



最新版

Б.П. 吉米多维奇 数学分析

习题精选精析

主 编 北京大学数学科学学院 张新国
编 写 双博士数学课题组

题型涵盖全面
解题思路点津
方法经典独到

2

科学技术文献出版社

Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题精选精析(2)

主 编 北京大学数学科学学院 张新国

编 写 双博士数学课题组

编写人员 胡东华 刘 茜 李菊川 刘 英 陈 丰 刘晓龙
熊国平 高永军 狄 懿 奎 伟 李 亮 刘立新
郭 娟 刘治国 杨 军 乔海玲 刘 津 刘大庆
汪 萍 胡星期 刘治佳 张 望 韩 彬 林娟娟
丁 晓 刘楣林 胡在斌 朱 傲 蔡贵娟 王绣英
李利娟 闵 伟 高 睿 李秀红 刘素枚 李 芹
韩 珍 周丽红 温 晴 包凌燕 钟崇光 韩 福
高 鑫 温桂荣 韩 琴 郭海权 史 进 温 军

总 策 划 胡东华

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

· 北京 ·

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题精选精析. 2/张新国主编. -修订本. -北京:科学技术文献出版社, 2008. 9

ISBN 978-7-5023-3388-1

I. 吉… II. 张… III. 数学分析-高等学校-解题 IV. 017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 123778 号

出 版 者 科学技术文献出版社
地 址 北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038
图书编务部电话 (010)51501739
图书发行部电话 (010)51501720, (010)51501722(传真)
邮 购 部 电 话 (010)51501729
网 址 <http://www.stdph.com>
策 划 编 辑 科 文
责 任 编 辑 李 静 杜 娟
责 任 出 版 王杰馨
发 行 者 科学技术文献出版社发行 全国各地新华书店经销
印 刷 者 北京高迪印刷有限公司
版 (印) 次 2008 年 9 月修订版 第 1 次印刷
开 本 850×1168 32 开
字 数 401 千
印 张 10.25
印 数 1~5000 册
定 价 18.00 元

© 版权所有 违法必究

购买本社图书,凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换。

声明:本书封面及封底均采用双博士品牌专用图标(见右图);该图标已由国家商标局注册登记。未经策划人同意,禁止其他单位或个人使用。



前 言

自上世纪五十年代初,Б. П. 吉米多维奇所著《数学分析习题集》中译本问世以来,该书对我国从事数学分析教学的广大师生产生了深刻的影响,很多人以解其中习题作为掌握、提高数学分析能力的手段、捷径。事实上,这本习题集也确实起到了这个作用。

同时,我们在教学实践中发现,原习题集收录了四千四百余道习题,数量过多;内容及解题方法重复率高;习题的解法过于拘泥于内容的编排;有些习题对于国内读者来说过于简单,而有些习题的解法又过于繁琐。有鉴于此,我们从中精选了二千三百余道难度适中有代表性的习题,由多年从事《数学分析》教学的作者做出力求较为简洁的解法,以适应广大国内数学分析学习者的需要。本习题集精选出原 Б. П. 吉米多维奇习题集的 4462 道中的 2340 道进行精解精析。编排遵循 Б. П. 吉米多维奇《数学分析习题集》的顺序,即函数与极限、单变量函数的微分学、不定积分、定积分、级数、多变量函数的微分学、带参变量的积分、重积分、曲线积分及曲面积分等。把它们分成三册,这也与国内同类大部分教材内容的顺序相仿。

此次我们在上一版的基础上,采纳广大读者的意见对原书多处解法进行了改进。另外为了帮助读者建立自己的知识结构,我们在每小节前加入了主要知识点的详尽概述。当然,数学分析的学习,做题仅仅是一个方面,关键是培养综合分析能力,数学逻辑思维,目的

是掌握数学分析的精髓。希望该习题集能起到抛砖引玉的效果。

限于作者水平,加之时间仓促,该习题集也许会有不妥之处,恳请热心读者批评指正,以便再版时做得更为完善。

温馨提示:

✱ “双博士品牌图书”是全国最大的大学教辅图书和考研图书品牌,全国有三分之一的大学生和考研学生正在使用“双博士品牌图书”。

✱ 来自北京大学研究生会的感谢信摘要:双博士,您好!……,首先感谢您对北京大学的热情支持和无私帮助!双博士作为大学教学辅导和考研领域全国最大的图书品牌之一,不忘北大莘莘学子和传道授业的老师,其行为将永久被北大师生感怀和铭记!

