# 高中三角升学复习题解

甘肃师大附中数学教研组编

甘肃人民出版社

高中三角升学复习題解
甘肃师大附中数学教研組編
*
甘肃人民出版社出版（兰州市第一新村）
甘肃省书刊出版业营业許可証出字第001号
甘肃日报社印刷厂印刷　甘肃省新华书店发行
*
开本：787×1092毫米1/32，4印張
1958年6月第一版　1960年5月第二版
1962年3月第三版　1963年1月第四版第六次印刷
印数：85,229—155,228
*
統一书号：13096·6
定　价：~~(8)0.33元~~
(7)0.43元

# 出 版 說 明

这套高中各科升学复习题解，是我社约請甘肃师大附设中学各有关教研组教师编写的，包括代数、几何、三角、物理和化学共五种，目的是为了帮助高中毕业学生升学时的复习参考和辅导在校高中学生以及社会青年自学之用。

《高中三角升学复习题解》的编写，基本上是按照中学数学教学大纲(修订草案)进行的。为了帮助读者系统的复习，编者在编排和造题方面力求具有代表性。此外，书中还穿插有：解放后历年各大学统一招生的绝大部分试题(题前标“△”符号)；解放前历年各大学的一部分入学试题和苏联各大学的一部分入学试题以及数学竞赛题(题前标“*”符号)；现行课本中一小部分较难的习题(题前标“☆”符号)，以便于读者了解各大学对考生的基本要求和难题的解法。在解题方面，有的予以必要的说明，有的则在步骤上力求详细，尽量便于读者的复习。

本书是由附中数学教研组王志亭编写的，原稿曾经甘肃师大数学系审阅。1958年出版以来，得到各地广大读者的热情关怀。近年来，经编者多次修订，读者如有批评或意見，請能及时函告我们。

1962年11月

# 目　　录

# 第 一 章

## 三角函数式的变化

### 一 三角函数

1. $\cos 1$与$\cos 1^\circ$哪一个的值大？

解：$\because$ 1弧度$=\frac{180^\circ}{\pi}$，而$\frac{180^\circ}{\pi}>1^\circ$，　又在第一象限

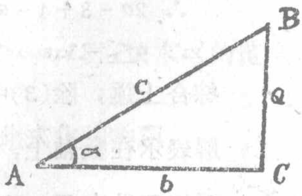
余弦为减函数．

$\therefore \cos 1<\cos 1^\circ$．

*2. $\sin\alpha$与$tg\alpha$哪一个的值大？$(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$

解：如图：$\because \sin\alpha=\frac{a}{c}$，

$tg\alpha=\frac{a}{b}$，




在$\frac{a}{c}$，$\frac{a}{b}$中，因

直角三角形的斜边大于其任一直角边，

$\therefore c>b$，$\therefore \frac{a}{c}<\frac{a}{b}$，故$\sin\alpha<tg\alpha$．

3. 要使得等式$\sin\alpha=\frac{2a-3}{4-a}$有意义，试求$a$的值的范围．

**解：** 若使$sin\alpha$有意义，则$\left|\frac{2a-3}{4-a}\right|\leq 1$。

$\therefore |2a-3|\leq|4-a|$，故$|2a-3|-|4-a|\leq 0$，

解此不等式：

（1）若$a\leq\frac{3}{2}$，则 $|2a-3|=-(2a-3)$，

$|4-a|=4-a$.

$\therefore -(2a-3)-(4-a)\leq 0$，即$-a-1\leq 0$.

$\therefore a\geq -1$.

（2）若$\frac{3}{2}<a<4$，则 $|2a-3|=2a-3$.

$|4-a|=4-a$.

$\therefore 2a-3-(4-a)\leq 0$.　　即 $3a-7\leq 0$，

$\therefore a\leq\frac{7}{3}$.

（3）若 $4<a$，则 $|2a-3|=2a-3$，

$|4-a|=-(4-a)$，

$\therefore 2a-3+4-a\leq 0$，

$\therefore a\leq -1$.

综合上述，除(3)中$a$的值不存在之外，将(1)，(2)的解表示在数轴上，我们知 $-4\leq a\leq\frac{7}{3}$.

☆4. 正切函数在哪一个象限是减函数？并由这个关系决定$tg120°-tg121°$的符号.

**解：** 正切函数在任何一个象限都是增函数，不可能是减函数.

$\therefore tg120°<tg121°$，即 $tg120°-tg121°<0$.

