GAOZHONG WULI AOSAI JIANGYI

高中物理奥赛讲义

（第一分册）

◆ 曹晓彬 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中物理奥赛讲义

（第一分册）

◎主　编　曹晓彬

◎副主编　曹晓彬　郁建石

沈祖荣　高学波　杨　靖

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中物理奥赛讲义. 第一分册/曹晓彬主编. —杭州：浙江大学出版社，2008.3

ISBN 978-7-308-05824-7

Ⅰ. 高… Ⅱ. 曹… Ⅲ. 物理课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 021613 号

高中物理奥赛讲义(第一分册)

曹晓彬 主编

责任编辑 杨晓鸣 李建国(特邀)

封面设计 刘依群

出版发行 浙江大学出版社

(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)

(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)

(网址：http://www.zjupress.com

http://www.press.zju.edu.cn)

电话：0571-88925592，88273066(传真)

排 版 杭州大漠照排印刷有限公司

印 刷 杭州余杭人民印刷有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 18.5

字 数 440 千

版 印 次 2008 年 3 月第 1 版 2008 年 3 月第 1 次印刷

印 数 0001—8000

书 号 ISBN 978-7-308-05824-7

定 价 25.00 元

编写说明

高中物理奥林匹克竞赛已经开展了20多年，中国代表队在国际比赛中连年获得了骄人的成绩，极大鼓舞了广大参与物理竞赛的学生的学习兴趣。当然，要在国际竞赛中取得优异成绩，不仅需要教师有效指导、学生刻苦钻研，还需要一套好的辅导资料。我们本着为中学生物理竞赛做一点有益事情的宗旨，特邀请江苏、浙江、上海等地的国家物理奥林匹克竞赛的高级和一级教练，共同编写了一套“高中物理奥赛讲义”丛书，包括力学、光学、电学和原子物理学等内容，共三个分册。

丛书以例题讲解为主，精选了历年来世界各地优秀的竞赛试题。选取的原则是典型性，即试题要有代表性，能举一反三；指导性，即解决问题的方法对学生具有指导价值，能以不变应万变；新颖性，即选取的试题的物理背景或表现形式鲜活，给学生耳目一新的感觉；普适性，即内容要适合不同层次的学生，对参与不同层次的竞赛活动都有指导作用。其次，在选取试题时充分考虑覆盖面，力求做到面面俱到，为学生训练提供丰富的素材。再次，在试题编排上，按照从易到难、循序渐进的原则来安排内容，使学生容易接受，并在学习的过程逐步提高解决和分析问题的能力。

限于我们的水平，书中一定有不少缺陷，请读者提出宝贵的意见，以便今后修订、再版时改正。

编者

2008年江苏木椟

目录

第一章　运动学

1. 将一小球以 30m/s 的初速度竖直上抛，以后每隔 1s 抛出一球（空气阻力可以忽略不计），空中各球不会相碰. 问：

(1) 最多能有几个小球同时在空中？

(2) 设在 $t=0$ 时第一个小球被抛出，那么它应该在哪些时刻和以后抛出的小球在空中相遇而过？（取 $g=10\text{m/s}^2$）

解　(1) 小球在空中运动的时间为

$$t=\frac{2v_0}{g}=6\text{s}.$$

$t_0=0$ 时，将第一个小球抛出，它在第 6s 末回到原处，同时第七个小球即将被抛出. 在第六个小球抛出后且第一个小球尚未返回原处时，空中只有 6 个小球；当第七个小球抛出时，第一个小球已经落地，所以空中最多只有 6 个小球.

(2) 第一个小球在 $t=0$ 时抛出，而第 n 个小球在 Δt 后抛出，则在某一时刻 t 这两个小球的位移分别为

$$s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2, \quad ①$$

$$s'=v_0(t-\Delta t)-\frac{1}{2}g(t-\Delta t)^2. \quad ②$$

两小球在空中相遇的条件是其位移相等，即

$$v_0t-\frac{1}{2}gt^2=v_0(t-\Delta t)-\frac{1}{2}g(t-\Delta t)^2,$$

整理得　　$$t=\frac{1}{2}\Delta t+\frac{v_0}{g}.$$

其中 t 表示第一个小球和 Δt 后抛出的那个小球在空中相遇而过的那个时刻.

当 $\Delta t=1\text{s}$ 时，$t=\left(\frac{1}{2}\times1+\frac{30}{10}\right)\text{s}=3.5\text{s}$，这是与第二个小球相遇而过的时刻；

当 $\Delta t=2\text{s}$ 时，$t=\left(\frac{1}{2}\times2+\frac{30}{10}\right)\text{s}=4.0\text{s}$，这是与第三个小球相遇而过的时刻；

当 $\Delta t=3\text{s}$ 时，$t=4.5\text{s}$，这是与第四个小球相遇而过的时刻；

当 $\Delta t=4\text{s}$ 时，$t=5.0\text{s}$，这是与第五个小球相遇而过的时刻；

当 $\Delta t=5\text{s}$ 时，$t=5.5\text{s}$，这是与第六个小球相遇而过的时刻.

除上述分析计算法之外，还可用图像法解决本题. 根据题意，定性画出 $h-t$ 图像，如图 1-1 所示. 根据各球图像的交点及相应的坐标，可以看出：每一个小球在空中能与 5 个小球相遇，时间依次是 $t_1=3.5\text{s}$，$t_2=4.0\text{s}$，$t_3=4.5\text{s}$，$t_4=5.0\text{s}$，$t_5=5.5\text{s}$. 当然第一问同样可以迎刃而解.

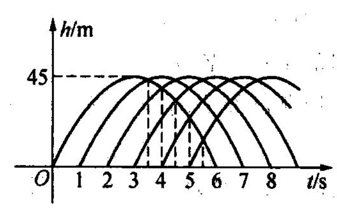

图 1-1

2. 一人站在地面上以初速度 v_1 向上抛出一小球，经过时间 t_0 后（$t_0\leqslant 2v_1/g$），又以一初速度 v_2 向上抛出另一小球，问：两球能否在空中相遇？若能相遇则在何处？

解　如图 1-2，取地面与竖直向上的直线的交点作为坐标原点，第一个球抛出的时刻为零时刻，则第一个球的运动学方程为 $x_1=$

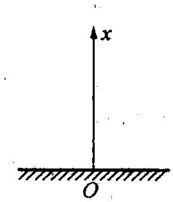

图 1-2

$v_1t-gt^2/2$;

第二个球的运动学方程为

$$x_2=v_2(t-t_0)-g(t-t_0)^2/2.$$

两球相遇时刻 t 它们的坐标必定相等,所以有 $x_1=x_2$,得

$$v_1t-gt^2/2=v_2(t-t_0)-g(t-t_0)^2/2.$$

即 $t=(v_2t_0+gt_0^2/2)/(v_2-v_1+gt_0)$.

