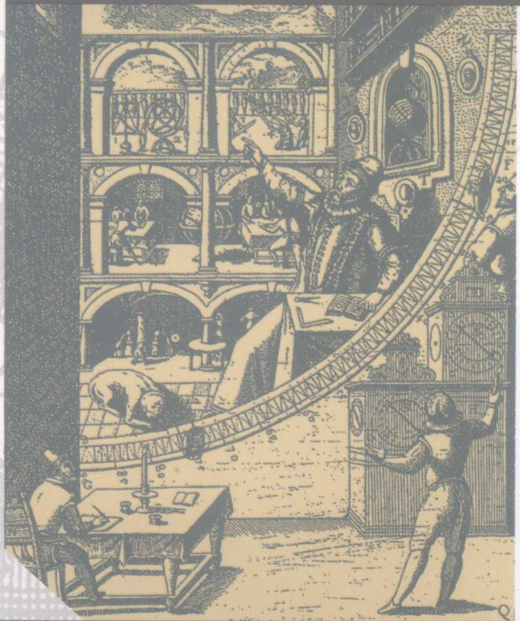
高等代数精选题解

杨子胥 编著



高等教育出版社

高等代数精选题解

杨子胥　编著

高等教育出版社

内容提要

本书共收录了828道题目，涵盖了高等代数(包括线性代数)的全部知识点，内容全面。每道题目都经过精选，提供详细的分析和解答，证明过程清晰，方法多样。有些题目在解答后还给出了评注，有助于读者进一步理解和掌握高等代数的知识和结构。全书共分十一章，章的安排与《高等代数》(第二版)(杨子胥编著)一致。另外，作者还精选了部分历年的考研题，并根据近年来教学研究的成果，编写了部分新题。

本书可作为"高等代数"的学习辅导用书，也可以供相关教师和学生参考；同时还可以作为研究生入学考试的复习用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等代数精选题解 / 杨子胥编著. —北京：高等教育出版社，2008.6

ISBN 978-7-04-023887-7

Ⅰ.高… Ⅱ.杨… Ⅲ.高等代数-高等学校-解题 Ⅳ.O15-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第056681号

策划编辑	张长虹	责任编辑	蒋 青	封面设计	张申申
版式设计	余 杨	责任校对	刘 莉	责任印制	陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京奥鑫印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	850×1168 1/32	版 次	2008年6月第1版
印 张	18.25	印 次	2008年6月第1次印刷
字 数	460 000	定 价	24.90元

物料号 23887-00

前　言

上世纪60年代前后，高等代数的内容大致包含以下两大部分：①多项式与方程；②线性代数初步(行列式、矩阵、线性方程组和二次型)。随着时间的推移和课改的需要，后来多项式与方程部分大大削弱，而增强了线性代数部分，即增加了线性空间、线性变换、λ－矩阵和欧氏空间等内容。其实，多项式的基本部分也是线性代数所必需的，因为例如矩阵的特征多项式、λ－矩阵的行列式因子、不变因子和初等因子等都要用到多项式。因此，当前的高等代数实际上就是线性代数，而本题解也完全可以称之为《线性代数精选题解》。

称作“精选”，实际上也只是相对而言。特别是，由于本题解包含了作者编著的《高等代数》(高等教育出版社2007年第二版)中的全部习题解答，而这些习题较注重基本知识、理论和方法的训练，多半并不是太难。其实，要较好地掌握一门功课，“三基”题目的基本训练也是非常重要的。

为了深造，当前考研之风有增无减。为适应这一形势，本题解选择了相当一部分近年一些高校的考研真题，希望借此能对考研的考生有所帮助。

为了能深入了解和掌握高等代数中的某些内容，本题解还摘编了近年发表于一些刊物中的有关论文，这对于深入领会高等代数中的相关内容会有很大的帮助。

由于编者水平所限，书中错误和不足之处恐在所难免，恳请读者批评指正。

杨子胥

2008.1

目　录

第一章 行 列 式

§1 n 元排列

一、概念与提要

（一）概念

n 元排列的反（逆）序与反（逆）序数；n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的反序数用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示；奇排列与偶排列；对换.

（二）定理

1. 每经过一次对换都改变排列的奇偶性.

2. 在 $n!$ 个 $n(n>1)$ 元排列中奇偶排列各占一半.

