同济大学教研室最新版《高等数学》配套辅导参考书

高等数学同步辅导

GAODENG SHUXUE TONGBU FUDAO

刘明华 周晖杰 徐海勇 主编

（下册）

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高等数学同步辅导

（下册）

刘明华　周晖杰　徐海勇　主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学同步辅导．下册／刘明华，周晖杰，徐海勇主编．—杭州：浙江大学出版社，2008.11
ISBN 978-7-308-05992-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．①刘…②周…③徐…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 073504 号

高等数学同步辅导（下册）
刘明华　周晖杰　徐海勇　主编

责任编辑　徐素君
文字编辑　张　鸽
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn）
电话：0571—88925592　88273066（传真）
排　　版　杭州中大图文设计有限公司
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　10.75
字　　数　247 千
版 印 次　2008 年 11 月第 1 版　2008 年 11 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-05992-3
定　　价　17.00 元

前　言

《高等数学》不仅是大多数大学生后续课程学习所必备的基础课，同时也是许多专业硕士研究生入学考试的必考课程。然而，近年来随着教学改革的实施，《高等数学》授课时间也有所减少，这对该课程中基本概念的理解、知识点的融会贯通、知识面的拓展必有一定的影响。另外，后续课程及研究生入学考试对《高等数学》的要求又有所深化。如何解决这样的问题？如何满足学生对《高等数学》学习的不同需求？为此我们编写了这本《高等数学同步辅导》的书，它是学生进行各个章节阶段性复习的指导书，也是教师讲授习题课时所需的参考书。

本书与同济大学数学教研室编写的《高等数学》教材相配套，分上、下两册，共十二章，包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学及应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数内容。

每一章由内容摘要、典型例题与同步练习、基础题、提高题（题后附有参考答案）四部分组成。内容摘要部分总结了本章中定义、重要定理、重要公式及解题方法。典型例题与同步练习部分精选了各类典型例题，并配有同类型的练习题及解答与提示，其中较难的题型以※号标明。基础题部分以基本概念、基本性质、基本计算方法为主，适当配备了简单的证明题及应用题，可以检查学生在《高等数学》学习中是否达到大纲的要求。提高题部分是把大学期间的《高等数学》学习与研究生入学考试的复习紧密衔接起来，可以达到巩固、理解、提高的目的。

总之，本书主要阐述《高等数学》的基本理论和基本方法，剖析了《高等数学》的重点和难点。目的在于帮助学生顺利学习《高等数学》，克服解题过程中遇到的困难，更好地掌握《高等数学》的基本理论和解题方法，以提高分析问题和解决实际问题的能力，为今后的需要打下坚实的基础。

要写好一本教辅书实非易事，本书难免会有缺点和错误，欢迎同行批评指正。

编　者

2008 年 7 月

目　录

第八章

空间解析几何与向量代数

一、内容摘要

(一)向量代数

1. 向量的概念

向量　$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，如图 8.1.

单位向量　$\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(\dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\right)$，

向量的模　$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$，

方向余弦　$\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},$

$\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|},$

且　$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$

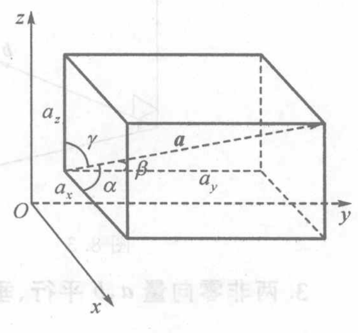

图 8.1

2. 向量的运算

(1)线性运算

$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$，$\lambda\boldsymbol{b}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$.

(2)向量的数量积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) &&\text{(定义运算)}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z &&\text{(坐标运算)}\\&=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Pr}\ j_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Pr}\ j_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}. &&\text{(投影运算)}\end{aligned}$$

(3)向量的向量积

向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为向量，且

①向量的模　$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

②几何意义　以 $|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|$ 为邻边的平行四边形的面积 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$,如图 8.2. 以 $|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|$ 为邻边的三角形面积 $S=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

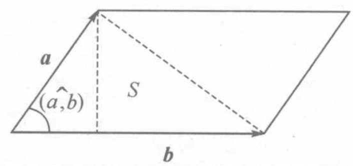

图 8.2

③向量的方向　垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 确定平面,符合右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转到 $\boldsymbol{b}$,拇指的指向是向量积的方向,如图 8.3.

