



全国高等农林院校“十一五”规划教材

概率论 与数理统计

The probability and statistics

王玉民 杜晓林 主编

 中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

概率论与数理统计

The probability and statistics

王玉民 杜晓林 主编

中国农业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

概率论与数理统计 / 王玉民, 杜晓林主编. —北京: 中国农业出版社, 2008. 12

全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-109-13113-2

I. 概… II. ①王…②杜… III. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 175729 号

中国农业出版社出版

(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)

(邮政编码 100125)

责任编辑 朱 雷 段 炼

北京中兴印刷有限公司印刷 新华书店北京发行所发行

2009 年 1 月第 1 版 2009 年 1 月北京第 1 次印刷

开本: 820mm×1080mm 1/16 印张: 18

字数: 430 千字

定价: 28.00 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

内容提要

□□□□□□□□□□□□□□

本书内容主要包括随机事件与概率、条件概率与事件的独立性、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、样本及其分布、参数估计、统计假设检验、方差分析和回归分析等。各章节均配有习题，每章也配有阶段测试题，最后还配有综合测试题，并附有参考答案。

本书可作为高等农林院校概率论与数理统计课程的教材，也可作为工科、经济和师范类院校的教学参考书。

编写组成员

主 编 王玉民 杜晓林
副主编 赵翠萍 白荣凤 张海燕 于景华
参 编 侯首萍 王学会 梁宏英 张俊芳
颜亭玉 孔素然

前 言

概率论与数理统计是定量研究随机现象规律性（即统计规律）的数学学科。概率论侧重于对随机现象及其规律给出规范定义并进行基本理论研究，数理统计侧重于从实验数据出发认识随机现象的统计规律。随着科学技术的发展，概率论特别是数理统计已广泛应用于工业、农业、物理、化学、生物、医学及社会科学等各个领域，概率论的思想和数理统计方法越来越广泛地被人们所采用。

多年来，国内外出版了大量的概率论与数理统计的教材和专著，它们各具特色，也有所创新。但高等农林院校本科生教学计划中数学学时，特别是用于高等数学的教学学时较少，学生微积分基础相对较弱，更需要编写一本适合农林院校各专业教学计划和学生知识结构的、比较“传统”的概率论与数理统计教材，以适应高校“扩招”后数学教学的需要。

概率论与数理统计是一门概念比较抽象、计算比较繁杂、学起来比较困难的数学课程。学生在学习该课程时，需要正确理解它的基本概念、深刻领会它的基本原理，熟练掌握和运用它的基本方法。

编者具有多年概率论与数理统计教学经验，力图在本书中把概念讲得清晰，例题讲解循序渐进，把来龙去脉解释清楚，删去较长的理论证明，尽量多作直观解释。增加大量典型例题和习题，有助于学生理解基本概念和基本原理，掌握解题的基本技能。

在教材编写的过程中，参考了国内一些有关教材。除部分自编例题、习题外，大多数习题取自相应教材。

本书由北京农学院与天津农学院联合编写。天津农学院负责第一章至第五章的编写（第一、二章由赵翠萍副教授编写，第三、四章由王学会老师编写，第五章由张海燕副教授编写，赵翠萍负责第一章至第五章统稿），北京农学院负责第六章至第十章编写（白荣凤负责统稿），王玉民副教授完成了全书文字部分的统稿工作。全书

配套的多媒体教学课件由杜晓林教授统一负责，北京农学院数学教研室参编教师集体完成。

中国农业大学数学系张录达教授在百忙中抽出时间对本书原稿进行了审阅，并提出中肯的意见。在此一并致谢！

本书讲授约需 64 学时，第一章至第八章约需 48 学时，讲授过程中可根据需要对带 * 的章节进行适当删减。

由于时间仓促，编者水平有限，书中难免有不妥甚至错误之处，殷切盼望同行和读者批评指正。

编 者

2008 年 10 月

郑 重 声 明

中国农业出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 65005894, 59194974, 59194971