在 t 时刻相遇,但 t 不可能是负值,所以有

$$\begin{cases}(v_2t_0+gt_0^2/2)/(v_2-v_1+gt_0)>0,\\ v_2-v_1+gt_0>0.\end{cases}$$

讨论:

(1) $v_2>v_1$. 在这种情况下,因为 $t_0>0$,所以必定满足上面的条件,因此肯定会相遇,将上面求得的 t 代入 x_1 或 x_2,得

$$x=v_1[(v_2t_0+gt_0^2/2)/(v_2-v_1+gt_0)]-g[(v_2t_0+gt_0^2/2)/(v_2-v_1+gt_0)]^2/2.$$

关于两球在何时相遇,第一个球是在上升或下降阶段,要看第一球的速度.

若 $v_1-gt>0$,则在第一个球上升时刻相遇;

若 $v_1-gt<0$,则在第一个球下降时刻相遇.

(2) $v_2=v_1=v_0$. 两球一定会在空中相遇,相遇时刻为 $t=v_0/g+t_0/2$.

相遇的坐标位置 $x=(v_0^2/g-gt_0^2/4)/2$.

由于原题已经明确 $t_0\leqslant 2v_1/g$,所以 x 恒大于零.

相遇时,第一个球一定是在下降阶段,因为 $t=v_0/g+t_0/2>v_0/g$,而第二个球可由速度判断 $v_0-g(t-t_0)=v_0-g(v_0/g+t_0/2-t_0)=gt_0/2>0$,所以第二个球是在上升过程中.

(3) $v_2<v_1$. 要求相遇时刻 $t>0$,即 $t=(v_2t_0+gt_0^2/2)/(v_2-v_1+gt_0)>0$,则 $v_2-v_1+gt_0>0$;$t_0>(v_1-v_2)/g$.

在该情况下第二个球只能在第一个球下降时相遇,可以求得结果为

$$x=\frac{2(v_1-gt_0)(2v_2+gt_0)}{4(v_2-v_1+gt_0)^2}\left(v_2-v_1+\frac{1}{2}gt_0\right)t_0.$$

从上面可见,若 $v_2<v_1-\frac{1}{2}gt_0$,则 $x<0$,不可能在空中相遇.

3. 速率为 30km/h 的两辆火车在相挨并行的轨道上相向而行,当两火车相距 60km 时,一只每小时能飞 60km 的鸟离开甲车直向乙车飞去,当鸟到达乙车时就立即飞回甲车,以后就继续这样来回地飞. 问:

(1) 在两车相遇以前,鸟能够完成几次从一车飞到另一车?

(2) 鸟一共飞行了多少距离?

解 (1) 两车各行驶 30km 时相遇,经过的时间为 1h,因而鸟也飞了 1h. 当鸟从甲车往乙车飞时,取甲车为参照系,从甲车到乙车的方向为正方向,则乙车 $v'_乙=60$km/h,方向为负,鸟对甲车的速度 $v'_1=30$km/h,方向为正. 鸟第一次与乙车相遇,得 $t_1=\dfrac{d_1}{v'_1+v'_乙}$.

将 $d_1=60$km 及 v'_1、$v'_乙$ 代入,得 $t_1=\frac{2}{3}$h. 第一次飞行结束时,甲车、乙车相距 $d_2=d_1-v'_乙t_1$.

第二次飞行:鸟到达乙车后,立即回头向甲车飞. 这次飞行和第一次不同,因为此时是以甲车为参照系,甲车是不动的,但鸟和乙车同时一直向甲前进,乙车的前进不影响第二次飞行,但却使鸟的第三次飞行距离变短了.

设第二次飞行需时 t_2,鸟飞行的距离为 d_2,第二次飞行鸟的速度 $v'_2=90$km/h,方向为负,则 $d_2=v'_2t_2$.

将 t_1 的关系式代入得

$$t_2=\frac{v'_1d_1}{(v'_1+v'_乙)v'_2}=\frac{1}{3}t_1.$$

第二次飞行结束时,甲车与乙车相距

$$d_3=d_1-v'_乙t_1-v'_乙t_2.$$

依上面方法可得第三次飞行所需的时间为第二次的 1/3,依此类推,即有 $t_n=\frac{1}{3}t_{n-1}$,则

$$t_1+t_2+\cdots+t_n=1,$$

即 $\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{27}+\dfrac{2}{81}+\cdots+\dfrac{2}{3^n}=1.$

由级数算法可知上式中的 $n \to \infty$，即鸟必须飞无穷多次，但实际上鸟不会飞无穷多次，因为鸟飞到后来两车之间的距离愈来愈小，小到只有分子大小了，这在宏观世界中早已略去不计了。

(2) 鸟一共飞行的距离 $s = vt = 60 \times 1 = 60(\text{km})$.

4. 蚂蚁离开巢沿直线爬行，它的速度与到蚁巢中心的距离成反比，当蚂蚁爬到距巢中心 $L_1 = 1\text{m}$ 的 A 点处时，速度是 $v_1 = 2\text{cm/s}$，试问：蚂蚁从 A 点爬到距巢中心 $L_2 = 2\text{m}$ 的 B 点所需的时间为多少？

解 因蚂蚁运动的速度 v 与蚂蚁离巢的距离 x 成反比，故 $1/v \propto x$. 作出 $1/v \neq x$ 图像如图 1-3 所示，为一条通过原点的直线，将 AB 连线分成相等的足够小 n 段，每一小段的时间 $\Delta t_i = \Delta x/v_i$，其数值近似对应着 $1/v - x$ 图像中矩形的面积，当 $n \to \infty$ 时，矩形面积之和即等于梯形面积，故蚂蚁从 A 到 B 的时间：

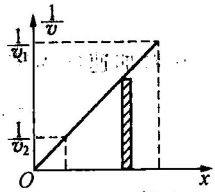

图 1-3

$$T = \frac{\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)(L_2 - L_1)}{2} = \frac{L_2^2 - L_1^2}{2L_1 v_1} = 75\text{s}.$$

注 想想看，虽然 $v \neq 1/x$ 图像也为直线，但为什么不能由 $v \neq 1/x$ 图求得结果.

