数学奥林匹克辅导丛书

漫话数学归纳法

苏淳 编著

OLYMPIAD

中国科学技术大学出版社

《数学奥林匹克辅导丛书》之六

漫话数学归纳法

苏 淳 编著

中国科学技术大学出版社

2001·合肥

图书在版编目(CIP)数据

漫话数学归纳法/苏淳编著．—2版．—合肥：中国科学技术大学出版社，2001.7
（数学奥林匹克辅导丛书）
ISBN 7-312-00877-1

Ⅰ.漫…　Ⅱ.苏…　Ⅲ.①数学—竞赛—高中—教学参考资料②数学归纳法—高中—教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第20615号

《数学奥林匹克辅导丛书》之六

漫话数学归纳法

苏　淳　编著

中国科学技术大学出版社出版发行
（安徽省合肥市金寨路96号）
中国科学技术大学印刷厂印刷
全国新华书店经销

*

开本：787×1092/32　印张：5.125　字数：114千
2001年7月第二版　2001年7月第二次印刷
印数：8001—13000册
ISBN7-312-00877-1/G·151　定价：6.50元

序

目前,有关中学生复习资料、课外辅导读物已经出版得很多了,甚至使一些中学生感到不堪负担,所以再要出版这类读物一定要注重质量,否则“天下文章一大抄”,又无创新之见,未免有误人子弟之嫌.写这类读物如何才能确何质量呢?我想华罗庚老师的两名名言:“居高才能临下,深入才能浅出”,应该成为写这类读物的指导思想,他本人生前写的一系列科普读物,包括为中学写的一些书,也堪称是这方面的范本.

中国科学技术大学教学系的老师们,在从事繁重的教学与科研工作的同时,一向对中学教学的活动十分关注,无论对数学竞赛,还是为中学生及中学教师开设讲座,出版中学读物都十分热心,这也许是受华罗庚老师的亲炙,耳濡目染的缘故,所以至今这仍然是中国科学技术大学数学系的一个传统和特色.

我看了几本他们编写的“数学奥林匹克辅导丛书”原稿,感到他们是按照华罗庚老师的教诲认真写作的,所以乐之为序.

龚　昇

目　次

1　数学归纳法与直接证法

大家知道，数学上的许多命题都与自然数 n 有关. 这里所说的 n，往往是指任意的一个自然数. 因此，这样的一个命题实际上也就是一整列命题.

要证明这样一整列命题成立，当然可以有多种不同的方法. 其中常用的一种方法是置 n 的任何具体值而不顾，仅仅把它看成是一个任意的自然数，也就是说，假定它只具备任何自然数都具备的共同性质，并且在这样的基础上去进行推导、运算. 如果我们在推导运算中没有遇到什么难以克服的困难，那么我们就有可能用这种方法来完成命题的证明了. 这种方法就是习惯上所说的直接证法. 下面来看两个简单的例子.

例 1　证明，对任何自然数 n，如下的等式都能成立：

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

证　我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx\\&=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\left(\sin\frac{1}{2}x+2\cos x\sin\frac{1}{2}x+2\cos 2x\sin\frac{1}{2}x\right.\\&\quad\left.+\cdots+2\cos nx\sin\frac{1}{2}x\right)\end{aligned}$$

利用积化和差公式

$$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$

即知

$$\begin{aligned}&\sin\frac{1}{2}x+2\cos x\sin\frac{1}{2}x+2\cos 2x\sin\frac{1}{2}x+\cdots+2\cos nx\sin\frac{1}{2}x\\&=\sin\frac{1}{2}x+\left(\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{1}{2}x\right)+\left(\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{3}{2}x\right)\\&\quad+\cdots+\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)\\&=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\end{aligned}$$

综合上述等式即得所证. 可见不论 n 为任何自然数，所证的恒等式都能成立.

在刚才所作的推导中由于借助了积化和差公式，所以证明得很顺利. 我们甚至连 n 是奇数还是偶数都用不着考虑就完成了证明. 这样的证明当然是对任何的自然数 n 都能够成立的，这就是我们所说的"将 n 置于**任意**的境地"的含意. 下面再看一个例子.

例 2 证明，对任何自然数 n，数

$$A_n=5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$$

都能被 8 整除.