故 $tg\ 120° - tg\ 121°$的符号为负.

5. 设 $1620° < \alpha < 1800°$，则 $\cos\alpha$是增函数，还是减函数？

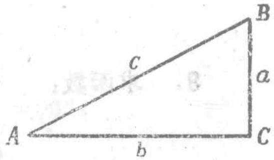
**解：** $\because\ 1620° = 360° \times 4 + 180°$

又 $1800° = 360° \times 5$.　　故 $\alpha$属于3,4两个象限，

所以$\cos\alpha$是增函数.

6. **試証：** 直角三角形两锐角之差的余弦等于其二直角边之积的2倍除以斜边之平方.

**証明：** 如图：




$\because\ \cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$,

而 $\cos A = \dfrac{b}{c}$，$\cos B = \dfrac{a}{c}$，$\sin A = \dfrac{a}{c}$，$\sin B = \dfrac{b}{c}$，

$$\therefore\ \cos(A-B) = \frac{b}{c}\cdot\frac{a}{c} + \frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}$$

$$= \frac{2ab}{c^2}.$$

7. 若 $0° < \alpha < 360°$，当$\sin\alpha > \cos\alpha$时，试求$\alpha$的范围.

**解：** 因 $\sin\alpha > \cos\alpha$，

故 $\sin\alpha - \cos\alpha > 0$，将此式化为乘积，

$\therefore\ \sin\alpha - tg45°\cos\alpha > 0.$

$$\frac{\sin\alpha\cdot\cos45° - \sin45°\cdot\cos\alpha}{\cos45°} > 0,$$

$$\therefore\ \frac{\sin(\alpha - 45°)}{\cos45°} > 0.$$

但因 $\cos45° > 0$，　$\therefore\ \sin(\alpha - 45°) > 0$，

因正弦在第一，第二象限为正，

故 $180^\circ > \alpha - 45^\circ > 0$，　$\therefore 225^\circ > \alpha > 45^\circ$.

8．如果 $cos17x = f(cosx)$，试证：

$sin17x = f(sinx)$.

**証：** $f(sinx) = f\left[cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$

$$= cos\left[17\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = cos\left(4\pi + \frac{\pi}{2} - 17x\right)$$

$$= cos\left(\frac{\pi}{2} - 17x\right) = sin17x.$$

9．求函数：（1）$y = \frac{sinx}{1 + cosx}$；

（2）$y = \sqrt{\sqrt{2} - 2sinx}$ 的定义域.

**解：**（1）若 $1 + cosx = 0$，则 $cosx = -1$.

$\therefore\ x = k \cdot 360^\circ + 180^\circ = (2k+1)180^\circ$.

故函数的定义域是 $x \neq (2k+1)180^\circ$.

（2）我们还不会解三角不等式，故这儿我们可以利用三角圆，观察满足不等式 $\sqrt{2} - 2sinx \geq 0$，即 $\frac{\sqrt{2}}{2} \geq sinx$ 的 $x$ 的值，

得到函数的定义域是：

$$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{9\pi}{4} + 2k\pi.$$

10．求出下面两个三角函数多项式的乘积：

$f(x) = sinx(1 + sinx) + cosx(1 + cosx)$；

$\varphi(x) = sinx(1 - sinx) + cosx(1 - cosx)$.

**解：** $\because\ f(x) = sinx + sin^2x + cosx + cos^2x$

$=sinx+cosx+1,$

$\varphi(x)=sinx-sin^2x+cosx-cos^2x=sinx+cosx-1.$

$\therefore\quad f(x)\cdot\varphi(x)=(sinx+cosx+1)(sinx+cosx-1)$

$=(sinx+cosx)^2-1$

$=1+2sinx\cdot cosx-1$

$=sin2x.$

11．証明：若$\alpha$和$\beta$互为补角，且$x<\frac{\alpha}{2}$，$y<\frac{\beta}{2}$，则

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}-x\right)=ctg\left(\frac{\beta}{2}+x\right).$$

証：$\because\ \alpha+\beta=180°,\quad \therefore\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=90°,$

$\therefore\ \frac{\alpha}{2}-x=90°-\left(\frac{\beta}{2}+x\right)$．取两端的正切；

$\therefore\ tg\left(\frac{\alpha}{2}-x\right)=tg\left[90°-\left(\frac{\beta}{2}+x\right)\right]=ctg\left(\frac{\beta}{2}+x\right).$