5. 如图 1-4 所示，在笔直公路上前后行驶着甲、乙、丙三辆汽车，速度分别为 6m/s、8m/s、9m/s. 当甲、乙、丙三车依次相距 5m 时，乙车驾驶员发现甲车开始以 1m/s^2 的加速度做匀减速运动，即刻也做匀减速运动，丙车发现后也同样处理，直到三辆车都停下来未发生撞车事件. 试问：丙车做减速运动的加速度至少为多大？

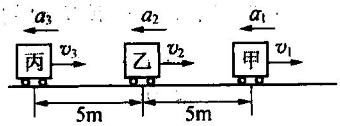

图 1-4

解 先分析两车行驶中的一种特殊情况，即两车都停下来时刚好接触在一起，则由

$$t_1 = \frac{v_1}{a_1},\ a_2 = \frac{v_2}{t_1},\ \Delta s = \frac{1}{2}(a_2 - a_1)t_1^2,$$

得
$$\Delta s = \frac{v_1 v_2 - v_1^2}{2a_1}.$$

当两车的距离 $\Delta s \leqslant \dfrac{v_1 v_2 - v_1^2}{2a_1}$ 时，以前车为参照系有

$$(v_2 - v_1)^2 = 2(a_2 - a_1)\Delta s,$$

即
$$a_2 = a_1 + \frac{(v_2 - v_1)^2}{2\Delta s}. \qquad ①$$

当两车的距离为 $\Delta s > \dfrac{v_1 v_2 - v_1^2}{2a_1}$ 时，由

$$t_1 = \frac{v_1}{a_1},\ t_2 = \frac{v_2}{a_2},\ \Delta s = \frac{1}{2}a_2 t_2^2 - \frac{1}{2}a_1 t_1^2,$$

得
$$a_2 = \frac{v_2^2 a_1}{v_1^2 + 2a_1 \cdot \Delta s}. \qquad ②$$

由题中条件，甲、乙两车之间有

$$\frac{v_1 v_2 - v_1^2}{2a_1} = 6\text{m} > \Delta s,$$

因此，据 ① 式可得乙车做减速运动的加速度 $a_2 = 1.4\text{m/s}^2$.

而对乙、丙两车，它们之间有

$$\frac{v_2 v_3 - v_2^2}{2a_2} = \frac{4}{1.4} < \Delta s.$$

因此，由 ② 式可得丙车做减速运动的加速度 $a_3 = 1.45\text{m/s}^2$.

6. 小球从高 $h_0 = 180\text{m}$ 处自由落下，着地后跳起又落下，每与地面相碰一次，速度就减少 $\dfrac{1}{n}(n = 2)$.

(1) 作出小球的 $v \neq t$ 图像（向上为正）；

(2) 求小球从下落到停止的总时间和总路程.（g 取 $10\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$）

解 (1) 小球运动的 $v \neq t$ 图像如图 1-5 所示.

(2) 小球从 h_0 高处落地时，速率 $v_0 = \sqrt{2gh_0} = 60\text{m/s}$. 第一次跳起时和又落地时速率 $v_1 = v_0/2$，第二次跳起时和又落地时速

率 $v_2 = v_0/2^2 \cdots$ 第 m 次跳起时和又落地时速率 $v_m = v_0/2^m$，每次跳起的高度依次为 $h_1 = \dfrac{v_1^2}{2g} = \dfrac{h_0}{n^2}$，$h_2 = \dfrac{v_2^2}{2g} = \dfrac{h_0}{n^4} \cdots$

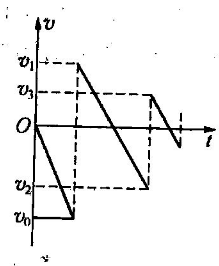

图 1－5

总路程

$$\sum s = h_0 + 2h_1 + 2h_2 + \cdots + 2h_m + \cdots$$
$$= h_0 + \frac{2h_0}{n^2}\left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \cdots + \frac{1}{n^{2m-2}}\right) + \cdots$$
$$= h_0 + \frac{2h_0}{n^2 - 1} = h_0 \cdot \frac{n^2+1}{n^2-1} = \frac{5}{3}h_0$$
$$= 300(\text{m}).$$

总时间

$$\sum t = t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_m + \cdots$$
$$= \frac{v_0}{g} + \frac{2v_1}{g} + \cdots + \frac{2v_m}{g} + \cdots$$
$$= \frac{v_0}{g}\left[1 + 2\cdot\frac{1}{n} + \cdots + 2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^m + \cdots\right]$$
$$= \frac{v_0}{g}\cdot\frac{n+1}{n-1}$$
$$= \frac{3v_0}{g}$$
$$= 18(\text{s}).$$

7. $t = 0$ 时刻从水平面上的 O 点，在同一铅垂面上同时朝两方向发射初速度分别为 $v_A = 10\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，$v_B = 20\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的两质点 A、B，如图 1－6 所示，求：

(1) $t = 1\text{s}$ 时 A、B 相距多远？

(2) 在铅垂面 xOy 上，从原点 O 出发朝平面各方向射出相同速率 v_0 的粒子，今以朝 x 正向(水平)射出的粒子为参考点，确定其他粒子在未落地前的 t 时刻的位置组成的曲线。

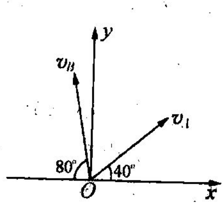

图 1－6

解 (1) 以 A 为运动参照系，由如图 1－7 所示矢量图可知，B 对 A 的相对速度必与 v_A 垂直，所以

$$v_{BA} = \sqrt{v_B^2 - v_A^2}.$$

又因为 B 对 A 的相对加速度为零，故在 $t = 1\text{s}$ 时，A、B 相距为

$$s = v_{BA}t = 10\sqrt{3}(\text{m}).$$

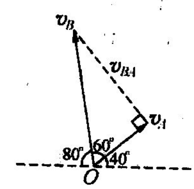

图 1－7

(2) 以水平向 x 正向射出的粒子为参照系，设出射粒子速度与水平成 θ 角，此粒子相对水平运动粒子速度为

$$v_x = v_0\cos\theta - v_0;$$
$$v_y = v_0\sin\theta.$$

相对加速度为零，所以有

$$x = v_0 t\cos\theta - v_0 t;$$
$$y = v_0 t\sin\theta.$$

利用 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，可得

$$(x + v_0 t)^2 + y^2 = v_0^2 t^2.$$

此曲线是以 $(-v_0 t, 0)$ 为圆心、$v_0 t$ 为半径的圆。

8. 大炮在山脚直接对着倾角为 α 的山坡发射炮弹，炮弹初速度为 v_0，要在山坡上达到尽可能远的射程，则大炮的瞄准角应为多少？最远射程有多少？

解 设炮弹的初速度与斜坡成 θ 角，建立如图 1－8 所示的坐标系，则

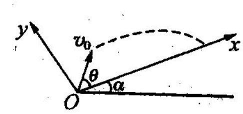

图 1－8

$$x = v_0\cos\theta t - \frac{1}{2}g\sin\alpha t^2,$$
$$y = v_0\sin\theta t - \frac{1}{2}g\cos\alpha t^2.$$

炮弹打到坡上时 $y = 0$，所需时间

$$t = \frac{2v_0\sin\theta}{g\cos\alpha}.$$

代入 x 的表达式中，得

$$x=\frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g\cos\alpha}-\frac{2v_0^2\sin\alpha\sin^2\theta}{g\cos^2\alpha}$$
$$=\frac{v_0^2[\sin(\alpha+2\theta)-\sin\alpha]}{g\cos^2\alpha}.$$

显然，当 $\alpha+2\theta=\frac{\pi}{2}$ 即 $\theta=\pi/4-\alpha/2$ 时，

$$x_{\max}=\frac{v_0^2(1-\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha}.$$

9. 一个喷水池的喷头以相同的速率喷出大量水射流. 这些水射流以与地面成 $0°\sim 90°$ 的所有角度喷出，竖直射流可高达 2.0m，如图 1-9 所示. 取 $g=10\text{m/s}^2$，试计算水射流在水池中落点所覆盖的圆的半径.