证 按照 n 的奇偶性，我们分别将 A_n 表示成两种不同的形式. 当 n 为奇数时，有

$$A_n=(5^n+3^n)-(3^{n-1}-1) \tag{1}$$

当 n 为偶数时，将 A_n 表示为

$$A_n=5(5^{n-1}+3^{n-1})-(3^n-1) \tag{2}$$

于是上述两式中，第一个括号内的指数都是奇数，第二个括号内的指数都是偶数. 我们知道，如果 k 为奇数，则有

$$a^k+b^k=(a+b)(a^{k-1}-a^{k-2}b+\cdots+b^{k-1})$$

如果 k 为偶数，则 c^2-1 可整除 c^k-1. 于是只要分别视 $a=5$，$b=3$ 及 $c=3$，即可根据上述事实，知(1)、(2)两式中的前后两项都是 8 的倍数，从而完成了命题的证明.

在这个证明中，我们虽然分别对 n 为奇数和 n 为偶数作了不同的处理，但并未改变 n 是任意自然数这一根本的属性，因此所作的证明可对任何自然数 n 成立. 这是直接证法的最主要的特点.

直接证法在许多场合下具有简洁的优点，因此应用得非常广泛. 再看一个取自 1989 年全国高中数学联合竞赛试题的例子.

例 3 已知：$x_i\in R(i=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2)$，满足：$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=1$，$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$. 证明

$$\left|x_1+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$

证 由条件 $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=1$ 知 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零；由条件 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$ 知这 n 个实数中既有正数也有负数. 记

$$A_1=\{i:x_i\geqslant 0\},A_2=\{i:x_i<0\}$$

则 A_1 和 A_2 都不是空集，它们互不相交，且 $A_1\cup A_2=\{1,2,\cdots,n\}$. 若再记 $S_1=\sum\limits_{i\in A_1}x_i$，$S_2=\sum\limits_{i\in A_2}x_i$，就有

$$S_1+S_2=0,\quad S_1-S_2=1$$

因此，知 $S_1=-S_2=\frac{1}{2}$. 采用所引入的符号，就有

$$\left|x_1+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_n}{n}\right|=\left|\sum_{i\in A_1}\frac{x_i}{i}+\sum_{i\in A_2}\frac{x_i}{i}\right|$$

由 A_1 和 A_2 的定义和性质知 $\sum\limits_{i\in A_1}\frac{x_i}{i}$ 是若干个非负数之和，$\sum\limits_{i\in A_2}\frac{x_i}{i}$ 是若干个负数之和，因此就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|=\left|\sum_{i\in A_1}\frac{x_i}{i}+\sum_{i\in A_2}\frac{x_i}{i}\right|\leqslant\left|\sum_{i\in A_1}x_i+\frac{1}{n}\sum_{i\in A_2}x_i\right|$$
$$=\left|S_1+\frac{S_2}{n}\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right|=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$

可见命题的结论是成立的.

在这里，我们采用了许多符号，是为了书写简便. 有志于参加数学竞赛的读者们，应当努力使自己习惯于这些符号，并逐步学会使用各种符号.

在这个证明中，我们同样没有想过“n 究竟是几”的问题，只是把精力花费在对命题条件的推敲和剖析上. 我们应当养成这种细致分析题目条件的习惯. 解题的思路往往就来自于这种分析之中.

以上所说的都是一些直接证法. 如果我们能用这种证法把推理进行下去，那么就应当力争把它进行到底. 但有时，我们也会碰到一些与 n 有关的命题，对于它们很难从**任意**的 n 入手，那么我们就只好另辟蹊径了. 先看一个例子.

例 4 证明，对于每个不小于 3 的自然数 n，都可以找到一个正整数 a_n，使它可以表示为自身的 n 个互不相同的正约数之和.

显然，我们很难对**任意**一个不小于 3 的自然数 n，直接去找出相应的 a_n 来. 面对这样的情形，较为稳妥的做法只能是先从 a_3，a_4，… 找起.