传 真：(010) 65005926

E - mail: wlxyaya@sohu.com

通信地址：北京市朝阳区农展馆北路 2 号中国农业出版社教材出版中心

邮 编：100125

购书请拨打电话：(010) 59194972, 59195117, 59195127

数码防伪说明：

本图书采用出版物数码防伪系统，用户购书后刮开封底防伪密码涂层，将 16 位防伪密码发送短信至 106695881280，免费查询所购图书真伪，同时您将有机会参加鼓励使用正版图书的抽奖活动，赢取各类奖项，详情请查询中国扫黄打非网 (<http://www.shdf.gov.cn>)。

短信反盗版举报：编辑短信“JB, 图书名称, 出版社, 购买地点”发送至 10669588128

短信防伪客服电话：(010) 58582300/58582301

目 录

前言

第一章 随机事件与概率	1
§ 1.1 随机事件与样本空间	1
1.1.1 必然现象与随机现象	1
1.1.2 随机试验与随机事件	1
1.1.3 样本空间	2
习题 1.1	3
§ 1.2 随机事件的关系与运算	3
1.2.1 子事件	3
1.2.2 和（并）事件与积事件	4
1.2.3 差事件	4
1.2.4 互斥事件与对立事件	4
1.2.5 互斥事件完备组	5
1.2.6 事件的运算规则	5
习题 1.2	7
§ 1.3 随机事件的概率	8
1.3.1 概率的统计定义	8
1.3.2 古典概型	9
1.3.3 几何概率	12
1.3.4 概率的公理化定义与性质	13
习题 1.3	15
小结	17
阶段测试题一	17
第二章 条件概率 事件的独立性	19
§ 2.1 条件概率	19
2.1.1 条件概率与乘法公式	19
2.1.2 全概率公式	21
2.1.3 逆概率公式	22
习题 2.1	24

§ 2.2 随机事件的独立性	25
2.2.1 事件独立性的概念	25
2.2.2 独立试验序列 二项概率公式	28
习题 2.2	29
小结	30
阶段测试题二	30
第三章 一维随机变量及其分布	32
§ 3.1 随机变量及其分布函数	32
3.1.1 随机变量的概念	32
3.1.2 随机变量的分布函数	33
习题 3.1	34
§ 3.2 离散型随机变量及其分布	34
3.2.1 离散型随机变量的概念	34
3.2.2 离散型随机变量的分布函数	35
3.2.3 几个重要的离散型随机变量	37
习题 3.2	41
§ 3.3 连续型随机变量及其分布	43
3.3.1 连续型随机变量的概念	43
3.3.2 几个常见的连续型随机变量	44
习题 3.3	52
§ 3.4 随机变量函数的分布	53
3.4.1 离散型随机变量函数的分布	53
3.4.2 连续型随机变量函数的分布	54
习题 3.4	56
小结	56
阶段测试题三	57
第四章 多维随机变量及其分布	59
§ 4.1 二维随机变量	59
4.1.1 二维随机变量及其分布函数	59
4.1.2 二维离散型随机变量	60
4.1.3 二维连续型随机变量	62
4.1.4 几种重要的二维连续型随机变量	63
4.1.5 n 维随机变量	64
习题 4.1	65
§ 4.2 边缘概率分布与相互独立性	66

4.2.1 边缘分布函数	66
4.2.2 二维离散型随机变量的边缘分布	66
4.2.3 二维连续型随机变量的边缘分布	69
4.2.4 随机变量的相互独立性	70
习题 4.2	72
§ 4.3 二维随机变量函数的分布	73
4.3.1 二维离散型随机变量函数的分布	73
4.3.2 二维连续型随机变量函数的分布	75
习题 4.3	77
小结	78
阶段测试题四	78
第五章 随机变量的数字特征	80
§ 5.1 随机变量的数学期望	80
5.1.1 离散型随机变量的数学期望	80
5.1.2 连续型随机变量的数学期望	82
5.1.3 随机变量函数的数学期望	85
5.1.4 数学期望的性质	86
习题 5.1	88
§ 5.2 随机变量的方差	90
5.2.1 随机变量方差的概念	90
5.2.2 离散型随机变量的方差	91
5.2.3 连续型随机变量的方差	93
5.2.4 方差的性质	95
5.2.5 二维随机变量的期望与方差	95
5.2.6 切比雪夫不等式	97
习题 5.2	97
§ 5.3 随机变量的其他数字特征	98
5.3.1 协方差	98
5.3.2 相关系数	100
5.3.3 矩	102
5.3.4 协方差矩阵	102
习题 5.3	103
§ 5.4 大数定律与中心极限定理	103
5.4.1 大数定律	104
5.4.2 中心极限定理	105
习题 5.4	106