北京大学研究生会

✱ 现在市场上有人冒用我们的书名,企图以假乱真,因此,读者在购买时,请认准双博士品牌。

编者

2008 年于北京大学

目 录

第三章 不定积分

§ 1 最简单的不定积分	(1)
§ 2 有理函数的积分法	(34)
§ 3 无理函数的积分法	(44)
§ 4 三角函数的积分法	(46)
§ 5 各种超越函数的积分法	(57)
§ 6 函数的积分法的各种例子	(62)

第四章 定积分

§ 1 定积分作为和的极限	(67)
§ 2 利用不定积分计算定积分的方法	(73)
§ 3 中值定理	(97)
§ 4 广义积分	(103)
§ 5 面积的计算法	(113)
§ 6 弧长的计算法	(120)
§ 7 体积的计算法	(126)
§ 8 旋转曲面表面积的计算法	(135)
§ 9 矩的计算法. 重心的坐标	(138)
§ 10 力学和物理学中的问题	(141)
§ 11. 定积分的近似计算法	(146)

第五章 级数

§ 1 数项级数、同号级数收敛性的判别法	(159)
§ 2 变号级数收敛性的判别法	(184)
§ 3 级数的运算	(196)
§ 4 函数项级数	(200)
§ 5 幂级数	(231)
§ 6 傅立叶级数	(272)
§ 7 级数求和法	(286)
§ 8 利用级数求定积分之值	(297)
§ 9 无穷乘积	(301)
§ 10 斯特林格公式	(310)
§ 11 用多项式逼近连续函数	(313)
附录 积分表	(319)

第三章 不定积分

§ 1 最简单的不定积分

1. 不定积分的定义: 函数 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数的全体称为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分, 记作:

$$\int f(x) dx$$

其中 $\int$ ——积分号; $f(x)$ ——被积函数; $f(x) dx$ ——被积表达式; x ——积分变量.

2. 基本积分表

我们把基本导数公式改写成基本积分公式:

$$1) \int 0 dx = C;$$

$$2) \int 1 dx = \int dx = x + C;$$

$$3) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1, x > 0);$$

$$4) \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, (x \neq 0);$$

$$5) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$6) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1);$$

$$7) \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C, (a \neq 0);$$

$$8) \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C, (a \neq 0);$$

$$9) \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$$

$$10) \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$$

$$11) \int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + C;$$

$$12) \int \csc x \cdot \cot x dx = -\csc x + C;$$

$$13) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1;$$

$$14) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C_1;$$

3. 换元法——凑微分法:

有一些不定积分,将积分变量进行适当的变换后,就可利用基本积分表求出积分.

第一换元积分法:设 $f(u)$ 是连续函数, $F(u)$ 是 $f(u)$ 的一个原函数. 又若 $u = \varphi(x)$ 连续可微,并且复合运算 $f[\varphi(x)]$ 有意义,则

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \left(\int f(u) du \right) \Big|_{u=\varphi(x)} = F[\varphi(x)] + C$$

第二换元积分法:设 $f(u)$ 是连续函数, $\varphi(x)$ 是连续可微函数,且 $\varphi'(x)$ 定号,复合运算 $f[\varphi(t)]$ 有意义. 设 $F(t)$ 是 $f[\varphi(t)] \varphi'(t)$ 的一个原函数,即

$$\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F(t) + C$$

$$\text{则} \quad \int f(x) dx = \left(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right) \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} = F[\varphi^{-1}(x)] + C \quad (3)$$

其中 $\varphi^{-1}(x)$ 是 $\varphi(t)$ 的反函数.

4. 分部积分法

设 $u(x)$ 与 $v(x)$ 均为 x 的连续可微函数. 于是,由函数乘积的求导公式,有

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

或

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x)$$

5. 常用代换有无理代换,三角代换,双曲代换,倒数代换,万能代换, Euler 代换
利用最简积分表,求出下列积分:

$$[1628] \quad \int (3-x^2)^3 dx.$$

思路 利用最简积分表求积分

$$[解析] \quad \int (3-x^2)^3 dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int (27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6) dx \\
 &= 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C.
 \end{aligned}$$

【1629】 $\int x^2(5-x)^4 dx$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】 $\int x^2(5-x)^4 dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int x^2(625 - 500x + 150x^2 - 20x^3 + x^4) dx \\
 &= \int (625x^2 - 500x^3 + 150x^4 - 20x^5 + x^6) dx \\
 &= \frac{625}{3}x^3 - 125x^4 + 30x^5 - \frac{10}{3}x^6 + \frac{1}{7}x^7 + C.
 \end{aligned}$$

【1630】 $\int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】 $\int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int (1 - 6x + 11x^2 - 6x^3) dx \\
 &= x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + C.
 \end{aligned}$$