经过不多的几步探索，就可以发现，有

$$6=1+2+3$$

而且 1,2,3 恰好是 6 的 3 个互不相同的正约数,因此可将 a_3 取作 6. 在些基础上,又可发现有

$$12=1+2+3+6$$

而且 1,2,3,6 恰好又是 12 的 4 个互不相同的正约数,因此又可取 $a_4=12$. 循此下去,便知可依次取 $a_5=24, a_6=48, \cdots$. 这也就告诉了我们:如果我们取定了 a_k,那么接下去就只要再取 $a_{k+1}=2a_k$ 就行了. 事实上,如果 a_k 可以表示成自身的 k 个互不相同的正约数 $b_1<b_2<\cdots<b_k$ 之和,即

$$a_k=b_1+b_2+\cdots+b_k$$

那么就有

$$2a_k=b_1+b_2+\cdots+b_k+a_k$$

如果记 $b_{k+1}=a_k$. 则显然有 $b_1<b_2<\cdots<b_k<b_{k+1}$,表明它们互不相同;而且显然它们都是 $2a_k$ 的正约数. 可见确实可以将 a_{k+1}取为 $2a_k$. 由于此处 k 具有**任意**性,所以我们确实已对一切不小于 3 的自然数 n 都证得了所需证明的断言.

我们在这里所采用的证法,就是所谓"数学归纳法",有时也简称为归纳法. 它在解决诸如此类的与自然数 n 有关的问题时,往往是行之有效的,因此被广泛地应用在数学之中.

刚才我们在证明中,实际上是遵循着如下思路行事的,即为了证明某个与自然数 n 有关的命题 $P(n)$成立,我们首先对最小的 n_0,验证 $P(n_0)$成立;然后再假定对 $n=k$,有 $P(k)$成立,并在此基础上,推出 $P(k+1)$也成立. 于是我们便**相信**了,对一切自然数 $n\geqslant n_0$,命题 $P(n)$都能成立.

当然,大家都会问:"这种**相信**是不是确有其道理呢?".

我们可以告诉大家,这种**相信**是可靠的,是有其充分的数学依据的. 我们可以设想一下,如果在经过了如上所述的推理

之后，命题 $P(n)$ 仍不能对一切自然数 $n \geqslant n_0$ 成立，那么如果记

$$A_1 = \{n : n \geqslant n_0,\ P(n)\text{不成立}\}$$
$$A_2 = \{n : n \geqslant n_0,\ P(n)\text{成立}\}$$

则有 $A_1 \neq \varnothing$. 但因已证 $P(n_0)$ 成立，知 $n_0 \notin A_1$，即有 $n_0 \in A_2$. 由于 A_1 是非空的自然数集合，所以其中一定有一个最小的元素 n_1. 由于 $n_0 \notin A_1$，所以 $n_1 > n_0$，即有 $n_1 - 1 \geqslant n_0$. 由于 n_1 是 A_1 中最小的数，所以 $n_1 - 1 \notin A_1$，从而 $n_1 - 1 \in A_2$. 这就是说有命题 $P(n_1 - 1)$ 成立. 记 $k = n_0 - 1$，则由我们所证，知可由 $P(k)$ 成立推出 $P(k+1)$ 成立，也就是有 $P(n_0)$ 成立，从而 $n_0 \in A_2$，即 $n_0 \notin A_1$，导致矛盾. 可见确有 $A_1 = \varnothing$. 也就是说，有 $A_2 = \{n : n \geqslant n_0\}$，即对一切 $n \geqslant n_0$，$P(n)$ 都成立.

以上所证明的原理，就叫做**数学归纳法原理**. 有了这个原理，我们就可以放心大胆地使用数学归纳法了.

利用数学归纳法不仅可以处理像例 4 那样不宜于采用直接证法的问题，而且也可以处理一些可以通过直接证法来解决的问题，例如前面提到过的例 1 和例 2，它们的证明过程如下：

例 1 又证 当 $n=1$ 时，我们有

$$\text{左式} = \frac{1}{2} + \cos x$$

$$\text{右式} = \frac{\sin\frac{3}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x} = \frac{3\sin\frac{1}{2}x - 4\sin^3\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

$$= \frac{3}{2} - 2\sin^2\frac{1}{2}x = \frac{3}{2} - (1 - \cos x)$$

$$= \frac{1}{2} + \cos x$$

所以对于 $n=1$，等式是成立的.