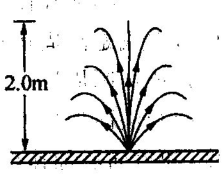

图 1－9

解 先求射流的出口速率 u. 考虑竖直射流，它在加速度为 $-g$ 的情况下升高 2.0m.

$u^2=v^2+2gs$，$v=0$，代入数据求得 $u=6.32\text{m/s}$.

若一射流的初速度为 (u_x, u_y)，则所走的竖直位移的大小为

$$0=u_yt-gt^2/2,$$

射流飞行时间为 $t=2u_y/g$，飞行的水平距离为

$$r=u_xt=2u_xu_y/g=2u^2\sin\theta\cos\theta/g.$$

与 $45°$ 角对应的射流落地处，喷流最远的范围半径为

$$r=2u^2(1/\sqrt{2})(1/\sqrt{2})/g=u^2/g=4.0\text{m},$$

即射流喷出的圆的半径是 4.0m.

10. 一斜面体两斜面的倾角分别为 θ 和 φ，如图 1-10 所示，一物体从倾角为 θ 的斜面底角处做斜上抛运动. 为使物体从斜面体的顶角处切过，并落在倾角为 φ 的斜面底角处，则物体的抛射角 α 与倾角 θ、φ 应满足什么关系？(用简单形式写出)

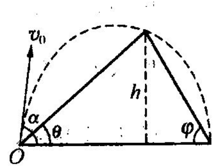

图 1－10

解 以水平向右为 x 轴正向、竖直向上为 y 轴正向，斜抛运动的轨迹方程为

$$\begin{cases}x=v_0\cos\alpha t,\\ y=v_0\sin\alpha t-\dfrac{1}{2}gt^2.\end{cases}$$

消去参量 t 得 $y=\tan\alpha x-\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$.

由题意得

$$h=\tan\alpha\cdot h\cot\theta-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}h^2\cot^2\theta, \quad ①$$

$$0=\tan\alpha\cdot h(\cot\theta+\cot\varphi)-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}h^2(\cot\theta+\cot\varphi)^2. \quad ②$$

由 ①、② 两式消去 $\dfrac{gh}{2v_0^2\cos^2\alpha}$，整理后得

$$\tan\alpha=\tan\theta+\tan\varphi.$$

11. 一位足球运动员想在球门正前方 50m 处将球踢进球门，踢出的足球具有的初速率为 25m/s. 为防止守门员将球接住，他选择进球位置在正前方球门水平横梁下方 80cm 之内区域. 若横梁高度为 3.44m，试问：他应在什么倾角范围内将球踢出？

解 球的斜抛轨道方程为

$$y=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}x^2+(\tan\varphi)x.$$

今取 $x=50\text{m}$，$v_0=25\text{m/s}$，φ 便为所求倾角. 据题意，要求

$$2.64\text{m}<y<3.44\text{m}.$$

代入轨道方程，有

$$2.64<50\tan\varphi-19.6(\tan^2\varphi+1)<3.44,$$

即 $$\begin{cases}\tan^2\varphi-2.55\tan\varphi+1.13<0,\\ \tan^2\varphi-2.55\tan\varphi+1.18>0.\end{cases}$$

由此可解得 φ 的取值范围为 $29.7°<\varphi<31.2°$，或 $62.9°<\varphi<63.2°$.

12. 如图 1－11 所示，一枪自同一地点发出两颗子弹，发射的时间间隔为 Δts. 若两子弹在同一平面内运行，则其

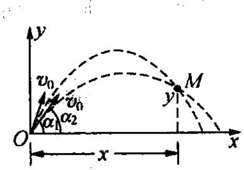

图 1－11

弹性的，与地板碰后立即静止，且碎片碰不到墙）. 求碎片落到地板的范围的半径.

解 设以抛出点为坐标原点，抛射角为 α，并以水平方向为 x 轴，竖直向上为 y 轴，则

$$-l_2 = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2,$$

$$R = vt\cos\alpha.$$

利用 $v^2\sin^2\alpha + v^2\cos^2\alpha = v^2$，得

$$R^2 = (v^2 + gl_2)t^2 - \frac{g^2t^4}{4} - l_2^2$$

$$= \left(\frac{v^2 + gl_2}{g}\right)^2 - l_2^2 - \left(\frac{gt^2}{2} - \frac{v^2 + gl_2}{g}\right)^2$$

$$\leqslant \left(\frac{v^2 + gl_2}{g}\right)^2 - l_2^2.$$

从中得到 $R_{max} = \frac{v}{g}\sqrt{v^2 + 2gl_2}$. 碎片飞行这段距离的时间对应 $\frac{gt'^2}{2} - \frac{v^2 + gl_2}{g} = 0$，即

$$t' = \frac{1}{g}\sqrt{2(v^2 + gl_2)},$$

故 $$\cos\alpha' = \frac{R_{max}}{vt'} = \sqrt{\frac{v^2 + 2gl_2}{2(v^2 + gl_2)}}.$$

该碎片到达灯头上方的最大高度

$$h' = \frac{(v\sin\alpha')^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}(1 - \cos^2\alpha')$$

$$= \frac{v^4}{4g(v^2 + gl_2)}$$

显然，若存在天花板，则须有 $l_1 \geqslant h'$，即 $l_1 \geqslant \frac{v^4}{4g(v^2 + gl_2)}$ 的情况下，$R_{max} = \frac{v}{g}\sqrt{v^2 + 2gl_2}$. 而在 $l_1 < \frac{v^4}{4g(v^2 + gl_2)}$ 的情况下，对应碎片轨迹与天花板相切，才能使碎片在地板上斑点的半径最大，因为碎片反弹后的轨道与“切线的”轨道相比较，“圆形”任何时候也不会与“切线的”轨道交叉. 此时

$$v^2\sin^2\theta = 2gl_1,$$

故 $$R_{max} = \frac{\sqrt{v^2\sin^2\theta + 2gl_2} + v\sin\theta}{g}\cdot v\cos\theta$$

$$= \frac{\sqrt{v^2 - 2gl_1}\left[\sqrt{2gl_1} + \sqrt{2g(l_1 + l_2)}\right]}{g}.$$

16. 如图 1-14 所示，球 1 和球 2 均从同一点水平被抛出，起抛点离水平地面的高度为 H，两球的水平初速分别为 v_1 和 v_2（$v_1 > v_2$）. 球 1 被抛出后刚好能越过位于 x_p 处的竖直杆的顶端，并落于地面上的 R 点，R 点与 O 点的距离为 R. 球 2 被抛出后落于地面，与地面做弹性碰撞，反弹后也刚好能越过杆顶，并落在同一点 R. 试求：

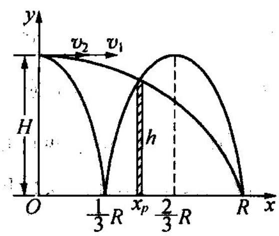

图 1-14

(1) 比值 $\frac{v_1}{v_2}$；(2) 杆的位置 x_p；(3) 杆的高度 h.