④坐标运算　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$.

(4)向量的混合积

$$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}.$$

几何意义　以 $|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{c}|$ 为棱的平行六面体的体积 $V=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$,如图 8.4.

以 $|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{c}|$ 为棱的四面体的体积 $V=\dfrac{1}{6}|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$.

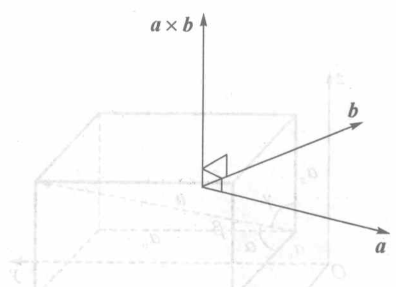

图 8.3

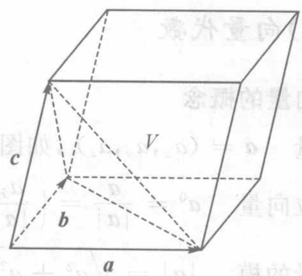

图 8.4

3. 两非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行、垂直条件

$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ 存在惟一实数 λ,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

(二)平面与直线

1. 平面及其方程

(1)平面方程

一般式　$Ax+By+Cz+D=0$,其中 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为平面的法向量.

点法式　$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$,其中 (x_0,y_0,z_0) 为平面上一点,$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为平面的法向量.

截距式　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$,其中 a,b,c 为平面在 x,y,z 轴上的截距.

注　该方程不能用来表示经过原点的平面方程.

(2)点 (x_0,y_0,z_0) 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

其中 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为平面的法向量.

(3)两平面的夹角

$$\cos\theta=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})|=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

其中两平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$.

2. 直线及其方程

(1)直线方程

一般式 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$，其中 A_1,B_1,C_1 与 A_2,B_2,C_2 对应不成比例.

对称式 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$，其中 (x_0,y_0,z_0) 为直线上的一点，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为直线的方向向量.

两点式 $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$，其中 (x_0,y_0,z_0)，(x_1,y_1,z_1) 为直线上的两点.

参数式 $\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$，或 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\y=y_0+t\cos\beta\\z=z_0+t\cos\gamma\end{cases}$，其中 (x_0,y_0,z_0) 为直线上的一点，t 为参变量，$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为直线单位方向向量.

(2)直线与直线的夹角

$$\cos\theta=|\cos(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})|=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

其中两直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$，$\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$.

(3)直线与平面的夹角

$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}})|=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\quad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

其中 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为直线的方向向量，$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为平面的法向量.

(4)点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}=\frac{\left|\begin{matrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\m&n&p\\x-x_0&y-y_0&z-z_0\end{matrix}\right|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

其中 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为直线的方向向量，$M(x,y,z)$ 为直线上任意一点.

3. 直线与平面平行、垂直条件

平面 Π：$Ax+By+Cz+D=0$，法向量　$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$.

直线 L：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$，方向向量　$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$.

平行 $\Pi \parallel L \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$，且 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$.

垂直 $\Pi \perp L \Leftrightarrow \boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{s} \Leftrightarrow \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$.

直线在平面上 $L \in \Pi \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$，且 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

4. 平面束

过直线 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ (A_1, B_1, C_1 与 A_2, B_2, C_2 不成比例)的所有平面(除平面 $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 外)的方程为

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$，即是平面束方程.