假设对于 $n=k$，等式成立，即有

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cdots+\cos kx=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

我们要来证明对于 $n=k+1$，等式也成立. 我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}+\cos x+\cdots+\cos kx+\cos(k+1)x\\
&=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}+\cos(k+1)x\\
&=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x+2\cos(k+1)x\sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}\\
&=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x+\left(\sin\left(k+\frac{3}{2}\right)x-\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{1}{2}x}\\
&=\frac{\sin\left(k+\frac{3}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}=\frac{\sin\left[(k+1)+\frac{1}{2}\right]x}{2\sin\frac{1}{2}x}
\end{aligned}$$

所以对于 $n=k+1$，等式也成立. 从而对一切自然数 n，等式都成立.

例 2 又证 因 $A_1=5+2+1=8$，知其为 8 的倍数，所以当 $n=1$ 时命题成立.

假设 A_k 可被 8 整除，要证 A_{k+1} 也可被 8 整除. 我们有

$$A_k=5^k+2\cdot 3^{k-1}+1$$

$$A_{k+1}=5^{k+1}+2\cdot 3^k+1=5\cdot 5^k+6\cdot 3^{k-1}+1$$

所以就有:

$$A_{k+1}-A_k=4(5^k+3^{k-1})$$

由于对任何自然数 k,数 5^k 和 3^{k-1}都是奇数,所以其和 5^k+3^{k-1}恒为偶数,从而 $4(5^k+3^{k-1})$一定是 8 的倍数.这也就表明 $A_{k+1}=A_k+4(5^k+3^{k-1})$可被 8 整除,明所欲证.因此,对任何自然数 n,数 A_n 都可被 8 整除.

在以上的证明过程中,我们都严格地遵守了数学归纳法所要求的两个步骤:(1)验证 $P(n_0)$成立;(2)假设 $P(k)$成立,推出 $P(k+1)$也成立.正如我们在证明数学归纳法原理的过程中所看到的,这两个步骤对于保证命题 $P(n)$对一切 $n\geqslant n_0$都能成立是必不可少的.因此必须严格遵守.

后面我们将要读到数学归纳法的各种技巧,它们虽然显得灵活多变,但都是在严守上述两个步骤的前提之下所设施的各种变通,而绝对没有取消这两个步骤中的任何一个.为了同后面将要介绍的各种变通形式相区别,我们将本节所采用的归纳法形式叫做数学归纳法的基本形式,也有人称之为第一归纳法.

同其它任何一种数学方法一样,数学归纳法也不是万能的,例如前面的例 3 就不宜于采用数学归纳法来加以证明,读者不难自行理解其中的道理.由于后面还要进一步谈到这个问题,这里不再赘述.

在前面所讲到的数学归纳法的两个步骤中,我们通常将“验证 $P(n_0)$成立”称作**起步**;将“假设 $P(k)$成立”称作**归纳假设**;而将由“假设 $P(k)$成立”推出“$P(k+1)$也成立”的过程叫做**归纳过渡**,有时也叫作**向前跨步**.起步的过程一般较容易,而归纳过渡有时却很需要认真动一番脑筋,有时甚至需要运用各种技巧和多种不同的数学工具.归纳过渡通常是全题论

证的关键，在此非认真下功夫不可，而其中最最重要的，则是设法利用归纳假设.

2 认真用好归纳假设

如果说在用数学归纳法证题时，归纳过渡是证题的关键，那么归纳假设就是过渡的基础. 数学归纳法之所以显得有生命力，就是因为它避开了直接接触 n 的任意性，而把证明过程变成为一个"连环套"，使得人们在验证了 $P(n_0)$ 成立之后，只要再在"$P(k)$ 已成立"的假设基础上证出"命题 $P(k+1)$ 也成立"就行了. 这就意味只需要再往前迈出一步就够了，因此大大减少了论证中的不确定性. 既然如此，运用好归纳假设当然就极为重要. 我们甚至可以说，"如何千方百计地创造条件以利用归纳假设？"的问题，正是论证者们在此所应考虑的最中心的问题.

在许多场合下，如何利用归纳假设的问题并不显得很困难. 我们来看两个简单的例子.

例 1 某次象棋比赛共有 n 人参加($n\geqslant2$)，每两个都应对弈，且一定决出胜负. 证明，比赛结束后，可将这 n 个人列为一队，使队列中的每一个人都曾战胜过紧跟在他后面的那个人.

如果 $n=2$，结论显然成立.