解 (1) 如图 1-14 所示，取平面直角坐标 xOy，由平抛运动的轨迹方程，球 1 的轨迹方程及球 2 的轨迹方程（被抛出后，反弹前）分别为

球 1：$y = H - \frac{g}{2v_1^2}x^2$；

球 2：$y = H - \frac{g}{2v_2^2}x^2$.

球 1 落地点坐标为 $x = R$，$y = 0$.

球 2 落地点（第一次落地点，即反弹点）坐标为 $x = \frac{R}{3}$，$y = 0$.

代入各自的轨迹方程得 $\frac{v_1}{v_2} = 3$.

(2) 球 2 反弹后的轨迹最高点移到了 $x = \frac{2R}{3}$ 处，故球 2 反弹后的轨迹方程可表示为

$$y = H - \frac{g}{2v_2^2}x'^2.$$

式中：$x' = x - \frac{2}{3}R$.

代入得 $y = H - \frac{g}{2v_2^2}\left(x - \frac{2}{3}R\right)^2$.

把球 2 反弹后的轨迹方程与球 1 的轨迹方程联立，得两轨迹的交点，交点的 x 坐标满足

$$H - \frac{g}{2v_1^2}x^2 = H - \frac{g}{2v_2^2}\left(x - \frac{2}{3}R\right)^2.$$

把 $\frac{v_1}{v_2} = 3$ 代入，得 $x^2 = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2\left(x - \frac{2}{3}R\right)^2$

$$=9\left(x-\frac{2}{3}R\right)^2=(3x-2R)^2.$$

即 $$3x-2R=\pm x.$$

解出 $$x=R\text{ 或 }x=\frac{R}{2}.$$

其中 $x=R$ 是两球的公共落点,与所求杆的位置无关,弃去.故杆的位置为

$$x_p=\frac{R}{2}.$$

(3) 把杆的位置 $x=\dfrac{R}{2}$ 代入球1的轨迹方程,可求出杆的顶点的 y 坐标,即此杆的高度 h 为

$$h=H-\frac{g}{2v_1^2}\left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

球1落地点的坐标为 $x=R$, $y=0$,把它代入球1的轨迹方程,得

$$0=H-\frac{g}{2v_1^2}R^2.$$

由上式得出 v_1 与 H、R 的关系为

$$2v_1^2=\frac{gR^2}{H}.$$

代入上述 h 的公式,得出杆的高度为

$$h=H-\frac{g}{\frac{gR^2}{H}}\cdot\frac{R^2}{4}=H-\frac{H}{4}=\frac{3}{4}H.$$

17. 初速度为 v_0 的炮弹向空中射击,不考虑空气阻力,试求空间安全区域的边界方程.

解 这个问题可抽象为一个求射出炮弹在空中可能轨迹的包络线方程问题,包络线以外即为安全区域.如图1-15所示,在三维空间坐标中,设初速度 v_0 方向与 xy 平面成 θ 角,由抛体运动规律可建立时间 t 的三个参数方程

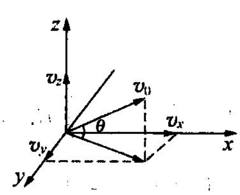

图1-15

$$\begin{cases}x=v_xt,\\ y=v_yt,\\ z=v_0\sin\theta\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2.\end{cases}$$

而 $$x^2+y^2=(v_0\cos\theta)^2t^2,$$

可得 $$z=\sqrt{x^2+y^2}\cdot\tan\theta-\frac{1}{2}g\frac{x^2+y^2}{v_0^2\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}\cdot\tan\theta-\frac{1}{2}g\frac{x^2+y^2}{v_0^2}-\frac{1}{2}g\frac{x^2+y^2}{v_0^2}\tan^2\theta.$$

即 $$\frac{g(x^2+y^2)}{2v_0^2}\tan^2\theta-\sqrt{x^2+y^2}\cdot\tan\theta+\frac{g(x^2+y^2)}{2v_0^2}+z=0.$$

这是发射角 θ 各不相同的炮弹的空间轨迹方程,此式有解时,必满足

$$\Delta=x^2+y^2-4\cdot\frac{g(x^2+y^2)}{2v_0^2}\cdot\left[\frac{g(x^2+y^2)}{2v_0^2}+z\right]\geqslant 0,$$

整理得包络线方程为

$$x^2+y^2+\frac{2v_0^2}{g}z-\frac{v_0^4}{g^2}=0.$$

该方程即为所求安全区域的边界方程.这里我们运用了曲线簇的包络线的数学模型处理了一个有实际意义的物理问题.

18. 如图1-16所示,倾角为 θ 的斜面光滑,自斜面上某处以速度 v 与斜面夹角为 α 的方向向斜面上抛出一质点(设质点与斜面间的碰撞是完全弹性的,即球入射方向与反射方向遵循光的反射定律),斜面足够长,要求质点最后仍能回到原出发点,问:α 角应满足什么条件?

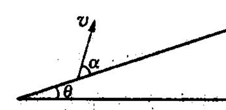

图1-16

解 如图1-17所示,在垂直于斜面方向上,质点具有不变的加速度 $a_y=g\cos\theta$.由于碰撞前后的速率不变,故质点落在斜面和离开斜面的速率相等,均为 $v_{y_0}=v\sin\alpha$,所以质点每两次碰撞之间所用的时间不变,均为 $t_0=2v_{y_0}/a_y=2v\sin\alpha/(g\cos\theta)$.质点从离开抛出点到沿平行于斜面方向速

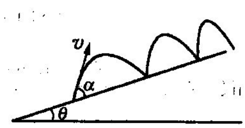

图1-17

度为零所用的时间为 T,有

$$0 = v\cos\alpha - g\sin\theta \cdot T,$$

得 $T = v\cos\alpha/(g\sin\theta) = \frac{kt_0}{2}$($k$ 为自然数).

当 k 为奇数时,说明了质点运动到距斜面最大距离处时沿平行于斜面方向上的速度为零;当 k 为偶数时,说明质点回到斜面时的速度为零,$\frac{v\cos\alpha}{g\sin\theta} = \frac{kv\sin\alpha}{g\cos\theta}$,即 $\tan\alpha\tan\theta = \frac{1}{k}$,所以质点最后能回到抛出点,则 α 角满足的条件是:$\tan\alpha = 1/k\tan\theta$(式中的 k 为自然数).