12．试先以$cos\,\theta$之项，再以$sin\,\theta$之项表：

（1）$cos^4\theta-sin^4\theta$；　（2）$1-tg^4\theta$；

（3）$sin^6\theta+cos^6\theta$．

解：（1）$cos^4\theta-sin^4\theta=(cos^2\theta+sin^2\theta)(cos^2\theta-sin^2\theta)=cos^2\theta-sin^2\theta=2cos^2\theta-1.$

又此式$=1-2sin^2\theta$．

（2）$1-tg^4\theta=(1+tg^2\theta)(1-tg^2\theta)$

$=sec^2\theta\left(1-\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}\right)$

$=\frac{1}{cos^2\theta}\left(\frac{cos^2\theta-sin^2\theta}{cos^2\theta}\right)=\frac{2cos^2\theta-1}{cos^4\theta}.$

$$又此式=\frac{1-2sin^2\theta}{(1-sin^2\theta)^2}.$$

(3) $sin^6\theta+cos^6\theta=(1-cos^2\theta)^3+(cos^2\theta)^3$

$$=(1-cos^2\theta)^2-(1-cos^2\theta)\cdot cos^2\theta+cos^4\theta$$

$$=1-3cos\theta+3cos^4\theta.$$

$$又此式=1-3cos^2\theta(1-cos^2\theta)$$

$$=1-3(1-sin^2\theta)sin^2\theta$$

$$=1-3sin^2\theta+3sin^4\theta。$$

13。确定下面的函数，哪一个是奇函数，哪一个是偶函数：

(1) $f_1(x)=\dfrac{x^2+cosx}{x^2-cosx}$; (2) $f_2(x)=\dfrac{sin^5x}{cos^3x}$;

(3) $f_3(x)=\dfrac{sinx+cosx}{sinx-cosx}$.

**解**：(1) $\because f_1(x)=\dfrac{x^2+cosx}{x^2-cosx}$,

而 $f_1(-x)=\dfrac{(-x)^2+cos(-x)}{(-x)^2-cos(-x)}=\dfrac{x^2+cosx}{x^2-cosx}$,

$\therefore f_1(x)=f_1(-x)$; 故 $f(x)$是偶函数.

(2) $\because f_2(x)=\dfrac{sin^5x}{cos^3x}$,

而 $f_2(-x)=\dfrac{sin^5(-x)}{cos^3(-x)}=\dfrac{(-sinx)^5}{(cosx)^3}=\dfrac{sin^5x}{cos^3x}$;

$\therefore f_2(x)=-f_2(-x)$. 故 $f_2(x)$是奇函数，

(3) $\because f_3(x)=\dfrac{sinx+cosx}{sinx-cosx}$,

而 $f_3(-x)=\dfrac{sin(-x)+cos(-x)}{sin(-x)-cos(-x)}$

$$=\frac{-\sin x+\cos x}{-\sin x-\cos x}.$$

故 $f_3(x)$ 既非偶函数，亦非奇函数.

14. 为什么分式$\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$不能为负值？

**解：** 原式$=\dfrac{\sin\alpha+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\cos\alpha+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\dfrac{\sin\alpha\left(\dfrac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha\left(\dfrac{\sin\alpha+1}{\sin\alpha}\right)}$

$$=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha+1}=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1+\cos(90^\circ-\alpha)}$$

$$=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\operatorname{tg}^2\alpha.$$ 故不能为负值.

15. 求三角函数：(1) $\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)$，(2) $\cos\frac{\pi(x+1)}{2}$，

(3) $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{3}$的周期.

**解：** (1) 在$\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)$中，对$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}$来说，它的周期是$2\pi$.

$$\therefore\quad \sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left[\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)+2\pi\right].$$

但对自变量$x$来说：

$$\because\quad \sin\left[\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)+2\pi\right]=\sin\left[\frac{1}{2}x+2\pi+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\sin\left[\frac{1}{2}(x+4\pi)+\frac{\pi}{2}\right].$$

故 函数 $\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)$的周期是$4\pi$.