(三)曲面

1. 旋转曲面方程

在 yOz 坐标面上的曲线 l：$\begin{cases} F(y,z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$，如图 8.5，绕 Oz 轴旋转一周所得旋转曲面方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

绕 Oy 轴旋转一周所得旋转曲面方程为

$$F(y, \pm\sqrt{z^2 + x^2}) = 0.$$

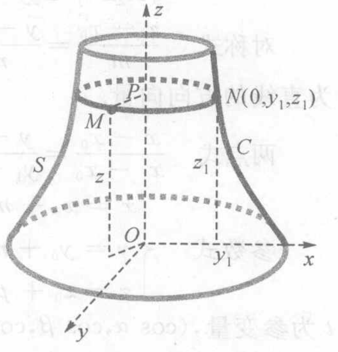

图 8.5

2. 柱面方程

母线平行于 z 轴的柱面方程 $F(x,y) = 0$.

母线平行于 y 轴的柱面方程 $G(x,z) = 0$.

母线平行于 x 轴的柱面方程 $H(y,z) = 0$.

常见的柱面方程

圆柱面方程

$$x^2 + y^2 = a^2,\ x^2 + z^2 = a^2,\ y^2 + z^2 = a^2,\ (x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

抛物柱面方程

$$y = ax^2,\ z = ax^2,\ y = az^2.$$

椭圆柱面方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,\ \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

双曲柱面方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,\ \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

3. 二次曲面标准方程

球面方程 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

椭球面方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1.$$

椭圆抛物面方程 $z=\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}$，($p,q$ 同号).

双曲抛物面方程 $z=\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y^2}{2q}$，($p,q$ 同号).

椭圆锥面方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$.

圆锥面方程 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$.

特殊的圆锥面方程 $z^2=a^2(x^2+y^2)$，$(z-b)^2=a^2(x^2+y^2)$，其中 $a=\cot\alpha$，α 为圆锥面的半顶角.

单叶双曲面方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

双叶双曲面方程 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

(四)空间曲线 Γ

1. 一般方程

$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，这是两曲面 $F(x,y,z)=0$，$G(x,y,z)=0$ 的交线.

(1)投影柱面

消去 z 得母线平行于 z 轴的关于 xOy 面的投影柱面方程 $H(x,y)=0$.

(2)投影曲线

关于 xOy 面的投影曲线方程为 $\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$.

同理还可以得关于 yOz 面与 zOx 面的投影柱面方程与投影曲线方程.

问题：如何求空间体在坐标面上的投影区域？

2. 参数方程

$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$，其中 t 为参变量.

二、典型例题与同步练习

1. 向量及其运算

例 1 设向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 的模、方向余弦及与 $\boldsymbol{c}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{c}^0$.

解 $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=3(\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})-2(\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})=-2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，

于是 $$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{(-2)^2+(2)^2+(-4)^2}=2\sqrt{6},$$

$$\cos\alpha=\frac{-2}{|\boldsymbol{c}|}=-\frac{1}{\sqrt{6}},\ \cos\beta=\frac{2}{|\boldsymbol{c}|}=\frac{1}{\sqrt{6}},\ \cos\gamma=\frac{-4}{|\boldsymbol{c}|}=-\frac{2}{\sqrt{6}},$$

从而与 $\boldsymbol{c}$ 同方向的单位向量是 $\boldsymbol{c}^0=-\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j}-\frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$.

例 2 设向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，且 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$，$\mathrm{Pr\,j}_c\boldsymbol{r}=14$，求 $\boldsymbol{r}$ 及与 $\boldsymbol{r}$ 平行的单位向量.

解 据题意 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 平行.

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-3&1\\1&-2&3\end{vmatrix}=(-7,-5,-1),$$

可设 $\boldsymbol{r}=(7\mu,5\mu,\mu)$，则

$$\mathrm{Pr\,j}_c\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cos\theta=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\frac{14\mu+5\mu+2\mu}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=7\mu.$$

据题意 $\mathrm{Pr\,j}_c\boldsymbol{r}=14$，所以 $\mu=2$. 于是

$$\boldsymbol{r}=14\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

且 $|\boldsymbol{r}|=10\sqrt{3}$，因此与向量 $\boldsymbol{r}$ 平行的单位向量为

$$\boldsymbol{r}^0=\frac{\pm1}{|\boldsymbol{r}|}(14\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})=\pm\frac{\sqrt{3}}{15}(7\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}).$$

例 3 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$ 且 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=2$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

解 由于数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=2\sqrt{2}\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，

向量积的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=2\sqrt{2}\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，且

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2+|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2,$$

所以 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=8-4=4$，

因此 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\pm2$.