二、习题与解答

【1】 计算以下各排列的反序数，并指出其奇偶性：

① $n,n-1,\cdots,2,1$； ② $2,4,\cdots,2n,1,3,\cdots,2n-1$；

③ $2n,1,2n-1,2,\cdots,n+1,n$.

解 ① 反序数为 $(n-1)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$. 因此当 $n=4t$（t 为任意正整数）或 $4t+1$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为偶数，该排列为偶排列；当 $n=4t+2$ 或 $4t+3$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为奇数，该排列为奇排列.

② **分析** 这是一个 $2n$ 元排列，把 $2n$ 个数码分成了两部分，即 $2,4,\cdots,2n$ 和 $1,3,\cdots,2n-1$. 每一部分内的数码之间相互不构成反序，只后一部分中的数码同前一部分中的一些数码构成反序.

由上分析可知，此排列的反序数为：

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

故当 $n=4t$，$4t+3$ 时，该排列为偶排列；当 $n=4t+1$，$4t+2$ 时，该排列为奇排列.

③ **分析** 这也是一个 $2n$ 元排列. 它是将数码 $1,2,\cdots,n$ 依次分别插入 $2n,2n-1,\cdots,n+1$（即 $2n-(n-1)$）中任两个数码间（n 放在最后）. 因此，$1,2,\cdots,n$ 只与 $2n,2n-1,\cdots,n+1$ 中某些数码构成反序，且后者中某些数码间构成反序.

由上分析可知，该排列的反序数为：

$$(1+2+\cdots+n)+[(n-1)+\cdots+2+1]=n^2.$$

故该排列的奇偶性与 n 的奇偶性相同.

【2】 选择数码 i，j 使以下 9 元排列

① $27i619j54$ 成奇排列；

② $5i3817j49$ 成偶排列.

解 ① 该排列中缺数码 3 与 8. 令 $i=3$，$j=8$ 得

$$273619854.$$

易知此排列的反序数为 16，是偶排列. 但由于对换改变排列的奇偶性，故取 $i=8$，$j=3$ 时原排列为奇排列.

② 同理易知 $i=6$，$j=2$ 时此排列为偶排列.

【3】 首位是 3 的五元排列中有多少个奇排列和偶排列？为什么？

分析 首位是 3 的五元排列共有 $4!=24$ 个（即 4 个数码 1，2，4，5 的全排列数），且奇偶排列各半. 又因首位是 3，即在各四元排列的反序数中各加 2 个反序便得相应五元排列的反序数.

解 由上分析知，首位是 3 的五元排列中奇偶排列各有 12 个.

评注 更一般的情况是：设 $1\leqslant k\leqslant n$，则首位是 k 的 n 元奇偶排列各为 $\frac{(n-1)!}{2}$ 个.

【4】 设 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 元排列且 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)=k$，求

$$\tau(j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1).$$

分析 任两个不同数码在 $j_1j_2\cdots j_n$ 与 $j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$ 中必有一个且仅有一个构成反序.

解 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 与 $j_n\cdots j_2j_1$ 的反序数总和为 C_n^2，故

$$\tau(j_n\cdots j_2j_1)=C_n^2-\tau(j_1j_2\cdots j_n)=\frac{n(n-1)}{2}-k.$$

【5】 将排列 31524 施行一些对换变成 12345.

解 $31524\xrightarrow{(13)}13524\xrightarrow{(23)}12534\xrightarrow{(35)}12354\xrightarrow{(45)}12345.$

评注 显然，这种对换的步骤和个数不是唯一的. 但有文献指出，施行对换个数的奇偶性不变.

【6】 设 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的反序数是 k. 证明：可经过 k 次对换把 $j_1j_2\cdots j_n$ 变成 $12\cdots n$.

证 设在 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，1 前面有 k_1 个数码，2 前面（且大于 2）有 k_2 个数码，…，$n-1$ 前面（且大于 $n-1$）有 k_{n-1} 个数码，则

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=k=k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}.$$

在 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，将 1 与其前面的 k_1 个数码依次自右向左进行 k_1 次对换，便把 1 排在首位；再将 2 与其前面（1 除外）的数码也依次自右向左进行 k_2 次对换，…，总共进行 k 次对换即把 $j_1j_2\cdots j_n$ 变成了 $12\cdots n$.