【1631】 $\int (\frac{1-x}{x})^2 dx$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】 $\int (\frac{1-x}{x})^2 dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x^2} dx = \int (\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1) dx$

$$= -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C.$$

【1632】 $\int (\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}) dx.$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】 $\int (\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}) dx = a\ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + C.$

【1633】 $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx.$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】 $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + 2 \sqrt{x} + C.$

【1634】 $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】
$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx &= \int (x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{5}{12}} + x^{-\frac{1}{4}}) dx \\ &= \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} - \frac{24}{17} x^{\frac{12}{5}} + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C. \end{aligned}$$

【1635】 $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx.$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】
$$\begin{aligned} \int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{1-3x^2+3x-x^3}{x\sqrt[3]{x}} dx \\ &= \int (x^{-\frac{4}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}) dx \\ &= -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} (1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{8}x^3) + C. \end{aligned}$$

【1636】 $\int (1 - \frac{1}{x^2}) \sqrt{x\sqrt{x}} dx.$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】
$$\begin{aligned} \int (1 - \frac{1}{x^2}) \sqrt{x\sqrt{x}} dx &= \int (1 - \frac{1}{x^2}) x^{\frac{3}{4}} dx \\ &= \int (x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}}) dx \\ &= \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + C = \frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}} + C. \end{aligned}$$

【1637】 $\int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x} dx.$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】
$$\begin{aligned} \int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x} dx &= \int \frac{(2x + \sqrt[3]{9x^2} - 2\sqrt{2x} \cdot \sqrt[3]{3x})}{x} dx \\ &= \int (2 - 2\sqrt[6]{72x}^{-\frac{1}{6}} + \sqrt[3]{9x}^{-\frac{1}{3}}) dx \end{aligned}$$

$$= 2x - \frac{12}{5} \sqrt[6]{72x^5} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{9x^2} + C.$$

【1638】 $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】
$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx &= \int \frac{\sqrt{(x^2 + \frac{1}{x^2})^2}}{x^3} dx \\ &= \int \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{x^3} dx \\ &= \int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}) dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C. \end{aligned}$$

【1639】 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx.$

【思路】 利用用最简积分表求积分

【解析】
$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx &= \int \frac{(1+x^2-1) dx}{1+x^2} \\ &= \int (1 - \frac{1}{x^2+1}) dx = x - \arctan x + C. \end{aligned}$$

【1640】 $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx.$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】
$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{1-x^2} dx &= - \int \frac{(1-x^2-1) dx}{1-x^2} \\ &= \int (-1 + \frac{1}{1-x^2}) dx \\ &= -x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C. \end{aligned}$$

【1641】 $\int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx.$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】
$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx &= \int \frac{(x^2-1+4) dx}{x^2-1} \\ &= \int (1 + \frac{4}{x^2-1}) dx \end{aligned}$$

$$= x + 2\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

$$\text{【1643】} \quad \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx.$$

【思路】 利用最简积分表求积分

$$\begin{aligned} \text{【解析】} \quad & \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx \\ &= \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| - \ln \left| x + \sqrt{x^2+1} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2+1}} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\text{【1644】} \quad \int (2^x + 3^x)^2 dx.$$

【思路】 利用用最简积分表求积分

$$\begin{aligned} \text{【解析】} \quad & \int (2^x + 3^x)^2 dx = \int (4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x) dx \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C. \end{aligned}$$

$$\text{【1646】} \quad \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$$

【思路】 利用最简积分表求积分

$$\begin{aligned} \text{【解析】} \quad & \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x + 1} dx \\ &= \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C. \end{aligned}$$

$$\text{【1647】} \quad \int (1 + \sin x + \cos x) dx.$$

【思路】 利用最简积分表求积分

$$\text{【解析】} \quad \int (1 + \sin x + \cos x) dx = x - \cos x + \sin x + C.$$

$$\text{【1648】} \quad \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx.$$

【思路】 利用函数的积分公式

$$\begin{aligned} \text{【解析】} \quad & \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx = \int \sqrt{1 - 2\sin x \cos x} dx \\ &= \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} dx \\ &= \int [\operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)] (\cos x - \sin x) dx \end{aligned}$$

$$= (\sin x + \cos x) \cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x) + C.$$

【1649】 $\int \cot^2 x dx.$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】 $\int \cot^2 x dx = \int (\csc^2 x - 1) dx = -\cot x - x + C.$

【1650】 $\int \tan^2 x dx.$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】 $\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C.$

【1651】 $\int (ashx + bchx) dx.$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】 $\int (ashx + bchx) dx = achx + bshx + C.$

【1652】 $\int th^2 x dx.$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】 $\int th^2 x dx = \int \left(1 - \frac{1}{ch^2 x}\right) dx = x - thx + C.$