例 4 若 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$ 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，求 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

解 因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=2\sqrt{2}\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=2$，

所以 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，则 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \dfrac{\pi}{4}$，因此

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = 2\sqrt{2}\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2.$$

◇练习题 8-1

1. 求同时垂直于 $\boldsymbol{a}=\{2,-2,3\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,0,-2\}$ 的单位向量 $\boldsymbol{c}^0$.
2. 设向量 $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 垂直，求 m 的值.
3. 设向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{m}+4\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$，且 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 均为单位向量，它们的交角为 $120°$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角.

【练习题 8-1 答案】

1. $\boldsymbol{c}^0 = \pm \dfrac{1}{\sqrt{69}}(4,7,2)$
2. $m = 3$
3. 提示：$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = -\dfrac{1}{2}$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = 120°$

2. 平面与直线

例 5　已知两条直线方程为

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}, \quad L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1},$$

求过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程.

解　设过 L_1 的平面为 Π，因为该平面过点 $(1,2,3)$，且法向量为 $\boldsymbol{n}$，由已知条件有　$\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{s}_2$，可取

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1,-3,1),$$

于是所求的平面方程为

$$(x-1) - 3(y-2) + (z-3) = 0,$$

即 $$x - 3y + z + 2 = 0.$$

例 6　求过点 $A(-3,0,1)$，且平行于平面 $\Pi_1: 3x-4y-z+5=0$，又与直线 $L_1: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$ 相交的直线方程.

解　设所求直线记为 L，过直线 L 作一个平面 Π_2 平行于平面 Π_1，因此平面 Π_2 的方程为

$$3(x+3) - 4(y-0) - (z-1) = 0, \text{ 即 } 3x - 4y - z + 10 = 0.$$

又过点 A 与直线 L_1 作平面 Π_3，$B(0,1,-1)$ 是直线上的一点，则平面 Π_3 的法向量为

$$\boldsymbol{s}_1 \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},$$

因此平面 Π_3 的方程为

$$-(x+3)+(y-0)-(z-1)=0,\quad 即\quad x-y+z+2=0.$$

显然，直线 L 在平面 Π_3 上，于是所求直线方程为

$$\begin{cases}3x-4y-z+10=0\\x-y+z+2=0\end{cases}.$$

※**例 7** 求直线 L：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 Π：$x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程，并求投影直线 L_0 绕 Oy 轴旋转一周所成曲面的方程.

解 求直线 L 在给定平面 Π 上的投影直线 L_0，应先求过 L 且与平面 Π 垂直的平面，为此先将直线方程化为一般式方程，即

$$\begin{cases}x+z-2=0\\y+z-1=0\end{cases},$$

设过直线 L 的平面方程可表示为

$$x+z-2+\lambda(y+z-1)=0,$$

即

$$x+\lambda y+(1+\lambda)z+(-2-\lambda)=0.$$

其中 λ 是特定系数，这里的平面与已知平面 Π：$x-y+2z-1=0$ 垂直，由垂直条件知

$$1\cdot 1+(-1)\cdot\lambda+2\cdot(1+\lambda)=0,$$

即 $\lambda=-3$. 因此得投影平面方程为 $x-3y-2z+1=0$.

故投影直线 L_0 方程为 $\begin{cases}x-y+2z-1=0\\x-3y-2z+1=0\end{cases}$.

投影直线 L_0 的参数方程为 $\quad x=2t,y=t,z=-\dfrac{1}{2}(t-1)$.

因为在投影直线 L_0 绕 Oy 轴旋转一周所成的旋转体上，纵坐标 y 相同的各点到 Oy 轴的距离均相等，所以距离均为 $\sqrt{x^2+z^2}$.