19. 弹性小球从高 h 处自由落下,落到与水平面成 θ 角的长斜面上,碰撞后以同样大的速度反弹回来.

(1) 求每个弹回点[第一点和第二点,第二点和第三点,…,第 n 点和第 $(n+1)$ 点]间的距离 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$.

(2) 求当斜面以匀速度 u 沿竖直方向向上运动时的 x_1 的数值.

解 (1) 坐标系选择如图 1-18 所示,小球第一次碰撞斜面时速度大小 $v_0 = \sqrt{2gh}$,反弹后初速大小不变,其方向是与 y 轴为对称的夹角 θ 方向,在 x、y 方向有

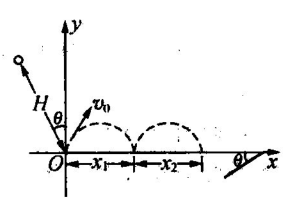

图 1-18

$$v_x = v_{0x} + a_x t = v_0\sin\theta + gt\sin\theta,$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t = v_0\cos\theta - gt\cos\theta,$$

$$x = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2,$$

$$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2.$$

令 $y = 0$,得第一、二次相碰时间间隔为

$$t_1 = \frac{2v_0}{g} = \frac{2\sqrt{2gh}}{g}.$$

代入后可求得 $x_1 = \frac{4v_0^2}{g} \cdot \sin\theta = 8h\sin\theta.$

第二次碰撞瞬间

$$v_{2x} = v_0\sin\theta + g\sin\theta \cdot \frac{2v_0}{g} = 3v_0\sin\theta,$$

$$v_{2y} = v_0\cos\theta - g\cos\theta \cdot \frac{2v_0}{g} = -v_0\cos\theta.$$

碰后 v_{2x} 不变化,$v_{2y} = v_{0y}$,可见每相邻两次碰撞的时间间隔均为 $t = t_1$,则有

$$x_2 = 3v_0\sin\theta \cdot \frac{2v_0}{g} + g\sin\theta \cdot \left(\frac{2v_0}{g}\right)^2 = 2 \times 8h\sin\theta.$$

第 n 次碰后反弹时

$$v_{nx} = (2n-1)v_0\sin\theta,$$

$$v_{ny} = v_0\cos\theta.$$

由此得 $x_n = n \cdot 8h\sin\theta.$

(2) 当斜面以匀速度 u 沿竖直方向向上运动时,则球相对斜面速度大小为 $(v+u)$,用 $(v+u)$ 代替 v_0 代入 x_1,得

$$x_1 = 4[u + (2gh)^{1/2}]^2\sin\theta/g.$$

20. 倾角为 α 的一个光滑斜面,由斜面上一点 O 通过斜面最大斜率的竖直平面内斜上抛一个小球,初速为 v,抛出方向与斜面交 β 角,$\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

(1) 若小球与斜面的每次碰撞不消耗机械能,并且小球在第 n 次与斜面相碰时正好回到抛射点 O,试求 α、β、n 满足的关系式.

(2) 若小球与斜面每次碰撞后,与斜面垂直的速度分量满足:碰后的值是碰前值的 e 倍,$0 < e < 1$,并且小球在第 n 次与斜面相碰时正好回到抛射点 O,试求 α、β、n 和 e 满足的关系式.

(3) 由(2),若其中第 r 次与斜面相碰时,小球正好与斜面垂直相碰,试证明此时满足关系式:$e^n - 2e^r + 1 = 0$.

解 (1) 画出图 1-19,并在图中取定 x、y 轴.斜上抛小球,小球在斜面上多次碰撞,形成多条抛物线.小球在 y 方向做多次来回运

动,而在 x 方向只有一次: x 由近到远,再回到原点 O. 因此,y 方向可逐条抛物线讨论,而 x 方向可以统一讨论.

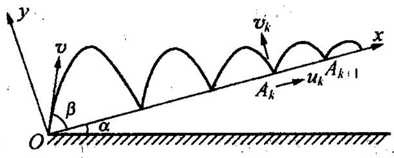

图 1-19

设 A_k 为小球第 k 次与斜面相碰的点,u_k、v_k 是小球第 k 次与斜面相碰后速度的 x、y 分量. 加速度的 x、y 分量为 $a_x=-g\sin\alpha$, $a_y=-g\cos\alpha$,所以由 A_k 到 A_{k+1} 所经历的时间 t_{k+1} 满足

$$0=v_k t_{k+1}-\frac{1}{2}(g\cos\alpha)\cdot t_{k+1}^2.$$

得到

$$t_{k+1}=\frac{2v_k}{g\cos\alpha}.$$

由上式可以得到小球从 O 点被抛出开始,直到抵达 A_k 所经历的时间为

$$T_k=t_1+t_2+\cdots+t_k=\frac{2(v_0+v_1+\cdots+v_{k-1})}{g\cos\alpha}.$$

因为小球与斜面每次碰撞中不消耗能量,所以

$$v_0=v_1=\cdots=v_{k-1}=v\sin\beta.$$

代入得 $\quad T_k=2kv\dfrac{\sin\beta}{g\cos\alpha}.$

因斜面是光滑的,利用 x 分量运动方程

$$\overline{OA_k}=(v\cos\beta)T_k-\frac{1}{2}(g\sin\alpha)T_k^2,$$

根据题中要求 $\overline{OA_n}=0$,得到

$$T_n=\frac{2v\cos\beta}{g\sin\alpha}.$$

联立解得 $\cot\alpha\cdot\cot\beta=n$.

(2) 利用(1)中得到的结果,小球从 O 点被抛出开始,直到抵达 A_k 所经历的时间表达式为

$$T_k=\frac{2(v_0+v_1+\cdots+v_{k-1})}{g\cos\alpha}.$$

小球与斜面垂直速度分量满足: $v_0=v\sin\beta$, $v_1=ev\sin\beta$, $v_2=e^2v\sin\beta\cdots$ 所以

$$T_k=\frac{2v\sin\beta(1+e+e^2+\cdots+e^{k-1})}{g\cos\alpha}=\frac{2v\sin\beta(1-e^k)}{g\cos\alpha(1-e)}.$$

再利用 x 分量方程

$$\overline{OA_k}=(v\cos\beta)T_k-\frac{1}{2}(g\sin\alpha)T_k^2,$$

根据题中要求 $\overline{OA_n}=0$,得到

$$T_n=\frac{2v\cos\beta}{g\sin\alpha}.$$

整理得到 $(1-e)\cot\alpha\cdot\cot\beta=1-e^n$.