小结	107
阶段测试题五	107
第六章 样本及其分布	109
§ 6.1 总体与样本	109
6.1.1 总体	109
6.1.2 样本	109
6.1.3 抽样方法介绍	110
6.1.4 频数直方图	110
习题 6.1	113
§ 6.2 统计量及其分布	114
6.2.1 统计量的概念	114
6.2.2 统计量的分布	115
6.2.3 几个重要统计量的分布	116
习题 6.2	118
小结	119
阶段测试题六	119
第七章 参数估计	120
§ 7.1 参数估计原理	120
7.1.1 由样本估计总体参数的方法	120
7.1.2 点估计与区间估计	120
习题 7.1	121
§ 7.2 确定估计量的方法	121
7.2.1 矩估计法	121
7.2.2 极大似然估计法	124
习题 7.2	128
§ 7.3 估计量的评判标准	129
7.3.1 无偏性	129
7.3.2 有效性	131
7.3.3* 一致性	133
习题 7.3	134
§ 7.4 区间估计	134
7.4.1 置信区间	134
7.4.2 正态总体均值的区间估计	135
7.4.3 正态总体方差的区间估计	140
7.4.4* 非正态总体参数的区间估计方法	142

习题 7.4	144
小结	145
阶段测试题七	146
第八章 统计假设检验	148
§ 8.1 统计假设检验的一般概念	148
8.1.1 假设检验问题举例	148
8.1.2 假设检验原理及一般步骤	149
8.1.3 几个相关问题的说明	150
习题 8.1	153
§ 8.2 单个正态总体的参数检验	153
8.2.1 关于总体均值 μ 的检验	153
8.2.2 关于总体方差 σ^2 的检验	156
8.2.3* 关于总体频率的检验	158
习题 8.2	159
§ 8.3 两个正态总体的参数检验	161
8.3.1 两个正态总体均值的差异性检验	161
8.3.2 两个正态总体方差的差异性检验	165
习题 8.3	166
§ 8.4* 非参数检验介绍	167
8.4.1 皮尔逊定理与 χ^2 检验	167
8.4.2 χ^2 检验在遗传学上的应用	168
8.4.3 列联表的检验	169
8.4.4 正态分布与泊松分布的检验	170
习题 8.4	172
小结	174
阶段测试题八	174
第九章 方差分析	177
§ 9.1 单因素方差分析	177
9.1.1 数学模型	177
9.1.2 方差分解与统计分析	178
习题 9.1	184
§ 9.2 双因素方差分析	185
9.2.1 无交互作用的情形	186
9.2.2 有交互作用的情形	191
习题 9.2	197

小结	199
阶段测试题九	199
第十章 回归分析	201
§ 10.1 一元线性回归	201
10.1.1 经验公式与最小二乘法	202
10.1.2 关于回归系数 \hat{a} 、 \hat{b} 的分布	205
10.1.3 相关性检验	206
10.1.4 预测与控制	210
习题 10.1	215
§ 10.2 可化为一元线性回归的情形	217
10.2.1 回归曲线及其线性化	217
10.2.2 一些常见的可化为线性回归的函数类型及其图形	218
习题 10.2	221
§ 10.3 多元线性回归介绍	222
10.3.1 数学模型与最小二乘法	222
10.3.2 相关性检验	223
习题 10.3	224
小结	225
阶段测试题十	226
综合测试题	228
参考答案	233
附表	250
附表 1 正态总体参数区间估计表	250
附表 2 假设检验一览表	250
附表 3 二项分布表 (一)	252
附表 4 二项分布表 (二)	259
附表 5 泊松 (Poisson) 分布表	260
附表 6 标准正态分布表	264
附表 7 χ^2 分布表	265
附表 8 t 分布表	267
附表 9 F 分布表	269
附表 10 相关系数检验用表 (部分)	273
参考文献	274