先将直线 L_0 的参数方程代入，则

$$x^2+z^2=\frac{17}{4}(t-\frac{1}{17})^2+\frac{4}{17}.$$

由于当 $(x,y,z)\in L_0$ 时，$y=t$，因此

$$x^2+z^2=\frac{17}{4}(y-\frac{1}{17})^2+\frac{4}{17},$$

化简得 $\dfrac{x^2}{\frac{4}{17}}-\dfrac{(y-\frac{1}{17})^2}{(\frac{4}{17})^2}+\dfrac{z^2}{\frac{4}{17}}=1$，这是单叶双曲面.

※**例 8** 已知点 A 与 B 的直角坐标分别为 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,1)$，线段 AB 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面为 S，求曲面 S 与两平面 $z=0,z=1$ 所围成的立体体积.

解 过 A,B 两点的直线方程为 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$，即 $\begin{cases}x=1-z\\y=z\end{cases}$.

直线 AB 绕 z 轴旋转一周构成的曲面是单叶双曲面(如图 8.6)，我们利用已知条件——平行截面面积，求该旋转体的体积.

过 z 轴上的一点 $Q(0,0,z)$ 做平面 Π 垂直于 z 轴，它截单叶双曲面，得截面是一个圆，

该截面与直线 AB 相交于点 $M(1-z,z,z)$，因此该截面圆的半径为

$$r=\sqrt{(1-z)^2+z^2+0}=\sqrt{1-2z+2z^2},$$

从而截面圆的面积 $A(z)=\pi(1-2z+2z^2)$，

于是所求的旋转体的体积为

$$V=\int_0^1\pi(1-2z+2z^2)\mathrm{d}z=\frac{2}{3}\pi.$$

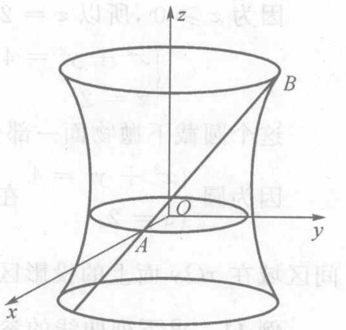

图 8.6

◇**练习题 8-2**

1. 已知直线 $L:\begin{cases}x+y+z+1=0\\2x-y+3z+4=0\end{cases}$，平面 Π：$3x-y+2z-6=0$，求：

(1) 直线 L 与平面 Π 交点的坐标；

(2) 通过直线 L，且与平面 Π 垂直的平面方程；

(3) 直线 L 在平面 Π 上的投影直线方程；

(4) 分别求点 $O(0,0,0)$ 到直线 L 与平面 Π 的距离.

2. 已知点 $A(1,0,0)$ 与 $B(1,1,1)$，求直线 AB 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面 S 的方程，并求曲面 S 与两平面 $z=0,z=1$ 所围成的立体体积.

【练习题 8-2 答案】

1. (1) $(5,-1,-5)$ (2) $5x+17y+z-3=0$

(3) $\begin{cases}5x+17y+z-3=0\\3x-y+2z-6=0\end{cases}$ (4) $\dfrac{\sqrt{195}}{13},\dfrac{3\sqrt{14}}{7}$

2. $x^2+y^2-z^2=1$，$\dfrac{4}{3}\pi$

3. 曲面方程及空间曲线

例 9 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2-2x=0\\z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周而成的旋转曲面方程.

解 根据旋转曲面的特点，所形成的旋转曲面方程是 $x^2+(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2-2x=0$，

即 $$x^2+y^2+z^2-2x=0,$$

亦即 $$(x-1)^2+y^2+z^2=1.$$

这是以点 $(1,0,0)$ 为圆心，以 $r=1$ 为半径的球面.

例 10 设曲面 $z=6-x^2-y^2$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成一个空间区域，试作出它的简图，并且求出该空间区域在 xOy 面上的投影区域.

解 曲面 $z=6-x^2-y^2$ 是 zOx 平面上的抛物线 $z=6-x^2$ 绕 z 轴旋转而成的旋转抛物面，曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 是 zOx 平面上的直线 $z=x$ 绕 z 轴旋转而成的旋转锥面.

两曲面的交线为 $\begin{cases}z=6-x^2-y^2\\z=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$，这是一个圆.