(3) 接上小题,现在小球在第 r 次与斜面相碰时与斜面垂直,即 $u_r=0$,而

$$u_r=v\cos\beta-(g\sin\alpha)T_r,$$

所以 $\quad T_r=\dfrac{v\cos\beta}{g\sin\alpha}.$

整理后得到 $(1-e)\cot\alpha\cdot\cot\beta=2(1-e^r)$,

代入前面结论得 $e^n-2e^r+1=0$.

得证.

21. 时钟表从零点开始计时,在 12 小时内,长针和短针:

(1) 在哪些时刻重合?

(2) 在哪些时刻成反向直线?

(3) 在哪些时刻成直角?

解 长针的角速度为

$$\omega_1=\frac{2\pi}{60}\text{rad/min},$$

短针的角速度为

$$\omega_2=\frac{2\pi}{12\times60}\text{rad/min}.$$

(1) 两针重合即两针转过的角度之差为

$\Delta\theta=\theta_1-\theta_2=\omega_1t-\omega_2t=2k\pi$, $(k=0,1,2,3,\cdots,11)$

所以

$$t=\frac{2k\pi}{\omega_1-\omega_2}=\frac{2k\pi}{2\pi/60-2\pi/(12\times60)}=\frac{12\times60}{11}k.$$

当 $k=0$ 时，$t=0$，…即开始时刻；

当 $k=1$ 时，$t_1=\frac{12\times60}{11}=65\frac{5}{11}$(min)，…即 1:5′27″3；

当 $k=2$ 时，$t_2=\frac{12\times60}{11}\times2=130\frac{10}{11}$(min)，…即 2:10′54″5；

……

当 $k=11$ 时，$t_{11}=\frac{12\times60}{11}\times11=720$(min)，…即 12:00.

可见，两针重合共出现 11 次(起始点不计在内).

(2) 两针成反向直线即两针夹角为 $(2k-1)\pi$，依照上面的算法有

$$t=\frac{(2k-1)\pi}{\omega_1-\omega_2}=\frac{(2k-1)\pi}{2\pi/60-2\pi/(12\times60)}=\frac{12\times30}{11}(2k-1),$$

$k=1, 2, 3, \cdots, 11.$

可见共出现 11 次.

(3) 两针互相垂直即夹角为 $(k\pi-\pi/2)$，则得结果为

$$t=\frac{12\times30}{11}\left(k-\frac{1}{2}\right),\ k=1, 2, 3, \cdots, 22.$$

此现象共出现 22 次.

22. *图 1－20(a) 中的黑色圆盘上有一白点 S，盘绕垂直于盘面的中心轴以 $f_0=50$Hz 的频率旋转，如果用频率为 f 的频闪光去照射该盘，在盘上能稳定地出现如图 1－20(b) 所示的三个白点，请算出两种可能的 f 值，其一大于 f_0，其二小于 f_0. 又若取 f 为 51Hz，那么在盘上能观察到什么现象？*

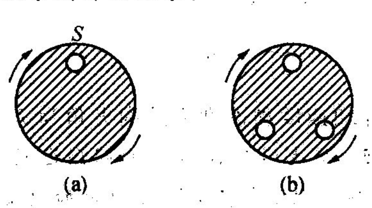

图 1－20

解 (1) 如图 1－21 所示，将已被观察到的三个白点位置分别记为 A、B 和 C. 若 $t=0$ 时白点在 A 位置，那么白点在 B 或 C 位置的时刻应分别为

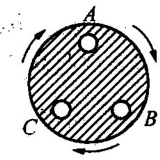

图 1－21

$$t_B=\left(k+\frac{1}{3}\right)T_0,$$

$k=0, 1, 2\cdots$

$$t_C=\left(k+\frac{2}{3}\right)T_0,$$

其中 $T_0=\frac{1}{f_0}$是圆盘旋转周期. 总可假设 $t=0$时频闪光第一次照亮圆盘，即白点在 A 处，而后便有两种可能：

① 频闪光第二次照亮时白点在 B 位置，则要求频闪周期 $T=\frac{1}{f}$满足

$$T=\left(k_1+\frac{1}{3}\right)T_0,\ k_1=0, 1, 2\cdots$$

即 $$f=\frac{1}{T}=\frac{3}{3k_1+1}f_0.$$

而后在 $t=2T=\left(2k_1+\frac{2}{3}\right)T_0$ 照亮时，白点在 C 位置；在 $t=3T=(3k_1+1)T_0$ 照亮时，白点在 A 位置. 如此重复下去，即能在圆盘上稳定地出现如图 1－20(b)所示的三个白点.

② 频闪光第二次照亮时白点在 C 位置，则 T 须满足

$$T=\left(k_2+\frac{2}{3}\right)T_0,\ k_2=0, 1, 2\cdots$$

即 $$f=\frac{3}{3k_2+2}f_0.$$

由类似分析知，这也能在圆盘上稳定地出现如图 1－20(b)所示的三个白点.

综上所述，全部可取的频闪光频率为

$$f:\ 3f_0,\ \frac{3}{4}f_0,\ \frac{3}{7}f_0\cdots\left(\frac{3}{3k_1+1}f_0\right);$$

$$或\ f:\ \frac{3}{2}f_0,\ \frac{3}{5}f_0,\ \frac{3}{8}f_0\cdots\left(\frac{3}{3k_2+2}f_0\right).$$

其中大于 f_0(50Hz)的 f 解为 $3f_0$(150Hz)与 $\frac{3}{2}f_0$(75Hz)，小于 f_0 的 f 解为 $\frac{3}{4}f_0$(37.5Hz)、

$\frac{3}{5}f_0$(30Hz)等无穷多个. 实际上 f 太小时,"全黑"时间将太长,故不宜取.

(2) 若 f(例如51Hz)稍大于 f_0,则 T 稍小于 T_0,白点在 A 位置被照亮后,经 T 时间转过 $\frac{T}{T_0}$ 周 $\left[相当于逆时针偏转\left(1-\frac{T}{T_0}\right)周\right]$ 时又被照亮. 因此,白点逆时针倒退一周所需时间便为

$$\left(\frac{1}{1-\frac{T}{T_0}}\right)T=\frac{T_0T}{T_0-T}.$$

倒退频率为 $\quad f_{逆}=\frac{T_0-T}{T_0T}.$

将 $T_0=\frac{1}{f_0}$、$T=\frac{1}{f}$ 代入后,即得

$$f_{逆}=f-f_0,$$

可见,白点将以 $f-f_0=1\text{Hz}$ 的频率逆时针倒退.

23. 如图1-22所示,在半径为 R 的水平圆板中心轴正上方 h 处以初速度 v_0 水平抛出一小球,圆板做匀速转动. 当圆板上的 $\overline{OB}$ 转到与 v_0 平行时:

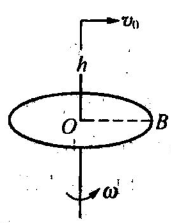

图1-22

(1) 若小球恰好落在圆板上 B 点,则初速度 v_0 为多少?圆板转动的角速度满足什么条件?

(2) 若在一定高度处有若干个相同的小球,每秒钟平抛出 N 个,则发现小球在板边缘共有6个均匀分布的落点,问这些小球的初速度是否相同?圆板转动的角速度为多少?(不计空气阻力)

解 (1) 小球做平抛运动,经 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ 着板,应有 $R=v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$,

得 $$v_0=R\sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

圆板转动的角速度满足

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{t/n}=2\pi n\sqrt{\frac{g}{2h}},(n\in\mathbf{N}).$$

(2) 这些小球平抛的初速度 v_0 相同,才能都落于圆板的边缘,满足题目的要求. 圆板转动的角速度满足

$$\frac{1}{N}=\left(\frac{1}{6}+k\right)\cdot\frac{2\pi}{\omega},即\ \omega=2\pi N\left(k+\frac{1}{6}\right);$$

或 $$\frac{1}{N}=\left(\frac{5}{6}+k\right)\cdot\frac{2\pi}{\omega},$$

即 $$\omega=2\pi N\left(k+\frac{5}{6}\right),$$

$$(k=0,1,2,\cdots).$$

24. 滑冰运动员在沿100m长的半圆形线路上把他的速率从2.0m/s均匀地增加到12.0m/s. 问:在中间点处他的速率是多少?在该处,他的速度和加速度之间的夹角是多少?

解 运动员在半圆形线路上运动满足

$$s=\frac{1}{2}(v_0+v_t)t,$$

即运动时间 $t=\frac{2s}{v_0+v_t}=\frac{100}{7}\text{s}.$

运动员的切向加速度的大小为

$$a_\tau=\frac{v_t-v_0}{t}=0.7\text{m/s}^2.$$

由匀加速直线运动的公式可得运动员在线路中间点的速率为

$$v=\sqrt{v_0^2+2a_\tau s_{中}}=8.6\text{m/s}.$$

如图1-23所示,运动员在线路中间点的法向加速度的大小为

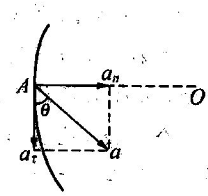

图1-23

$$a_n=\frac{v^2}{r}=\frac{v^2}{s/\pi}=2.32\text{m/s}^2.$$

$$\tan\theta=\frac{a_n}{a_\tau}=3.3.$$

即加速度和速度之间的夹角为73.2°.

25. 质点沿半径为 R 的圆周运动,初速度为 v_0,在运动过程中,点的切向加速度与法向

加速度恒相等，求经时间 T 质点的速度 v.

解 取运动过程中第 i 个极短时间 Δt_i，有

$$\lim_{\Delta t_i\to 0}\frac{v_i-v_{i-1}}{\Delta t_i}=\frac{v_i^2}{R},$$

则
$$\begin{aligned}T&=\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum\Delta t_i=R\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i-v_{i-1}}{v_i^2}\\&=R\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i-v_{i-1}}{v_iv_{i-1}}\\&=R\left(\frac{1}{v_0}-\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}+\cdots+\frac{1}{v_{n-1}}-\frac{1}{v}\right)\\&=R\left(\frac{1}{v_0}-\frac{1}{v}\right),\end{aligned}$$

得
$$v=\frac{Rv_0}{R-v_0T}.$$

这是假定速率增加的结论，若速率减小，则 $v=\dfrac{Rv_0}{R+v_0T}$.

26. 如图 1－24 所示，线轴沿水平面做无滑动的滚动，并且线端 A 点速度为 v，方向水平．以铰链固定于点 B 的木板靠在线轴上，线轴的内、外径分别为 r 和 R．试确定木板的角速度 ω 与角 α 的关系．

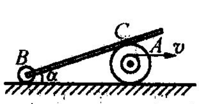

图 1－24

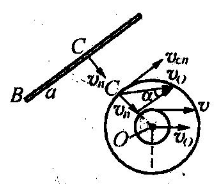

图 1－25

解 设木板与线轴相切于 C 点，则板上点与线轴上 C 点有相同的法向速度 v_n，而板上 C 点这个法向速度正是 C 点关于 B 轴的转动速度，如图 1－25 所示，即

$$v_n=\omega\cdot\overline{BC}=\omega\cdot R\cot\frac{\alpha}{2}. \qquad ①$$

现在再来考察线轴上 C 点的速度：它应是 C 点对轴心 O 的转动速度 v_{Cn} 和与轴心相同的平动速度 v_0 的矢量和．而 v_{Cn} 是沿 C 点切向的，则 C 点法向速度 v_n 应是

$$v_n=v_0\sin\alpha. \qquad ②$$

又由于线轴为刚体且做纯滚动，故以线轴与水平面切点为基点，应有

$$\frac{v}{R+r}=\frac{v_0}{R}. \qquad ③$$

将 ②、③ 两式代入 ① 式中，得

$$\omega=\frac{1-\cos\alpha}{R+r}v.$$

27. 如图 1－26 所示，矿砂从传送带 A 落到另一传送带 B，其绝对速度 $v_1=4\text{m/s}$，方向与铅垂线成 30° 角．设传送带 B 与水平面成 15° 角，其速度为 $v_2=2\text{m/s}$，则矿砂落入 B 带前一时刻相对于传送带 B 的相对速度是多少？当传送带 B 的速度为多大时，矿砂的相对速度才能与它垂直？

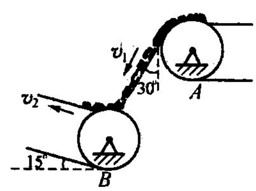

图 1－26

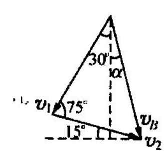

图 1－27

解 由 $v_{砂对B}=v_{砂对地}+v_{地对B}$ 知速度合成的矢量三角形如图 1－27 所示，有关的角度见图．由数学知识易得：

$$v_B=\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos 75^\circ}=3.98\text{m/s},$$

$$\frac{v_2}{\sin(\alpha+30^\circ)}=\frac{v_B}{\sin 75^\circ}.$$

得 $\alpha=-1^\circ$，即相对速度 v_B 与传送带 A 的速度 v_A 之间的夹角为 29°.

同理，要使矿砂的相对速度与传送带 B 的速度垂直，由矢量三角形的几何关系易得：

$$\begin{aligned}v'_2&=v_1\sin(90^\circ-75^\circ)=v_1\sin 15^\circ\\&=1.04\text{m/s}.\end{aligned}$$

28. 两相同的正方形铁丝框如图 1－28 所示放置，并沿对角线方向分别以速度 v 和 $2v$ 向两侧运动，问：两框交点 M 的运动速度应为多少？

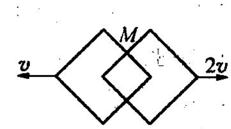

图 1－28