第一章 随机事件与概率

人类在观察自然和生产经营活动中，经常会遇到一些带有某种不确定性的现象（随机现象）。例如，中央电视台心连心艺术团某日要到某地进行慰问演出，届时当地的天气会是晴天、多云还是阴天、有雨？某商场最近购进了 100 件新式服装，一个月内能售出多少件？某生产企业参加一次出口商品交易会，展会期间所能得到的订单金额是多少？我国人均国民生产总值达到世界中等发达国家平均水平需要几年时间？等等。概率论与数理统计（统称为随机理论）就是人类在研究这类随机现象的过程中创立起来的一门数学学科。

§1.1 随机事件与样本空间

1.1.1 必然现象与随机现象

在自然界和人类社会中经常会遇到各种各样的现象，这些现象大体上可分为两类：确定性现象和**随机现象**（random phenomenon）。

确定性现象是指在一定条件下，必然发生或必然不发生某一结果的现象。例如，向上抛掷一颗石子，石子必然落地；异性电荷互相吸引以及人死不能复生等，都是确定性现象，确定性现象也叫**必然现象**（certain phenomenon）。

随机现象是指在一定条件下，某一结果可能发生也可能不发生的现象。例如，抛一枚硬币，落地后可能正面向上，也可能正面向下；掷一枚骰子，可能出现 1 点，也可能出现 2 点、3 点、…、6 点；机床加工出来的零件，可能是合格的，也可能是废品等。这些现象都是随机现象，随机现象也叫偶然现象。

由于随机现象具有不确定性，所以人们事先无法确定它将出现哪种结果。但是在大量重复实验或观察下，它的结果却呈现出某种规律性，这种规律性称为随机现象的统计规律性。

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一个数学分支。

1.1.2 随机试验与随机事件

我们把对自然现象、社会现象所进行的一次观察或进行的一次科学实验称为一个试验。如果一个试验具有如下特征：

- (1) 在相同条件下可以重复进行；
- (2) 每次试验的结果具有多种可能性，而且在试验之前就可以明确知道试验所有可能的结果；
- (3) 每次试验只有一种结果出现，但在试验之前又不能断定本次试验究竟将出现哪一种结果。

则称该试验为**随机试验** (random experiment), 简称试验, 记作 E . 试看以下几个例子:

E_1 : 抛一枚硬币, 观察正面和反面出现的情况;

E_2 : 掷一颗骰子, 观察出现的点数;

E_3 : 口袋中有 7 个白球, 3 个红球, 任取一个, 观察其颜色;

E_4 : 记录电话总机在单位时间内接到呼唤的次数;

E_5 : 做灯泡使用寿命的实验, 记录它们使用的时间.

在以上五个例子中所进行的观察与实验都是随机试验.

随机试验的结果称为随机事件 (random event), 简称事件, 通常用字母 A 、 B 、 C 、 D 等表示.

例如, 抛一枚均匀硬币, 落地后正面向下. 这里, 抛一枚硬币是一次随机试验, “正面向下”就是一个随机事件, 可以用字母 A 表示. 它的随机性表现在: 每抛一次硬币, “正面向下”这一事件可能发生, 也可能不发生, 这就是随机事件的特性.

随机事件又分为基本事件和复合事件.

在一个随机试验中, 不能再分解的事件称为基本事件. 例如, 在掷一颗骰子的试验中, 出现“1点”, “2点”, \dots , “6点”都是基本事件, 一个随机事件所包含的基本事件的个数可能是有限个, 也可以是无穷多个.

由两个或两个以上基本事件组合而成的事件称为复合事件.

仍以掷一颗骰子的试验为例, “出现奇数点”这一随机事件是由出现 1 点、3 点和 5 点这三个基本事件组合而成的复合事件. 只要这三个基本事件中有一个发生, “出现奇数点”这一事件就发生了.

有两种事件与随机事件不同, 它们是必然事件和不可能事件.

所谓必然事件 (certain event), 就是在一定条件下, 每次试验都一定出现的事件. 例如, 掷一颗骰子, “所得点数小于 7”的事件就是必然事件. 必然事件通常用字母 Ω 表示.