从上述方程中消去 x^2+y^2，得 $z^2=6-z$，即有

$$(z-2)(z+3)=0.$$

因为 $z \geqslant 0$，所以 $z = 2$. 从而得到交线为平面 $z = 2$ 上的圆 $x^2 + y^2 = 4$，即

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}.$$

这个圆截下抛物面一部分以及锥面一部分，两部分合在一起即为所要画的空间区域.

因为圆 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影仍然为圆，其方程为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$，所以空间区域在 xOy 面上的投影区域为一个圆域 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4 \\ z = 0 \end{cases}$.

例 11 求下列曲线的参数方程，并指出它们是什么曲线，是什么曲面的交线？

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = b^2 \end{cases} \quad (a \geqslant b > 0).$$

解 这是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与圆柱面 $x^2 + y^2 = b^2$ 的交线，由圆周的参数方程得

$$x = b\cos t, y = b\sin t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

将 $x^2 + y^2 = b^2$ 代入球面方程得 $z^2 = a^2 - b^2$，于是得交线的参数方程

$$\begin{cases} x = b\cos t \\ y = b\sin t \\ z = \pm\sqrt{a^2 - b^2} \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

当 $a = b$ 时，曲线是一个圆周；当 $a > b$ 时，曲线是两个圆周.

◇练习题 8-3

1. 下列方程各表示怎样的曲面

(1) $z = x^2 + y^2$；(2) $4 - z = x^2 + y^2$；(3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$；(4) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$；

(5) $y^2 + z^2 = 9$；(6) $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$；(7) $z = y^2$.

2. 画出下列曲面所围成的立体的图形

(1) $x + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ 与三个坐标平面；

(2) $z = x^2 + y^2$，$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$；

(3) $x^2 + y^2 = a^2$，$z = x^2 + y^2$，$z = 0$；

(4) $x^2 + y^2 = 1$，$x + y + z = 3$，$z = 0$；

(5) $x^2 + y^2 = 2 - z$，$z = 0$；

(6) $z = y^2$，$x = 0$，$x = 2$，$z = 1$.

3. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与柱面 $z^2 = 2x$ 所围成的立体在 xOy 面及 zOx 面上的投影.

【练习题 8-3 答案】

1. 略　　2. 略

3. $z = 0, (x - 1)^2 + y^2 \leqslant 1$；$y = 0, x \leqslant z \leqslant \sqrt{2x}$

三、基础题

(一)单项选择题

1. 下列陈述正确的是( ).

A. 因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是单位向量,必有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$　　B. $3\boldsymbol{i}>\boldsymbol{j}$

C. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,则必有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$　　D. 若 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

2. 设 α,β,γ 是一个向量的方向角,则有( ).

A. $\alpha+\beta+\gamma=\pi$　　B. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$

C. $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$　　D. α,β,γ 可以任意选取

3. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=5$,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$,则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$( ).

A. 4　　B. 3　　C. 5　　D. -4

4. 设直线 L_1:$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与直线 L_2:$\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$,则 L_1 与 L_2 的夹角是( ).

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

5. 直线 $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$ 必( ).

A. 过原点垂直于 x 轴　　B. 过原点垂直于 y 轴

C. 过原点垂直于 z 轴　　D. 过原点且通过 x 轴

6. 平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$,若 $A=D=0$,则平面( ).

A. 平行于 y 轴　　B. 垂直于 y 轴　　C. 垂直于 z 轴　　D. 通过 x 轴

7. 直线 L:$\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z}{3}$ 与平面 Π:$4x-2y-2z=3$ 的关系是( ).

A. 相互平行　　B. L 在 Π 上　　C. 垂直相交　　D. 相交但不垂直

8. 曲线 Γ:$\begin{cases}f(y,z)=0\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转而得的旋转曲面的方程是( ).

A. $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$　　B. $f(\pm\sqrt{y^2+z^2},x)=0$

C. $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},y)=0$　　D. $f(y,\pm\sqrt{z^2+x^2})=0$

9. 曲线 Γ:$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\z=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$ 在 xOy 面投影曲线方程是( ).

A. $\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{R^2}{2}\\z=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{R^2}{2}\\z=\dfrac{R}{\sqrt{2}}\end{cases}$