(2) 同理，$\because\ \cos\frac{\pi(x+1)}{2}=\cos\left[\frac{\pi(x+1)}{2}+2\pi\right]$

$$=\cos\frac{\pi(x+1)+4\pi}{2}$$

$$=\cos\frac{\pi(x+4+1)}{2}$$

$$=\cos\frac{\pi[(x+4)+1]}{2}.$$

故 函数 $\cos\frac{\pi(x+1)}{2}$的周期是4.（表示4弧度）

(3) $\because\ tg\frac{\pi x}{3}=tg\left(\frac{\pi x}{3}+\pi\right)=tg\frac{\pi x+3\pi}{3}$

$$=tg\frac{\pi(x+3)}{3},$$

故 $tg\frac{\pi x}{3}$的周期是3.

16。求三角函数：(1) $\sin 3x+tg\frac{2}{5}x$;

(2) $tg3\pi x+ctg2\pi x$的周期.

解：(1) $\because\ \sin 3x=\sin(3x+2\pi)=\sin 3\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$,

$\therefore\ \sin 3x$的周期是$\frac{2}{3}\pi$.

又 $\because\ tg\frac{2}{5}x=tg\left(\frac{2}{5}x+\pi\right)=tg\frac{2}{3}\left(x+\frac{5}{2}\pi\right)$,

$\therefore\ tg\frac{2}{5}x$的周期是$\frac{5}{2}\pi$.

而它们的和的周期是$10\pi$.（即$\frac{2}{3}\pi$与$\frac{5}{2}\pi$的最小公倍数）

(2) $\because\ tg3\pi x=tg(3\pi x+\pi)=tg3\pi\left(x+\frac{1}{3}\right)$,

$\therefore\ tg3\pi x$的周期是$\frac{1}{3}$.

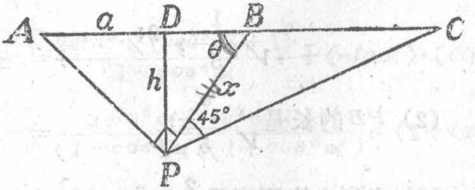
又 $\because\ ctg2\pi x=ctg(2\pi x+\pi)=ctg2\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)$,

$\therefore\ ctg2\pi x$的周期是$\frac{1}{2}$.

故它们和的周期是1.

**注意**：分数的最小公倍数的求法是以各分数分子的最小公倍数为分子，各分数分母之最大公约数为分母，这个分数就是各个分数的最小公倍数.

17. $A$、$B$、$C$是直线$l$上三点，$P$是这直线外一点．已知$AB=BC=a$，$\angle APB=90°$，$\angle BPC=45°$．试求：(1)$\angle PBA$的正弦、余弦、正切；(2)线段$PB$的长；(3)$P$点到直线$l$的距离.（1959年全国统一试题）




解1：设$\angle PBA=\theta$，$PB=x$,

$P$ 点到直线 $l$ 的距离 $pd$ 为 $h$.

由 $\triangle APB$ 知

$$x = a\cos\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

由 $\triangle BPC$ 知

$$\frac{a}{\sin 45°} = \frac{x}{\sin(\theta - 45°)} \cdots\cdots (2)$$

从(1)，(2)消去 $x$，得：

$$\frac{a}{\sin 45°} = \frac{a\cos\theta}{\sin(\theta - 45°)}$$

即 $\sqrt{2}(\sin\theta\cos 45° - \cos\theta\sin 45°) = \cos\theta$,

∴ $\sin\theta - \cos\theta = \cos\theta$,

$\sin\theta = 2\cos\theta$,

∴ $tg\theta = 2$.

因 $\theta$ 是锐角，

∴ $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

故 $x = a\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{5}}$,

$h = x\sin\theta = \frac{2}{5}a$.

答： (1) $\angle PBA$ 的正弦，余弦，正切分别是 $\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}$, 2;

(2) $PB$ 的长是 $\frac{a}{\sqrt{5}}$;

(3) $P$ 到 $l$ 的距离是 $\frac{2}{5}a$.