评注 以上 k 次对换不一定是最少次数的对换. 例如 $\tau(4132)=4$，但却有 $4132\xrightarrow{(24)}2134\xrightarrow{(12)}1234$.

【7】 证明：任何 n 元排列都可经过不超过 n 次对换变成$12\cdots n$.

证 对 n 用数学归纳法. 当 $n=2$ 时显然；假定对 $n-1$ 元排列结论成立，下证对 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 结论成立.

若 $j_n=n$，则 $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 是 $n-1$ 元排列，于是由归纳假设，对其可施行不超过 $n-1$ 次的对换变成 $12\cdots(n-1)$，从而得证；

若 $j_n \neq n$，设 $j_k = n\ (k<n)$，则

$$j_1 \cdots j_k \cdots j_n \xrightarrow{(j_k j_n)} j_1 \cdots j_n \cdots j_{n-1} n.$$

此又转化成上面的情形，故得证.

【8】 设 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 与 $k_1 k_2 \cdots k_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的任意两个 n 元排列. 证明：总可施行对换把一个变成另一个，且若二者奇偶性相反(相同)，则所施行的对换个数为奇(偶)数.

证 对 n 用数学归纳法. 当 $n=2$ 时显然；假定对 $n-1$ 元排列结论成立，下证对 n 元排列结论成立.

若 $j_1 = k_1$，则 $j_2 \cdots j_n$ 与 $k_2 \cdots k_n$ 都是 $n-1$ 元排列，于是由归纳假设可通过对换互化，从而 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 与 $k_1 k_2 \cdots k_n$ 可通过完全相同的对换互化.

若 $j_1 \neq k_1$，设 $j_t = k_1$，则

$$j_1 j_2 \cdots j_t \cdots j_n \xrightarrow{(j_1 j_t)} j_t j_2 \cdots j_1 \cdots j_n.$$

此又转化成上面的情形；故 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 与 $k_1 k_2 \cdots k_n$ 可通过对换互化.

又由于每施行一次对换都改变排列的奇偶性，故二排列奇偶性相反(同)时只能通过奇(偶)数次对换把一个变成另一个.

评注 本题结论也可利用上题直接得出：因为每个 n 元排列都可施行对换化为 $12\cdots n$，从而可知可通过对换互化.

§2 n 阶行列式的定义

一、概念与提要

(一) 概念

n 阶行列式的定义；上、下三角形行列式.

(二) 定理

1. 上(下)三角形行列式等于对角线上元素之积；

2. n 阶行列式中项 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 的符号是 $(-1)^{\tau(i_1 \cdots i_n)+\tau(j_1 \cdots j_n)}$.

（三）提要

1. 第 i 行 j 列元素是 a_{ij} 的 n 阶行列式，可简记为 $|a_{ij}|$.

2. n 阶行列式有很多定义方法，最常见的有：

① 排列法，即利用 n 元排列以确定行列式的项数、项及其符号，这是多数高等代数和线性代数常用的方法；

② 置换法，即利用置换以确定行列式的项数、项及其符号；

③ 归纳定义法；

④ 公理法.

二、习题与解答

【9】 在五阶行列式中，项

$$a_{23}a_{31}a_{52}a_{14}a_{45} \quad 与 \quad a_{42}a_{51}a_{13}a_{35}a_{24}$$

应各取何符号？

分析 有两种方法可确定符号：一是把该项中元素按行标的自然顺序排，再按列排列的奇偶性来确定符号；二是该项中元素不必重新排列，利用定理 2，行与列标构成的排列同时考虑.

解 ① 因为 $a_{23}a_{31}a_{52}a_{14}a_{45}=a_{14}a_{23}a_{31}a_{45}a_{52}$，而后者列标构成的排列 43152 的反序数是 6，故该项应取正号.

② 项 $a_{42}a_{51}a_{13}a_{35}a_{24}$ 的行与列标所构成的排列的反序数分别为：

$$\tau(45132)=7, \qquad \tau(21354)=2,$$

故该项应取负号.

【10】 根据行列式的定义，计算以下行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & \cdots & x_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & x_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ x_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} 0 & y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{n-1} \\ y_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

解 ① 显然 D_1 只含一项 $x_1x_2\cdots x_n$（其余全为 0）. 此项的行

标为自然顺序，列标构成的排列为

$$n,n-1,\cdots,2,1,$$

其反序数为$\frac{n(n-1)}{2}$，因此 $D_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot x_1x_2\cdots x_n$.

② 同理，$D_2=(-1)^{\tau(23\cdots n1)}\cdot y_1y_2\cdots y_n=(-1)^{n-1}y_1y_2\cdots y_n$.

【11】 写出四阶行列式中包含 a_{24} 且取正号的所有项，并说明理由.

解 含 a_{24} 的项一般可写成 $a_{1j_1}a_{24}a_{3j_3}a_{4j_4}$，其中 $j_1j_3j_4$ 为 1，2，3 的任意一个 3 元排列. 由于这样的奇偶排列各有 3 个，且在第一、二个数码间插入 4 后不改变原排列的奇偶性(因为各增加 2 个反序)，故含 a_{24} 且取正号的项共有 3 项，即 $j_1j_3j_4$ 分别取 123、231、312 所得到的项.

【12】 设 D 是一个 n 阶行列式且有 k 个元素是0. 证明：若 $k>n^2-n$，则 $D=0$.

证 由题设知，D 中不等于 0 的元素有 n^2-k 个，而

$$n^2-k<n^2-(n^2-n)=n,$$

故 $D=0$.

【13】 设 $D_1=|a_{ij}|$与 $D_2=|a_{ij}b^{i-j}|$ $(b\neq0)$是两个 n 阶行列式. 证明：$D_1=D_2$.

证 设 $j_1j_2\cdots j_n$ 是任意一个 n 元排列，则显然

$$j_1+j_2+\cdots+j_n=1+2+\cdots+n.$$

由此再根据行列式定义，得

$$\begin{aligned}D_2&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}b^{1-j_1}\cdot a_{2j_2}b^{2-j_2}\cdots a_{nj_n}b^{n-j_n}\\&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}b^{1+2+\cdots+n-j_1-j_2-\cdots-j_n}\\&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=D_1.\end{aligned}$$

【14】 设 $f_{ij}(x)$为实连续函数(简记为 f_{ij})，$D(x)=|f_{ij}|$为 n 阶行列式. 证明：$D(x)$的导数

$$D'(x)=\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f'_{1j} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f'_{nj} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 根据行列式的定义和导数运算法则知：

$$D'(x)=\Big(\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\cdot f_{1j_1}f_{2j_2}\cdots f_{nj_n}\Big)'$$

$$=\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}\cdot(f'_{1j_1}f_{2j_2}\cdots f_{nj_n}+f_{1j_1}f'_{2j_2}\cdots f_{nj_n}+\cdots+f_{1j_1}f_{2j_2}\cdots f'_{nj_n})$$

$$=\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}\cdot f'_{1j_1}f_{2j_2}\cdots f_{nj_n}+\cdots+\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}\cdot f_{1j_1}f_{2j_2}\cdots f'_{nj_n}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f'_{1j} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f'_{nj} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}.$$

§3 行列式的基本性质

一、概念与提要

（一）概念

转置行列式，并用 D' 表示行列式 D 的转置行列式.

（二）行列式的基本性质

1. $D'=D$；

2. 交换两行(列)，行列式反号；

3. 若有两行(列)相同，则该行列式等于零；

4. 某行(列)所有元素同乘以 k，等于用 k 乘此行列式(或称提公因子)；

5. 若有一行元素全是零，则该行列式等于零；

6. 若有两行对应元素成比例，则该行列式等于零；

7. 若某行(列)中所有元素都是两项的和，则该行列式可拆成两个行列式相加；

8. 某行(列)中所有元素同乘数 k 并加到另一行(列)的对应元素上，所得行列式与原行列式相等.

(三) 提要

本节重点是：利用行列式的基本性质来计算各种类型的行列式.

二、习题与解答

【15】 证明：$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

证 **证法 I** 利用行列式基本性质 8 与 4.

将左端行列式的第一列乘 -1 后加到第二列，然后将所得行列式的第二列加到第三列，即得

$$\text{左端} = \begin{vmatrix} a+b & c-a & 2c \\ a_1+b_1 & c_1-a_1 & 2c_1 \\ a_2+b_2 & c_2-a_2 & 2c_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a+b & c-a & c \\ a_1+b_1 & c_1-a_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & c_2-a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \text{右端}.$$

证法 II 利用性质 7(即拆项法)、2 和 3.

$$\text{左端} = \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} = \text{右端}.$$

评注 在证法 II 中，是继续拆项还是利用基本性质 8 均可. 但相对而言，拆项后再利用性质 8 稍简单些.

【16】 证明：

$$\begin{vmatrix} ax+bz & ay+bx & az+by \\ az+by & ax+bz & ay+bx \\ ay+bx & az+by & ax+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}.$$

证 将左端行列式按照第一列拆成两个行列式相加，然后再从这两个行列式的第一列中分别提出 a 与 b，即得

$$\text{左} = a\begin{vmatrix} x & ay+bx & az+by \\ z & ax+bz & ay+bx \\ y & az+by & ax+bz \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} z & ay+bx & az+by \\ y & ax+bz & ay+bx \\ x & az+by & ax+bz \end{vmatrix};$$

再对此二行列式利用性质 8、4 与 2 即得右端.

评注 若对以上二行列式继续拆项并利用性质 6，也可推得所要结果，但稍麻烦一些.

【17】 计算以下两个 n $(n>1)$ 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_1 & -x_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

分析 设以上两个行列式分别为 D_1 和 D_2. 要计算一个行列式必须先弄清该行列式元素的结构. 例如 D_1，其第一行元素为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，主对角线上元素为 $x_1, a_2, \cdots, a_n$，而且主对角线以下元素第一列全为 $-x_1$，第二列全为 $-x_2$，…. 于是将第一行分别加到其余各行即得. 又 D_2 中每个元素都是两项和，于是自然想到拆项法.

解 ① 将 D_1 的第一行分别加到其余各行，便得到一个主对角线上元素是 $x_1, x_2+a_2, \cdots, x_n+a_n$ 的上三角形行列式，因此

$$D_1 = x_1(x_2+a_2)\cdots(x_n+a_n).$$

② 将 D_2 按第一列拆成两个行列式相加，即

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix};$$

再由基本性质易知，当 $n>2$ 时此两个行列式均为零，故 $D_2=0$. 但当 $n=2$ 时易知：$D=(a_1-a_2)(b_2-b_1)$.

【18】 设以下 n 阶行列式为 D. 证明：若 n 为奇数，则 $D=0$. 再举例指出，当 n 为偶数时存在 $D\neq 0$：

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

分析 这是一个主对角线上元素全是零的反对称行列式，因此，每行都提出 -1 后(由于 $D'=D$)所得的行列式仍为 D.

证 将 D 中每行都提出 -1，由于 n 为奇数，故

$$D=(-1)^n D'=-D, \qquad D=0.$$

但是当 n 为偶数，例如 $n=2$ 时有

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

其实对任意偶数 n，当取 $a_{ij}=1$ （$i,j=1,\cdots,n$. 但 $i\neq j$）时，由后面第 46 题知，均有 $D=1$.

【19】 设 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|=d$. 求以下两个行列式的值：

$$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{21} & 2a_{22} & \cdots & 2a_{2n} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & \cdots & 3a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ na_{n1} & na_{n2} & \cdots & na_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{12} & a_{11} \\ a_{2n} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n2} & a_{n1} \end{vmatrix}.$$

分析 首先应弄清 D_1 与 D_2 中的元素与 D 中元素的关系：D_1 的第 n 行即 D 的第一行，而 D_1 的第 k（$1\leqslant k\leqslant n-1$）行就是 D 的第 $k+1$ 行的 $k+1$ 倍；D_2 的第 $1,2,\cdots,n$ 列其实就是 D 的第 n，$n-1,\cdots,1$ 列.

解 ① 将 D_1 的第 $1,2,\cdots,n-1$ 行依次提出公因子 $2,3,\cdots,n$ 后，再将第 n 行依次与第 $n-1,\cdots,2,1$ 行交换，即得

$$D_1=n!\cdot(-1)^{n-1}D=n!\cdot(-1)^{n-1}d.$$

② 将 D_2 的第 n 列依次与其前面的第 $n-1,\cdots,2,1$ 列交换，第 $n-1$ 列与其前面的第 $n-2,\cdots,1$ 列交换，…；共交换

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

次即得 D. 故 $D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot d.$

【20】 证明：