【1653】 $\int coth^2 x dx.$

【思路】 利用最简积分表求积分

【解析】 $\int coth^2 x dx = \int \left(1 + \frac{1}{sh^2 x}\right) dx = x - cothx + C.$

求出下列积分:

【1655】 $\int \frac{dx}{x+a}.$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】 $\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{1}{x+a} d(x+a) = \ln|x+a| + C.$

【1656】 $\int (2x-3)^{10} dx.$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】 $\int (2x-3)^{10} dx = \int \frac{1}{2} (2x-3)^{10} d2x$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11} (2x-3)^{11} + C$

$$= \frac{1}{22}(2x-3)^{11} + C.$$

【1657】 $\int \sqrt[3]{1-3x} dx.$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】
$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{1-3x} dx &= -\frac{1}{3} \int \sqrt[3]{1-3x} d(1-3x) \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} (1-3x)^{\frac{4}{3}} + C \\ &= -\frac{1}{4} (1-3x)^{\frac{4}{3}} + C.\end{aligned}$$

【1658】 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}.$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}} &= -\frac{1}{5} \int \frac{d(2-5x)}{\sqrt{2-5x}} \\ &= -\frac{1}{5} \cdot 2(2-5x)^{\frac{1}{2}} + C \\ &= -\frac{2}{5} \sqrt{2-5x} + C.\end{aligned}$$

【1659】 $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}.$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}} &= \frac{1}{5} \int \frac{d(5x-2)}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) (5x-2)^{-\frac{3}{2}} + C \\ &= -\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}} + C.\end{aligned}$$

【1660】 $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx.$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】
$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx &= \int \frac{(1-x)^{\frac{2}{5}}}{1-x} dx \\ &= \int (1-x)^{-\frac{3}{5}} dx \\ &= -\frac{5}{2} \sqrt[5]{(1-x)^2} + C.\end{aligned}$$

【1661】 $\int \frac{dx}{2+3x^2}.$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2+3x^2} &= \int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}x)^2} \\&= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\sqrt{3}x}{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{d(\sqrt{\frac{3}{2}}x)}{1 + (\sqrt{\frac{3}{2}}x)^2} \\&= \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan(\sqrt{\frac{3}{2}}x) + C.\end{aligned}$$

【1663】 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{3}{2}x^2}} \\&= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\sqrt{\frac{3}{2}}x}{\sqrt{1-\frac{3}{2}x^2}} \\&= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(\sqrt{\frac{3}{2}}x) + C.\end{aligned}$$

【1665】 $\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx.$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】
$$\begin{aligned}\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx &= \int e^{-x} dx + \int \frac{1}{2} e^{-2x} d2x \\&= -(e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-2x}) + C.\end{aligned}$$

【1666】 $\int (\sin 5x - \sin 5a) dx.$

【思路】 利用函数积分的基本公式

【解析】
$$\begin{aligned}\int (\sin 5x - \sin 5a) dx &= \int \frac{1}{5} \sin 5x d5x - \int \sin 5a dx \\&= -\frac{1}{5} \cos 5x - x \sin 5a + C.\end{aligned}$$

$$【1667】 \int \frac{dx}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{4})}$$

【思路】 利用函数积分的基本公式

$$\begin{aligned} 【解析】 \int \frac{dx}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{4})} &= \int \frac{\frac{1}{2}d(2x + \frac{\pi}{4})}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{4})} \\ &= -\frac{1}{2}\cot(2x + \frac{\pi}{4}) + C. \end{aligned}$$

$$【1669】 \int \frac{dx}{1 - \cos x}.$$

【思路】 利用函数积分的基本公式

$$\begin{aligned} 【解析】 \int \frac{dx}{1 - \cos x} &= \int \frac{dx}{2\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \int \frac{d \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -\cot \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

$$【1671】 \int [\operatorname{sh}(2x+1) + \operatorname{ch}(2x-1)] dx.$$

【思路】 利用函数积分的基本公式

$$\begin{aligned} 【解析】 \int [\operatorname{sh}(2x+1) + \operatorname{ch}(2x-1)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int \operatorname{sh}(2x+1) d(2x+1) + \frac{1}{2} \int \operatorname{ch}(2x-1) d(2x-1) \\ &= \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(2x+1) + \operatorname{sh}(2x-1)] + C. \end{aligned}$$

$$【1672】 \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}.$$

【思路】 利用函数积分的基本公式

$$【解析】 \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} = 2 \int \frac{d \frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} = 2 \operatorname{th} \frac{x}{2} + C.$$

$$【1673】 \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}.$$