解2： 由(2)得，$x=\dfrac{a\sin(\theta-45^\circ)}{\sin 45^\circ}$

$=a\sqrt{2}(\sin\theta\cos 45^\circ-\cos\theta\sin 45^\circ)$

$=a\sin\theta-a\cos\theta$. ………(3)

因 $\theta$是锐角，所以由(1)得

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\text{………………}(4)$$

把 (1)，(4)代入(3)，得

$$x=\sqrt{a^2-x^2}-x,$$

$\therefore\ 5x^2=a^2,\quad \therefore\ x=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$

故 $\cos\theta=\dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}},$

$\operatorname{tg}\theta=2,\qquad h=x\sin\theta=\dfrac{2}{5}a.$

## 二 三角恒等式

1. 求証：$\dfrac{2\cos^2(90^\circ+\alpha)[\sec^2(180^\circ-\alpha)+1]}{1-\sin^4(\alpha-270^\circ)}$

$+\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)\cdot[\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)$

$+\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)]=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

証：式左 $=\dfrac{2\sin^2\alpha(\sec^2\alpha+1)}{1-\cos^4\alpha}+(-\operatorname{tg}\alpha)\cdot[\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha]$

$=\dfrac{2\sin^2\alpha(\sec^2\alpha+1)}{(1-\cos^2\alpha)(1+\cos^2\alpha)}-(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$

$=\dfrac{2(\sec^2\alpha+1)}{1+\cos^2\alpha}-(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$

$$=\frac{2\left(\frac{1+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}{1+\cos^2\alpha}-\sec^2\alpha$$

$$=\frac{2}{\cos^2\alpha}-\sec^2\alpha$$

$$=\frac{2-1}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

故原式成立.

2\. **求証：** $\dfrac{\frac{1}{2}}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=2.$

**証：** 式左 $=\dfrac{\sin 30^\circ}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\cos 30^\circ}{\cos 10^\circ}$

$$=\frac{\sin 30^\circ\cos 10^\circ-\cos 30^\circ\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\ \cos 10^\circ}=\frac{\sin(30^\circ-10^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{2\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=2.$$

故原式成立.

3\. **求証：** $2\cos\dfrac{45^\circ}{2^n}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$ 至 $n+1$ 项.

**証：** $\because\ 2\cos 45^\circ=\sqrt{2}$,

$$\therefore\ 2\cos\frac{45^\circ}{2}=\sqrt{2+2\cos 45^\circ}=\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

………………………………;

$$\therefore\ 2\cos\frac{45^\circ}{2^n}=\sqrt{2+2\cos\frac{45^\circ}{2^{n-1}}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\frac{45^\circ}{2^{n-2}}}}$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}\text{至}n+1\text{项}.$$

故原式成立.

**4.求証：** (1) $\sqrt{(sec^2\alpha-1)(1-sin^2\alpha)}=|sin\alpha|$;

(2) $\sqrt[-2]{tg^3\alpha+ctg^2\alpha+2}=|sin\alpha\cdot cos\alpha|$.

**証：** (1) $\sqrt{(sec^2\alpha-1)(1-sin^2\alpha)}=\sqrt{tg^2\alpha\cdot cos^2\alpha}$

$=\sqrt{sin^2\alpha}=|sin\alpha|$;

(2) $\sqrt[-2]{tg^3\alpha+ctg^2\alpha+2}$

$=\sqrt[-2]{sec^2\alpha-1+cec^2\alpha-1+2}$

$=\sqrt[-2]{sec^2\alpha+csc^2\alpha}$

$=\sqrt[-2]{\dfrac{1}{cos^2\alpha}+\dfrac{1}{sin^2\alpha}}=\sqrt[-2]{\dfrac{sin^2\alpha+cos^2\alpha}{sin^2\alpha cos^2\alpha}}$

$=\sqrt[-2]{\dfrac{1}{sin^2\alpha\cdot cos^2\alpha}}=\sqrt{sin^2\alpha cos^2\alpha}$

$=|sin\alpha cos\alpha|$.

故原式成立.

△ 5. **求証：** $\dfrac{1+sinx}{1-sinx}=(tgx+secx)^2$.

**証：** 式左 $=\dfrac{(1+sinx)^2}{(1-sinx)(1+sinx)}=\dfrac{(1+sinx)^2}{1-sin^2x}$

$=\dfrac{(1+sinx)^2}{cos^2x}=\left(\dfrac{1+sinx}{cosx}\right)^2$

$=\left(\dfrac{1}{cosx}+\dfrac{sinx}{cosx}\right)^2=(tgx+secx)^2$.

故原式成立.

*6. **求証：** $\dfrac{1+2sinA\cdot cosA}{cos^2A-sin^2A}=\dfrac{1+tgA}{1-tgA}$.

**証：** 式左 $=\dfrac{sin^2A+2sinA\cdot cosA+cos^2A}{cos^2A-sin^2A}=\dfrac{(cosA+sinA)^2}{cos^2A-sin^2A}$