假设当 $n=k$ 时结论成立，我们来证明当 $n=k+1$ 时结论也成立. 这时，我们先从中任意叫出 k 个人来. 由于这 k 个人中的每两个人都曾决过胜负，因此根据归纳假设，可将他们按照要求列成一列. 此后，我们再让剩下的那个人按照如下办法插进已列好的队列中：如果他曾战胜过队列中的第 1 个人，那

么他就站在最前头；否则，就再看第 2 个人是否被他战胜过，他可以一直这样依次看下去，直到看到一个曾被他战胜过的人后，他就插到该人的前面；如果这样的人一个也找不到，那么他就站到队列的最后去. 不难看出，这样的队列即是合乎要求的. 可见对 $n=k+1$，结论也能成立. 所以对一切 $n\geqslant 2$，结论都能成立.

在这里，先叫出 k 个人来列队，即是为了利用归纳假设. 如果没有这 k 个人先行列队，那么是很难说清楚 $k+1$ 个人是如何列队的. 但是一旦有了这 k 个人所列的队列作为基础，那么就只要再说明第 $k+1$ 个人如何插入其中，并能保持队列所具备的性质就可以了.

例 2 有一批文件分成 n 个部分分别由 n 个人保管，这 n 个人每人都有电话机. 证明，当 $n\geqslant 4$ 时，只需通电话 $(2n-4)$ 次，就可以使 n 个人全都了解了全部文件的内容.

证 当 $n=4$ 时，甲和乙、丙和丁先分别通一次话，相互告知各自掌握的文件内容；然后，甲和丙、乙和丁再分别通一次话，相互告知方所了解的内容，即可使所有人都了解到全批文件内容，可见断言成立(共通了 4 次电话).

假设当 $n=k$ 时断言也成立，即只须通 $2k-4$ 次电话，即可使所有 k 个人都了解到全批文件的内容，我们要来证明当 $n=k+1$ 时断言也成立.

设想首先由第 $k+1$ 个人打电话给第 1 个人，以把他所掌管的文件内容全都告知第 1 个人. 然后按归纳假设，前 k 个人之间只须打 $(2k-4)$ 次电话即可使他们全都知道全批文件的内容. 然后第 1 个人再给第 $k+1$ 个人打电话，告知他全批文件内容. 所以一共只须打 $1+(2k-4)+1=2(k+1)-4$ 次电话. 可见断言对 $n=k+1$ 也成立.

在这两个例子中，虽然处理的细节上略有不同，但都可以先自 $k+1$ 个人中**任意**叫出 k 个人来对他们使用归纳假设(在例 2 中，要求剩下的那个人先将自己所掌握的文件内容告诉别人). 这是因为不论剩下的是哪一个人，接下来的问题都是容易解决的. 但在有的问题中却不是这样.

例 3 在一块平地上站有 n 个人. 对每个人来说，他到其他人的距离均不相同. 每人都有一支水枪. 当发出火灾信号时，每人都用水枪击中距他最近的人. 证明，当 n 为奇数时，其中至少有一个身上是干的.

证 $n=1$ 时，结论显然成立. 设命题对 $n=2k-1$ 成立，要证当 $n=2k+1$ 时命题也成立. 设 A 与 B 两人之间的距离在所有的两人间的距离中为最小. 撤出 A,B 两人，则由归纳假设知，在剩下的 $2k-1$ 个人中间，至少有一人 C 的身上是干的. 再把 A,B 两人加进去，由于 $AC>AB,BC>AB$，所以 A,B，两人都不会用水枪去击 C，从而 C 身上仍然是干的. 所以对一切奇数 n 命题都成立.

在这个问题中，先撤出两人是为了使用归纳假设(按照惯例，这叫做“退”). 但在退出之后，还应再进：因为我们的目标是解决 $k+1$ 的情形. 既然“退”是为“进”服务的，因此在“退”的时候就应当为“进”作好安排. 这个问题在例 1 和例 2 中显得不够突出，而在例 3 中便体现得很清楚了：我们之所以撤出 A 和 B，而不撤出别人，就是为了能**方便**地将他们再加进去. 下面再看两个例子.

例 4 在平面上给定了 n 个点$(n\geqslant 2)$，以其中每两个点为端点都能连得一线段，我们把这些线段中的最长者称作为直径. 证明，直径的数目不会多于 n 条.

证 显然当 $n=2$ 时断言成立. 假设 $n=k$ 时断言也成立，