如 $n=p/q$, p, q 是正整數,

$$(ab)^{p/q}=\sqrt[q]{(ab)^p}=\sqrt[q]{a^pb^p}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[q]{b^p}$$
$$=a^{p/q}\cdot b^{p/q}.$$

(2) 如 $n=-s$, s 是正有理數.

$$(ab)^{-s}=1/(ab)^s=1/a^sb^s=a^{-s}b^{-s}.$$

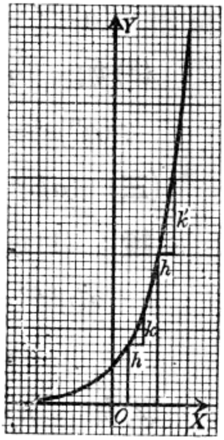
147. 無理指數 無理指數的意義,須用極限來說明.

例如 $3^{\sqrt{2}}$ 便是 3^1, $3^{1.4}=3^{\frac{14}{10}}=\sqrt[10]{3^{14}}$,
$3^{1.41}=3^{\frac{141}{100}}=\sqrt[100]{3^{141}}$, $3^{1.414}$....等值所趨的極限.

【註】就理論上說,我們應當證明這種極限的存在.

無理指數的意義既然有了規定,還可證明他們**也合於指數定律**.這層和上面所說的極限有無一問題,都要先了解極限運算,才能明白,本書不能講到,只好作爲一種假設.

148. 指數函數的圖解 現在取特例 $y=10^x$ 來研究,



（一）$x>1,\ y>10;\ 1>x>0,\ 10>y>1;\ x=0,\ y=1;\ 0>x,\ y<1;\ x\to-\infty,\ y\to0$。

（二）x 的數值增加，y 的也增加，即曲線常向右上升。

（三）如 x 增加一個正值 h，y 所增加的正值是 k，即

$$y+k=10^{x+h}=10^{x}10^{h},$$

$$\therefore\qquad k=10^{x}(10^{h}-1).$$

可見對於同一的 h 值，在 x 值大時，k 值也大，就是說曲線在愈右的地方，上升愈快。

習題六十

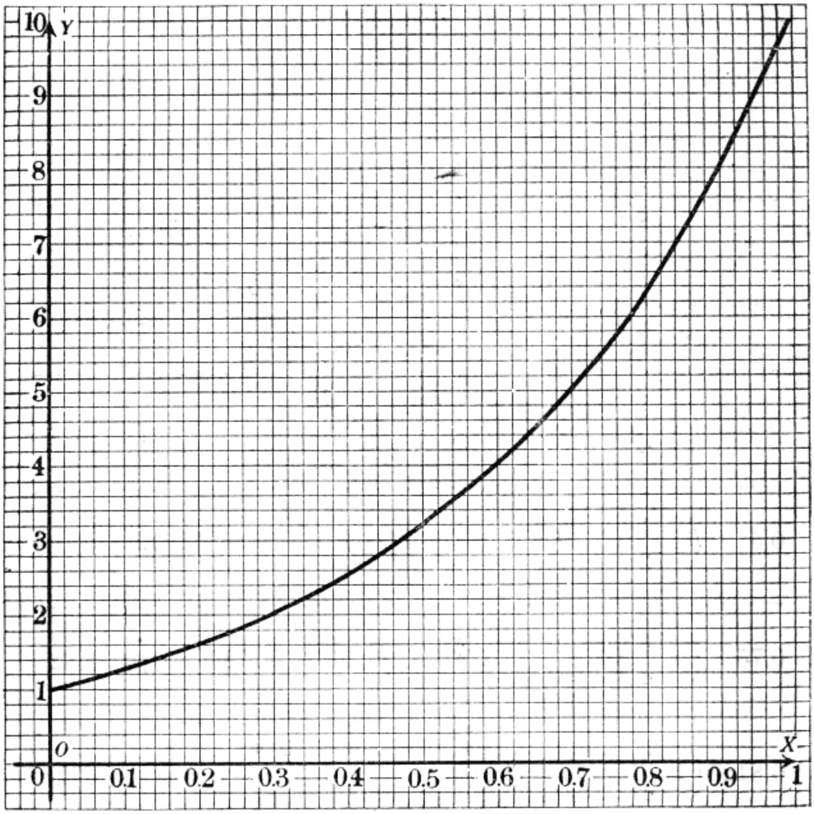
1. 如無理指數意義未定，能作指數函數的曲線麼？

2. 討論 $y=1^{x}$，$y=\left(\frac{1}{10}\right)^{x}$ 的圖解性質，并作略圖。

149. <u>曲線上面重要的一段</u>　x 自 0 到 1 的一段曲線，很爲重要。現在算出對應值，再作圖如下：

x	算　　　法	次序	y
0	$10^{0}=1$		1.000

$0.0625\left(=\frac{1}{16}\right)$	$10^{\frac{1}{16}}=\sqrt[16]{10}=\sqrt{\sqrt[8]{10}}$ $=\sqrt{1.333}$	(四)	1.154
$0.125\ \left(=\frac{1}{8}\right)$	$10^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{10}=\sqrt{\sqrt[4]{10}}$ $=\sqrt{1.778}$	(三)	1.333
$0.25\ \left(=\frac{1}{4}\right)$	$10^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{10}=\sqrt{\sqrt{10}}$ $=\sqrt{3.162}$	(二)	1.778
$0.375\ \left(=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)$	$10^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=10^{\frac{1}{4}}\cdot 10^{\frac{1}{8}}$ $=1.778\times 1.333$	(四)	2.37
$0.5\ \left(=\frac{1}{2}\right)$	$10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$	(一)	3.162
$0.75\ \left(=\frac{3}{4}\right)$	$10^{\frac{3}{4}}=(\sqrt[4]{10})^3=(1.778)^3$	(四)	5.62
$0.8125\left(=\frac{3}{4}+\frac{1}{16}\right)$	$10^{\frac{3}{4}+\frac{1}{16}}=10^{\frac{3}{4}}\cdot 10^{\frac{1}{16}}$ $=5.62\times 1.154$	(五)	6.49
$0.875\ \left(=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\right)$	$10^{\frac{3}{4}+\frac{1}{8}}=10^{\frac{3}{4}}\cdot 10^{\frac{1}{8}}$ $=5.62\times 1.333$	(五)	7.49
$0.9375\left(=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)$	$10^{\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}=10^{\frac{3}{4}+\frac{1}{8}}\cdot 10^{\frac{1}{16}}$ $=7.49\times 1.154$	(六)	8.65



從上圖又可讀出各組相當值如下:

x	0	0.30	0.48	0.60^+	0.70^-	0.78	0.85	0.90^+	0.95	1
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

就是已知 y 的值,也可讀出相當的 x 值來.

150. <u>計算上應用</u>　上節所列的圖解,對於計算問題,有許多應用舉例如下: