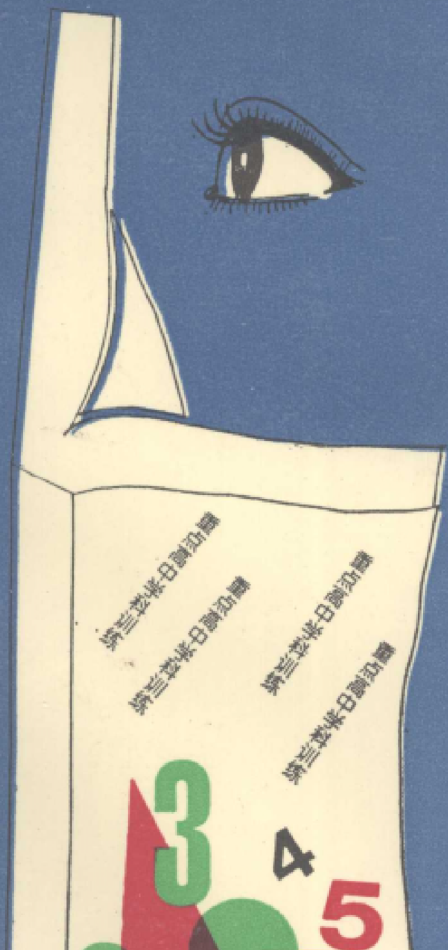
重点高中学科训练

数学

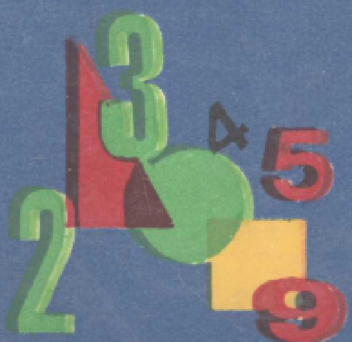
贯彻教学大纲
综合各版课本
讲求学习战略
高中三年同步

复旦大学附属中学 编



复旦大学出版社

封面设计：赵丽丽



ISBN 7-309-01596-7

9 787309 015966 >

ISBN7-309-01596-7/O·162

定价：22.00元

重点高中学科训练

数　　学

复旦大学附属中学　编

复旦大学出版社

内 容 提 要

本书是重点高中数学学科训练的辅导指南。全书分为代数(包括三角)、立体几何、平面解析几何、专题、测试等篇，精选了大量例题、习题、试题，习题和试题都附有答案。本书对广大高中学生学好数学基础和应考是一本优良的读物，对中学数学教师和自学者也有重要的参考价值。

责任编辑 周仲良
责任校对 马金宝

重点高中学科训练
数 学
复旦大学附属中学 编
出 版 复旦大学出版社
(上海国权路579号 邮政编码200433)
发 行 新华书店上海发行所
印 刷 复旦大学印刷厂
开 本 787×1092 1/16
印 张 25
字 数 602,000
版 次 1996年1月第1版 1997年3月第4次印刷
印 数 24001—30000
书 号 ISBN 7-309-01596-7/O·162
定 价 22.00元

前　言

为了提高学习效率，减轻学生负担，复旦附中各学科的教师们，在长期的教学过程中，精心设计和编写了一套与教学过程相应的练习。经过实践检验，效果很好，现将其编印成书出版，供广大师生参考。

这套丛书共分语文、数学、英语、物理、化学等五个学科，它们的共同特点是：其一，循序渐进，铺设坡度，由易而难；其二，知识与能力并重，既重基础知识，更重能力训练；其三，与课堂教学同步进行，有一定的可操作性；其四，既注重高中阶段的基本要求，更强调高等院校对学生的选拔性要求，有较强的针对性和实用性。

复旦附中是一所具有数学教育特色的学校，有一支在教学上严谨、踏实、富有进取精神的数学教师队伍。每年高一新生来自上海各区县，数学素养差异很大，但经过三年的精心培养，许多学生在各级数学竞赛与高考中名列前茅，绝大多数同学在进大学后的学习中显示出很强的独立分析能力和从事科研的巨大潜力。参加本书编写的都是复旦附中数学教研组的骨干教师。一方面，我们尽可能地把复旦附中数学教学特色无保留地贡献出来，使广大读者虽然不在复旦附中学习，但能领略复旦附中数学教学的特色，另一方面，我们也希望能得到同行们的批评指教，共同探讨，共同提高。

本书代数篇由郑惠珍负责，姚莉、黄亦民、黄全京、张工参加编写；其中三角部分由张以挖负责，陈金辉、郁洪参加编写；立体几何篇由秦杜馨负责，马晓平、郑跃星参加编写；平面解几何由谢应平编写；专题篇由郑跃星负责，秦杜馨、郑惠珍、王招娣、马晓平、谢应平参加编写；测试篇由郑跃星负责，李秋明、秦杜馨、黄亦民、王招娣、郁洪、陈金辉参加编写。

目　　录

代　数　篇

立体几何篇

平面解析几何篇

专 题 篇

测 试 篇

代 数 篇

第一章 初高中知识衔接

第一节 集 合

一、例题精选

例 1 已知 A、B 是以某些实数为元素的两个集合.

$A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$,

$B=\{-4,a+3,a^2-2a+2,a^3+a^2+3a+7\}$,

若 $A\cap B=\{2,5\}$,求实数 a 的值,并求 $A\cup B$.

解 $\because$ $A\cap B=\{2,5\}$, $\therefore$ $a^3-2a^2-a+7=5,(a^2-1)(a-2)=0$,

$\therefore$ $a=1,a=-1,a=2$.

当 $a=1$ 时,$B=\{-4,4,1,12\}$与题设 $A\cap B=\{2,5\}$不符,故 $a\neq 1$.

当 $a=-1$ 时,$B=\{-4,2,3,6\}$,也与题设 $A\cap B=\{2,5\}$不符,故 $a\neq -1$.

当 $a=2$ 时,$B=\{-4,2,5,25\}$,符合题设条件,$\therefore a=2$,$A\cup B=\{-4,2,4,5,25\}$.

例 2 设集合 $A=\{x|x^2+(2a-3)x-3a=0\}$,集合$B=\{x|x^2+(a-3)x+a^2-3a=0\}$若 $A\neq B$,$A\cap B\neq\phi$.试用列举法表示 $A\cup B$.

解 $\because A\cap B\neq\phi$,可设 A、B 的共同元素为 m,则有

$$\begin{cases} m^2+(2a-3)m-3a=0 & ① \\ m^2+(a-3)m+a^2-3a=0 & ② \end{cases}$$

由①-②得 $am-a^2=0$, $\therefore$ $a=0$ 或 $m=a$.

若 $a=0$, $A=\{x|x^2-3x=0\}=\{0,3\}$, $B=\{x|x^2-3x=0\}=\{0,3\}$,

这与题设 $A\neq B$ 矛盾,$\therefore$ $a\neq 0$.

若 $m=a$,将其代入①得 $a=0$(舍),$c=2$,

此时,$A=\{x|x^2+x-6=0\}=\{2,-3\}$. $B=\{x|x^2-x-2=0\}=\{2,-1\}$.

$\therefore$

$$A\cup B=\{-3,-1,2\}.$$

例 3 已知全集 $I=R$,集合 $A=\{x|x^2-2x-8<0\}$,$B=\{x|x^2<a^2,a>0\}$.

(1) 若 $A\supset B$,求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $A\cap\overline{B}=\phi$,求实数 a 的取值范围.

解 由 $x^2-2x-8<0$,得$-2<x<4$(图 1-1),

又 $x^2<a^2$,且 $a>0$,$\therefore$ $-a<x<a$,

即 $A=(-2,4)$，$B=(-a,a)$。

(1)

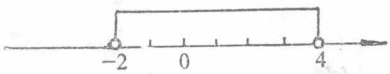


图 1-1

$\because \quad A\supset B,$

$$\therefore \begin{cases} -a\geqslant -2 \\ a\leqslant 4 \\ a>0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0<a\leqslant 2.$$

(2) $\because \ B=(-a,a)$

$\therefore \ \overline{B}=(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$.

$\because$ 图 1-2 所示的集合为 A(与图 1-1 同)，

且 $A\cap\overline{B}=\phi$，

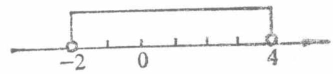


图 1-2

$$\therefore \quad \begin{cases} a\geqslant 4 \\ -a\leqslant -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\geqslant 4 \\ a\geqslant 2 \end{cases} \Rightarrow a\geqslant 4.$$

例 4 设全集 $I=\{x|x$ 为小于 20 的正偶数$\}$，若 $A\cap\overline{B}=\{12,14\}$，$\overline{A}\cap B=\{2,4,16,18\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\phi$，求集合 A、B。

解一 $I=\{x|x$ 为小于 20 的正偶数$\}=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18\}$。

$\because \quad A\cap\overline{B}=\{12,14\}$，故 $12,14\in A$，$12,14\notin B$，

$\because \quad \overline{A}\cap B=\{2,4,16,18\}$，故 $2,4,16,18\notin A$，但 $2,4,16,18\in B$。

$\because \quad \overline{A}\cap\overline{B}=\phi$，故 $I=A\cup B$。

现确定剩下的 6,8,10 的属向。

若 $6\in\overline{A}$，由 $\overline{A}\cap\overline{B}=\phi$，$\therefore 6\notin\overline{B}$，若 $6\in B$，这样得 $6\in\overline{A}\cap B$，这与题设矛盾，$\therefore 6\in A$。

同理可得 $8,10\in A$，同法可证 $6,8,10\in B$。

$\therefore \quad A=\{6,8,10,12,14\}$，$\quad B=\{2,4,6,8,10,16,18\}$。

解二 借助于韦恩图，分别依 $A\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cap B$，$\overline{A}\cap\overline{B}$ 的含义将有关元素对号入座地填入有关的区域内(如图 1-3)，

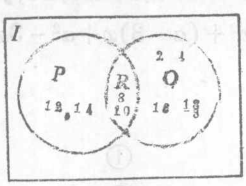


图 1-3

$$P=A\cap\overline{B}=\{12,14\},$$

$$Q=\overline{A}\cap B=\{2,4,16,18\}.$$

$\overline{A}\cap\overline{B}=\phi$，其含义是不存在既不在 A 中也不在 B 中的元素，故剩下的元素 6,8,10 填入 R 中，得

$$A=\{6,8,10,12,14\},\quad B=\{2,4,6,8,10,16,18\}.$$

例 5 已知

$$A=\left\{(x,\ y)\left|\frac{y-3}{x-2}=a+1\right.\right\},$$

$$B=\{(x,y)|(a^2-1)x+(a-1)y=15\}.$$

问当 a 为何值时，$A\cap B=\phi$，并作图表示。

解 (1) 当 $a=1$ 时，显然 $B=\phi$，$\therefore A\cap B=\phi$。

(2) 若 $a\neq 1$，由

$$\begin{cases} y-3=(a+1)(x-2) \qquad (x\neq 2) & ① \\ (a^2-1)x+(a-1)y=15 & ② \end{cases}$$

消去 y 得

$$2(a^2-1)x=2a^2-3a+16 \qquad ③$$

当 $a^2-1=0$ 即 $a=\pm1$ 时，方程③无解。

当 $a^2-1\neq0$ 即 $a\neq\pm1$ 时，

$$x=\frac{2a^2-3a+16}{2(a^2-1)}.$$

由 $x=2$ 得 $2a^2+3a-20=0$，$a=\frac{5}{2}$，$a=-4$，这时 $x=2$ 为方程①的增根。

综上得 $a=\pm1$，$a=\frac{5}{2}$，$a=-4$ 时，$A\cap B=\phi$。作图表示如图1-4—图1-7。

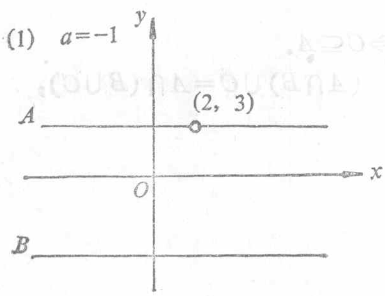


图 1-4

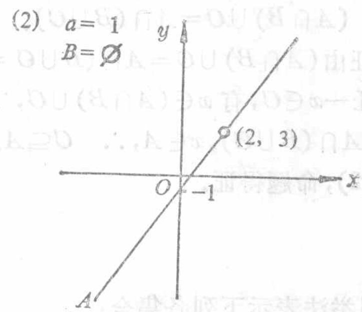


图 1-5

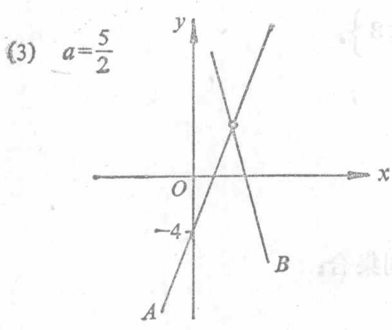


图 1-6

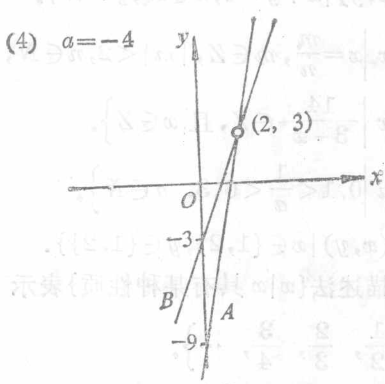


图 1-7

例 6 若 $A=\{x\,|\,x=2k,k\in Z\}$，

$B=\{y\,|\,y=14p+36q,\ p、q\in Z\}$，

求证 $A=B$。

证

(1) 设 $x\in B$，则存在 p_0、q_0 使 $x=14p_0+36q_0=2(7p_0+18q_0)$，

$\because$ p_0、$q_0\in Z$，$\therefore$ $7p_0+18q_0\in Z$，$\therefore$ $x\in A$。得 $B\subseteq A$。

(2) 设 $x\in A$，则存在 $k_0\in Z$，使 $x=2k_0=2(-35k_0+36k_0)$。

令 $p'=-5k_0$，$q'=2k_0$，则

$x=2(7p'+18q')=14p'+36q'\in B$，$\therefore$ $A\subseteq B$。

由(1)、(2)得 $A=B$。

例 7 求证：若 $C\subseteq A$，则 $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$，反之亦然。

证

(1) 先证由 $C\subseteq A\Rightarrow(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$。

i) 对任一$x\in(A\cap B)\cup C$，$\because C\subseteq A$，$\therefore x\in C\subseteq A$，即$x\in A$。(否则 $x\notin C$，则$x\notin A$，从而$x\notin(A\cap B)\cup C$，得出矛盾)。

$\therefore x\in A\cap(B\cup C)$，得$(A\cap B)\cup C\subseteq A\cap(B\cup C)$。

ii) 对任一$x\in A\cap(B\cup C)$，有$x\in A$且$x\in B\cup C$，$\because x\in B\cup C$，$\therefore x\in B$或$x\in C$。

当$x\in B$时，$\because x\in A$，$\therefore x\in A\cap B$，故$x\in(A\cap B)\cup C$。

当$x\in C$时，有$x\in(A\cap B)\cup C$，故

$$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup C.$$

综上得 $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$。

(2) 再证由$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C\Longrightarrow C\subseteq A$。

$\because$ 对任一$x\in C$，有$x\in(A\cap B)\cup C$，$\because (A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$，

$\therefore x\in A\cap(B\cup C)$，$x\in A$，$\therefore C\subseteq A$。

由(1)，(2)，命题得证。

二、习题

1．用列举法表示下列各集合：

(1) $\{x,y)\mid x+y=6,x\in N,y\in N\}$。

(2) $\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{m}{n},m\in Z,|m|<2,n\in N,n\leqslant 3\right\}$。

(3) $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{14}{3-x}\in Z，且\ x\in Z\right\}$。

(4) $\left\{a\,\middle|\,0.1<\dfrac{1}{a}<0.3,\ a\in N\right\}$。

(5) $\{(x,y)\mid x\in\{1,2\},y\in\{1,2\}\}$。

2．用描述法$\{x|x$具有某种性质$\}$表示下列集合：

(1) $\left\{\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ \cdots\right\}$。

(2) 不超过 20 的非负偶数集。

(3) 坐标平面的第二、第四象限的点所组成的集合。

(4) 直线 $y=2x+1$ 上所有的点的坐标组成的集合。

3．设集合M有 8 个元素，集合N有 5 个元素，全集 I 有 15 个元素，$M\cap N\neq\phi$，若集合$\overline{M\cup N}$有 x 个元素，求 x 的取值范围。

4．集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，集合$M$满足 $A\subset M\subseteq B$．问这样的集合M共有多少个？

5．已知集合 $P\subset M=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$，$Q\subset N=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$，$M\cap N=\phi$，求集合$P\cap Q$的个数。

6．已知全集 I 及其子集 A、B(如图所示)，试用斜线阴影分别表示图 1-8～图 1-10 的集合。

(1) $\bar{A}\cap\bar{B}$； (2) $\bar{A}\cap B$； (3) $\overline{A\cup B}\cup(A\cap B)$。

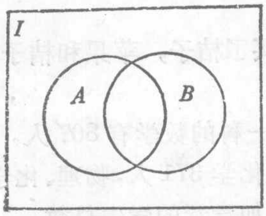


图 1-8

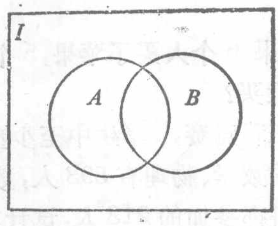


图 1-9

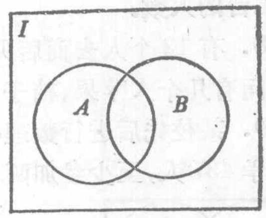


图 1-10

7. 分别用集合表示图 1-11～图 1-13 的阴影部分

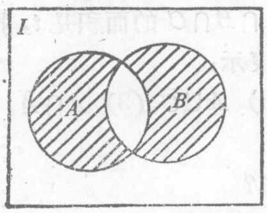


图 1-11

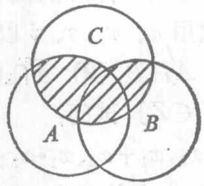


图 1-12

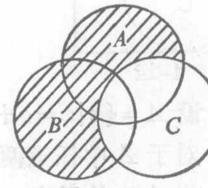


图 1-13

8. 设集合 A 表示除以 3 余 2 的正整数的全体，集合 B 是表示除以 6 余 2 的正整数的全体，集合 C 表示除以 6 余 5 的正整数的全体.

(1) 试写出谁是谁的真子集；

(2) 试写出 A、B、C 之间的并集、交集的结果.

9. 已知 $A=\{$小于 23 而能被 5 整除的自然数$\}$,

$B=\{$小于 23 而能被 3 整除的自然数$\}$,

求 $A\cup B$, $A\cap B$.

10. 设全集 $I=\{2,3,a^2+2a-3\}$, $A=\{|a+1|,2\}$, $\overline{A}=\{5\}$, 求a的值.

11. 集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$, $B=\{0,|x|,y\}$, 且 $A=B$.

求 x, y 的值.

12. 集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$, $B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$, $C=\{x|x^2+2x-8=0\}$, 当 a 为何值时, $A\cap B\neq\phi$ 和 $A\cap C=\phi$ 同时成立?

13. 已知集合 $A=\{x|3-x\geqslant\sqrt{x-1},x\in R\}$,

$B=\{x|x^2-(a+1)x+a\leqslant 0,x\in R\}$.

(1) 当 $A=B$ 时, 求实数 a 的取值范围;

(2) 当 $A\subset B$ 时, 求实数 a 的取值范围.

14. 设全集 $I=\{x|x$ 为不大于 20 的质数$\}$且 $A\cap\overline{B}=\{3,5\}$, $\overline{A}\cap B=\{7,19\}$, $\overline{A}\cap\overline{B}=\{2,17\}$, 求集合 A、B.

15. 设全集 $I=\{$100 以内自然数且是 13 的倍数$\}$, $M\cup N=\{13,26,39,52,91\}$, $\overline{M}\cap N=\{26,91\}$, 求$M$.

16. 在 1 到 1000 的整数中，既不能被 2 整除、又不能被 3 整除 、也不能被 5 整除的数共有多少个?

17. 某地有甲、乙两电视台，某日在 600 个观众中作调查，曾收看过两台的观众人数与看过甲台的观众人数、看过乙台的观众人数成 1:2:3 的比例，求在这次调查中分别收看过甲

台和乙台的人数。

18．有12个人去商店买水果，6个人买了苹果，5个人买了桔子，苹果和桔子都买的有4人，问有几个人苹果、桔子都没买？

19．某校先后进行数理化三科竞赛，学生中至少参加一科的数学有807人，物理739人，化学437人，至少参加两科的数学、物理有593人，数学、化学371人，物理、化学267人，三科都参加的213人，试计算参加竞赛的学生总数。

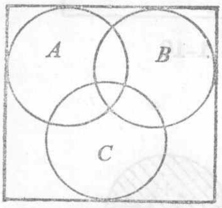


图 1-14

20．设边长为 a 的正方形表示全体集合，在它里面如图1-14那样有集合 A、B、C，集合 A、B、C 都是半径为 r 的圆，设 $A\cap B, B\cap C, C\cap A$ 的面积都是 s，$A\cap B\cap C$ 的面积是 t，把下面的面积用 a、r、s、t 以及圆周率表示：

(1) $A\cap\overline{B}$，(2) $\overline{A}\cap(B\cap C)$，(3) $A\cup\overline{C}$，(3) $A\cap\overline{A}$。

21．设 $A=\{x|x=a+\sqrt{2}b, a,b\in Z\}$，试问：

(1) 对于 A 中任意两个元素 x_1、x_2，x_1+x_2、$x_1\cdot x_2$ 是否属于 A？

(2) 若 A 中的元素 x 的倒数也是 A 中的元素，求 a 和 b 之间的关系。

(3) 对于给定的整数 b，试求满足 $0<a+\sqrt{2}b<1$ 的 A 中元素的个数。

22．设集合 $A=\{x|x=a^2+b^2, a,b\in Z\}$，$x_1$，$x_2\in A$，求证：$x_1\cdot x_2\in A$。

三、自测题

1．是非题：以下可否说是一个集合？若是在括号内打"√"，不是打"×"。

(1) 接近于0的数的全体。 (　　)

(2) 绝对值小于1的实数的全体。 (　　)

(3) 你的高中代数第一册中第一页上汉字的全体（重复出现作为一个字）。 (　　)

(4) 漂亮衣服的全体。 (　　)

2．选择题：

(1) 设集合 $M=\{x|x\leqslant\sqrt{2}\}$，$a=\sqrt{11}$，则下列各式中正确的是 (　　)

(A) $a\subset M$；　(B) $a\in M$；　(C) $\{a\}\in M$；　(D) $\{a\}\subset M$。

(2) 设 M、N 是非空集合，且 $M\nsubseteq E$，$E=M\cap N$，那么 $M\cup E$ 等于 (　　)

(A) M；　(B) N；　(C) ϕ；　(D) E。

(3) 设集合 $M=\left\{n\left|\frac{n}{2}\in Z\right.\right\}$，$N=\left\{n\left|\frac{n+1}{2}\in Z\right.\right\}$，则 $M\cap N$ 等于 (　　)

(A) $\{0\}$；　(B) $\{\phi\}$；　(C) ϕ；　(D) Z。

(4) 集合 $M=\{x||x-1|\leqslant 2, x\in Z\}$，则集合 M 的所有子集的个数是 (　　)

(A) 8；　(B) 16；　(C) 31；　(D) 32。

(5) 如果 $I=\{a,b,c,d,e,f\}$，$N=\{a,c,d,e\}$，$\overline{M}=\{a,b\}$，其中 I 是全集，那么 $\overline{N\cup M}$ 为 (　　)

(A) $\{b,c,d,e,f\}$；　(B) $\{f\}$；　(C) $\{a,b,c,d,e\}$；　(D) $\{a,c,d,e,f\}$。

3．填空题：

(1) 给出以下命题：

① $\phi\subseteq\{\phi\}$，② $\phi\subseteq\{\phi,\{\phi\}\}$，③ $\phi\in\{\phi,\{\phi\}\}$，④ $\phi=\{x|x\neq x\}$，则其中正确的命题有

______个。

(2) 集合 $A=\left\{z\left|z=\frac{p}{q}\right.,\text{其中 } p+q=5, p、q\in N\right\}$，那么若用列举法表示，集合 $A=$ ______。

(3) 已知全集 $I=\{2,4,a^2-a+1\}$ 且 $A=\{a+1,2\}$，$\overline{A}=\{7\}$，则实数 $a=$ ______。

(4) 已知全集 $I=Z$，$P=\{x\,|\,|x|<5, x\in Z\}$，$S=\{x\,|\,|x|\geqslant 2, x\in Z\}$，$T=\{x\,|\,|x|\leqslant 0, x\in Z\}$，用列举法写出集合 $(P\cap\overline{S})\cup T=$ ______。

(5) 设全集 $I=R$，$A=\{x\,|\,x^2-5x+4\geqslant 0, x\in R\}$，$B=\{x\,|\,0<x<2, x\in R\}$，则 $A\cap B=$ ______，$\overline{A}\cap\overline{B}=$ ______。

4．已知全集 I 以及集合 A，B，C 的关系，在图 1-15～图 1-17 中用阴影斜线表示下列集合。

(1) $\overline{B}\cup C$；　　(2) $\overline{(A\cap B)}\cap C$；　　(3) $(A\cup C)\cap\overline{B}$。

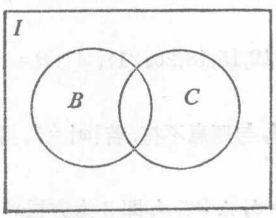


图 1-15

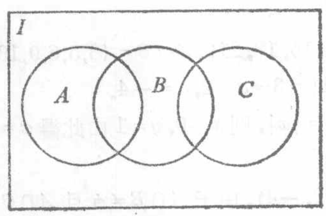


图 1-16

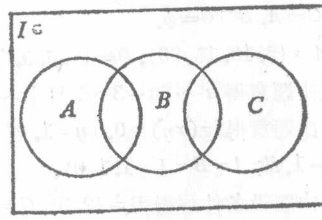


图 1-17

5．关于 x 的方程 $2x^2-ax+b=0$ 的解集是 M，关于 x 的方程 $6x^2+(a+2)x+5+b=0$ 的解集是 N，若 $M\cap N=\left\{\frac{1}{2}\right\}$，求集合 $M\cup N$。

6．已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-2x-8<0\}$，$B=\{x\,|\,x-a<0\}$，

(1) 若 $A\cap B=\phi$，求实数 a 的取值范围；

(2) 若 $A\subset B$，求实数 a 的取值范围。

7．已知全集 $I=\{a,b,c,d,e,f,g,\}$，$A\subset I$，$B\subset I$，$A\cap\overline{B}=\{b,d,g\}$，$B\cap\overline{A}=\{c,f\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{a,e\}$，求集合 A 和 B。

8．设 $A=\{-1,1\}$，$B=\{x\,|\,x^2-2ax+b=0, x\in R\}$，$B\subseteq A$，$B\neq\phi$，求 a，b 的值。

四、考参答案

习题

1．(1) $\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$；(2) $\left\{0,1,-1,\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$；

(3) $\{-11,-4,1,2,4,5,10,17\}$；　　(4) $\{4,5,6,7,8,9\}$；

(5) $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

2．(1) $\left\{x\left|x=\frac{n}{n+1}\right., n\in N\right\}$；　　(2) $\{x\,|\,x=2n, 0\leqslant n\leqslant 10, n\in Z\}$；

(3) $\{(x,y)\,|\,xy<0\}$；　　(4) $\{(x,y)\,|\,y=2x+1\}$。

3．由于 $M\cap N\neq\phi$，故 $M\cap N$ 中至少有一个元素，$M\cup N$ 中最多可以有 12 个元素，又因为 N 中有 5 个元素，故 $M\cap N$ 中最多有 5 个元素，即 $M\cup N$ 中最少有 8 个元素，故 $3\leqslant x\leqslant 7$。

4．255 个。

5. $(2^6-1)(2^4-1)=945$(个)。

6. (1)

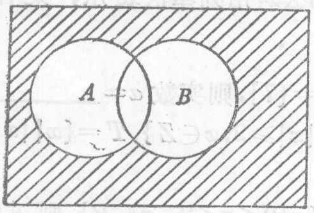


图 1-18

(2)

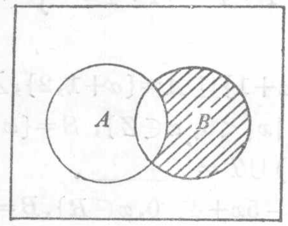


图 1-19

(3)

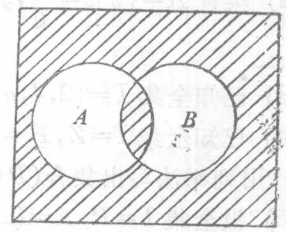


图 1-20

7. (1) $(\overline{A}\cap B)\cup(\overline{B}\cap A)$;　(2) $(A\cap C)\cup(B\cap C)$;　(3) $\overline{C}\cap(A\cup B)$。

8. (1) 设 $A=\{x|x=3m+2, m\in Z, m\geqslant 0\}$, $B=\{y|y=6n+2, n\in Z, n\geqslant 0\}$, $C=\{z|z=6l+5, l\in Z, l\geqslant 0\}$, $\because B=\{y|y=3.2n+2, n\in Z, n\geqslant 0\}$可得 $B\subset A$, 同理 $C\subset A$. (2) $A\cup B=A, A\cup C=A, A\cap B=B, A\cap C=C. B\cup C=A, B\cap C=\phi$。

9. $A=\{5,10,15,20\}, B=\{3,6,9,12,15,18,21\}, A\cup B=\{3,5,6,9,10,12,15,18,20,21\}, A\cap B=\{15\}$。

10. 由题意得 $a^2+2a-3=5$ 且 $|a+1|=3\Rightarrow a=2, a=-4$。

11. 由题意得 $\lg(xy)=0, xy=1$, 若 $x=|x|$, 则 $x>0, y=1$ 由此得 $x=1$, 与题意不符, 若 $|x|=1$, 得 $x=-1, y=-1$. 故 $A=B=\{-1,1,0\}$。

12. 由题设条件解得 $B=\{2,3\}, C=\{2,-4\}$, 由于 $A\cap B\neq\phi$ 且 $A\cap C=\phi$, $\therefore 3\in A$, 即 3 为方程$x^2-ax+a^2-19=0$ 的一个根, 解得 $a=-5, a=-2$, 当 $a=-5$ 得 $A=\{2,3\}$, 与 $A\cap C=\phi$ 矛盾, 当 $a=-2$, $A=\{3,-5\}$. 满足题意, 故 $a=-2$。

13. 由题设条件得 $A=[1,2]$, 集合 B 的元素 x 满足 $(x-a)(x-1)\leqslant 0$, (1) $a=2$; (2) $a>2$。

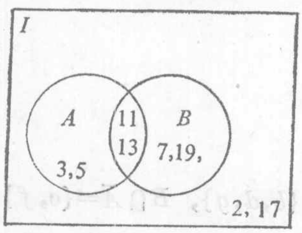


图 1-21

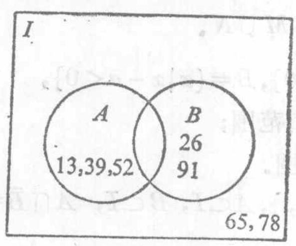


图 1-22

14. 应用韦恩图(图1-21)得 $A=\{3,5,11,13\}$, $B=\{7,11,13,19\}$。

15. 应用韦恩图(图1-22)得 $M=\{13,39,52\}$。

16. 设 1 到 1000 的整数中, k 的倍数的个数为 $n(k)$, 符合题意的整数个数为 M=266

$$N=n(2)+n(3)+n(5)-n(2\times 3)-n(2\times 5)-n(3\times 5)+n(2\times 3\times 5)=734.$$

17. 300 人, 400 人。

18. 应用韦恩图得 5(人)。

19. 应用韦恩图(图1-23)得学生总数为 965 人。

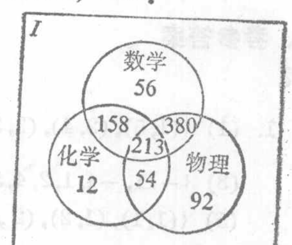


图 1-23

20. $S_{A\cap\overline{B}}=\pi r^2-s, S_{\overline{A}\cap(B\cap C)}=s-t, S_{A\cap\overline{C}}=a^2-\pi r^2+s, S_{\overline{A\cup C}}=0$。

21. (1) 设 $x_1=a_1+\sqrt{2}\,b_1$,　$x_2=a_2+\sqrt{2}\,b_2$, 其中$a_1, b_1, a_2, b_2\in Z$, 则 $x_1+x_2=(a_1+a_2)+\sqrt{2}\,(b_1+b_2)\in A, x_1\cdot x_2=a_1a_2+2b_1b_2+\sqrt{2}\,(a_1b_2+a_2b_1)\in A$; (2) $\dfrac{1}{x}=\dfrac{a}{a^2-2b^2}-\dfrac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$, 故要$\dfrac{1}{x}\in A$ 只需 $\dfrac{a}{a^2-2b^2}$, $\dfrac{b}{a^2-2b^2}$均为整数, 即 a^2-2b^2必须是 a, b 的公约数, 故当a, b互质时要求 $a^2-2b^2=\pm 1$; (3)当 b 给定 则$-\sqrt{2}\,b<a<1-\sqrt{2}\,b$, 如果 $b=0$, 那么 A 中不具备所给性质特征的元素, 如果 $b\neq 0$, 由于 $-\sqrt{2}\,b$ 与 $-\sqrt{2}\,b+1$ 相应为 1, 其间有且仅有一个整数, 所以这时A中满足条件的元素恰有一个。

22. 设 $x_1=a^2+b^2, x_2=c^2+d^2$, 其中 $a、b、c、d\in Z$, 则有 $x_1\cdot x_2=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$, 由 $a、b、c、d\in$

Z, $\therefore ac+bd、bc-ad\in Z$, $\therefore x_1\cdot x_2\in A$。

自测题

1. (1) ×; (2) √; (3) √; (4) ×。

2. (1) B; (2) A; (3) C; (4) D; (5) A。

3. (1) 4; (2) $\left\{\frac{1}{4}, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right\}$; (3) 3; (4) $T=\{0\}, \overline{S}=\{0,1,-1\}, (P\cap\overline{S})\cup T=\{0,1,-1\}$;
(5) $A\cap B=(0,1]$, $\overline{A}\cap\overline{B}=[2,4)$。

4. (1)

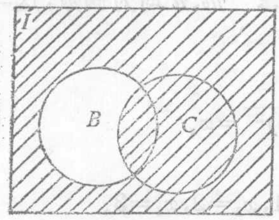


图 1-24

(2)

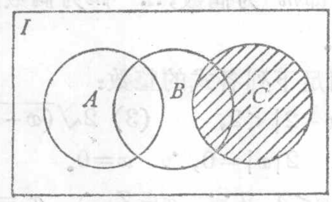


图 1-25

(3)

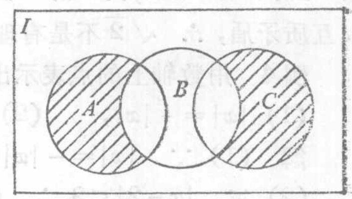


图 1-26

5. $\because M\cap N=\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $\therefore \frac{1}{2}$为方程 $2x^2-ax+b=0, 6x^2+(a+2)x+5+b=0$ 的公共解, 代入得

$$\begin{cases}a-2b=1\\a+2b=-15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-7\\b=-4;\end{cases}\quad 得\quad M=\left\{\frac{1}{2},-4\right\},\quad N=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\},$$

$$\therefore M\cup N=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},-4\right\}.$$

6. $A=(-2,4), B=(-\infty,a)$。(1) $a\leqslant-2$, (2) $a\geqslant4$。

7. 应用韦恩图得 $A=\{b,d,g\}, B=\{c,f\}$。

8. 由 $B\neq\phi$, 故方程 $x^2-2ax+b=0$ 有实数解, 由于 $A=\{-1,1\}$, 又 $B\subseteq A$, 故集合 B 可能是 $\{1\}$, $\{-1\}$, $\{-1,1\}$。

若 $B=\{1\}$, 由方程 $x^2-2ax+b=0$ 有两个相同的根为1, 由韦达定理得 $a=1, b=1$。

若 $B=\{-1\}$, 同上理得 $a=-1, b=1$;

若 $B=\{-1,1\}$, 则 $a=0, b=-1$。

故 $a=1, b=1$ 或 $a=-1, b=1$ 或 $a=0, b=-1$。

第二节　数

一、例题精选

例1　已知 $x<0, a>0$, 求将 $x\sqrt{a}$ 的 x 移入根号内所得到的式子。

解　$\because x<0$, $\therefore -x>0$, 则 $-x=\sqrt{(-x)^2}$。

$\therefore$　$x\sqrt{a}=-\sqrt{x^2}\sqrt{a}=-\sqrt{ax^2}$, $\therefore x\sqrt{a}=-\sqrt{ax^2}$。

例2　已知: $ab\neq0$, 且 $a>b$, 比较 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小。

解　$\because a>b$,

$\therefore$ 当 $a>0>b$ 时, $\frac{1}{a}>0, \frac{1}{b}<0, \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$;

当 $a>b>0$ 时，$\frac{1}{a}>0,\frac{1}{b}>0,\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

当 $0>a>b$ 时，$\frac{1}{a}<0,\frac{1}{b}<0,\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$。

例3 用反证法证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数。

证 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，可设 $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$（其中 m,n 为互质的自然数）。则 $2=\frac{n^2}{m^2}$，

$\therefore$ $2m^2=n^2$，即 n^2 为偶数，$\therefore$ n 为偶数，可设 $n=2k$（k 为自然数）。

$\therefore$ $2m^2=n^2=4k^2$，$\therefore$ $m^2=2k^2$，即 m^2 为偶数，$\therefore$ m 为偶数，$\therefore$ m、n 均为偶数，这与 m、n 互质矛盾，$\therefore$ $\sqrt{2}$ 不是有理数。

例4 用数轴上的点表示出满足下列各式的整数：

(1) $|x|=-|x|$， (2) $|x-2|<2$， (3) $2\sqrt{(x-3)^2}=x$。

解 (1) $\because$ $|x|=-|x|$，$\therefore$ $2|x|=0$，$\therefore$ $x=0$。

(2) $\because$ $|x-2|<2$，$\therefore$ $0<x<4$，又 $\because$ $x\in Z$，$\therefore$ $x_1=1,x_2=2,x_3=3$。

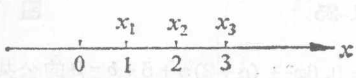


图 1-27

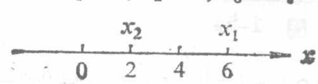


图 1-28

(3) $\because$ $2\sqrt{(x-3)^2}=x$，即 $|x-3|=\frac{x}{2}$，

当 $x\geqslant3$ 时，$x-3=\frac{x}{2}$，$\therefore$ $x_1=6$，

当 $x<3$ 时，$3-x=\frac{x}{2}$，$\therefore$ $x_2=2$。

例5 化简：$|1-a|-|2a+1|+|a+3|$。

解 原式 $=|a-1|-|2a+1|+|a+3|$，

当 $a<-3$ 时，原式 $=-(a-1)+(2a+1)-(a+3)=-1$；

当 $-3\leqslant a<-\frac{1}{2}$ 时，原式 $=2a+5$；

当 $-\frac{1}{2}\leqslant a<1$ 时，原式 $=-2a+3$；

当 $a\geqslant1$ 时，原式 $=1$。

二、习题

1．填空：

(1) 是不是任意实数都存在着它的倒数？答：________。

(2) 若 $a<0,b<0$，则 $\sqrt{(a+b)^2}=$________。

(3) 设下列各组数的最大公约数为 M，最小公倍数为 N，则(A) 48,84,120, $M=$____，$N=$________。(B) 540,225, $M=$________，$N=$________。

(4) 若 $x<0$，则 $|\sqrt{x^2}-x|=$________。

(5) 实数 a、b、c 满足条件，$a<b<0<c$，

$-\sqrt{a^2}-|a-b|+\sqrt{(c-a)^2}-|b-c|=$________。