所谓不可能事件 (impossible event), 就是在一定条件下, 每次试验都一定不会出现的的事件. 例如, 掷一颗骰子, “所得点数大于 6”的事件就是不可能事件. 不可能事件通常用字母 \emptyset 表示.

必然事件和不可能事件, 从本质上讲都不是随机事件, 因为它们都不具有随机性. 但是, 为了今后讨论方便起见, 就把它们当作两个特殊的随机事件.

1.1.3 样本空间

在随机试验中, 由于所讨论的事件不止一个, 而是有许多、甚至无穷多个, 这些事件之间又存在着一定的关系. 为研究方便, 我们引进类似于集合论的概念和术语, 以便能更好、更方便地描述随机事件.

在一个随机试验 E 中, 一个基本事件称为 E 的一个**样本点** (sample point), 记为 ω ; E 的所有样本点 (即基本事件) 构成的集合称为 E 的**样本空间** (sample space) (相当于全集), 记为 Ω , 即 $\Omega = \{\omega_i \mid i=1, 2, \dots\}$. 由于随机试验 E 的每一个事件都是由 E 的基本事件组合而成, 所以它们都可用 E 的样本点的集合来表示. 特别地, 作为 E 的所有样本点的集合, 样本空间 Ω

包含了所有的基本事件，因而是必然事件；相反，不可能事件则未包含任何一个样本点，可用空集 \emptyset 表示。

对于一个具体的随机试验来说，它的样本空间是由试验的内容和目的确定的。如果将试验的结果用适当的记号或数字来表示，则样本空间就是这些记号或数字的集合。

在试验 E_1 中，有两个基本事件，即{出现正面}，{出现反面}，若用 ω_1 表示“正面向上”，用 ω_2 表示“反面向上”，则 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ 。

在试验 E_2 中，有6个基本事件，用 ω_i 表示{出现*i*点} ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$)，则 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$ 。

在试验 E_4 中，若用*i*表示电话总机单位时间内接到的呼唤次数 ($i=1, 2, \dots$)，则 $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ 。

在试验 E_5 中，若用*t*表示“任取一只灯泡，测得寿命为*t*”，则 $\Omega = \{t \mid t \geq 0\}$ 。

同样，样本空间的样本点也取决于试验目的。例如，在试验 E_3 中，若只需区分灯泡的等级，则 $\Omega = \{\text{优质品, 合格品, 次品}\}$ 。

随机试验 E 的任何一个随机事件 A ，或者是一个基本事件，或者由若干个基本事件组合而成。在引入样本空间 Ω 之后，事件 A 就可看作样本空间 Ω 的子集。

习 题 1.1

1. 一袋中有编号依次为1, 2, 3, 4, 5的五只球，现不放回地抽取2只，试确定这项试验的样本空间 Ω 及随机事件 A “抽到球的最小号码是3”所含的样本点。

2. 甲、乙两名围棋选手进行五番棋比赛（无平局且下满五局），每局获胜者得一分，输者不得分。试确定甲、乙两选手所得比分的样本空间 Ω 及随机事件 A “甲选手获胜”所含的样本点。

3. 抛掷两枚均匀骰子，观察所得点数，试确定这项试验的样本空间 Ω 及随机事件 A “所得点数之和为质数”包含的样本点。

4. 10件产品中有3件次品，每次从其中任取一件（不放回），直到将3件次品全部取出，试确定抽样次数的样本空间 Ω 及随机事件 A “最多抽取7次”包含的样本点。

5. 将一根长度为1 m的木棒随意截为三段，观察各段长度，试确定这项试验的样本空间 Ω 及随机事件 A “所得三段木棒能构成三角形”包含的样本点。

§1.2 随机事件的关系与运算

在随机试验中，常常会有多种事件出现，这些事件往往又是相互关联的。为了方便表述和研究各种复杂事件，下面引入事件的关系及其运算。事件的关系与运算类似于集合的关系与运算，如果大家在学习这部分内容的时候，能够采取类比的方法，把已经熟知的集合论知识、方法及文氏图（Venn diagram），应用到学习中去，将会收到事半功倍的效果。

1.2.1 子事件

设 A, B 都是样本空间 Ω 的事件，若事件 A 发生必将导致事件 B 发生，则称事件 A 为事件