21世纪技工院校通用教材

高等数学

主编　王建林

Mathematics

苏州大学出版社

21 世纪技工院校通用教材

高 等 数 学

主编 王建林

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王建林主编. -苏州:苏州大学出版社,2008.9
21世纪技工院校通用教材
ISBN 978-7-81137-094-2

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.高等数学-技工学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第132319号

内容提要

本书是根据技师学院、高级技校学生的专业特点来编写的高等数学教材。

本着"实用为主、够用为度"的原则,本书强调微积分的基本计算和应用,舍弃了理论证明;同时,考虑到部分专业课程的教学中经常会用到解三角形、平面解析几何、复数等相关数学知识,本书在开始部分安排了知识回顾与复习这一章来介绍这些内容;另外,微分方程和级数是机电类专业课程所必须的重要工具,编者在最后部分加入了这两部分内容的介绍,不同专业可根据实际需要进行选用。

全书采用了任务驱动的方法,选取了大量生产、生活中的案例,将知识附着于任务,让学生在解决问题的过程中掌握相关数学知识,激发学生的学习兴趣。

高等数学

王建林 主编

责任编辑 谢金海

苏州大学出版社出版发行

(地址:苏州市干将东路200号 邮编:215021)

宜兴文化印刷厂印装

(地址:宜兴市南漕镇 邮编:214217)

开本 787×960 1/16 印张 14 字数 265 千

2008年9月第1版 2008年9月第1次印刷

ISBN 978-7-81137-094-2 定价:25.00元

《高等数学》编委会

主　编　王建林

副主编　姜　健

编　委　徐书娣　刘　悦　黄　华

蒋曙华　孙红芹　李明星

袁　军

前言

高等数学是技师学院、高级技校学生的一门基础性课程，是学生学好专业课程的基础工具。这类学生有其专业特点，本书就是紧扣专业要求来编写的。

根据技工院校学生的实际情况和教学需要，我们对内容的取舍作了精心安排。本着"实用为主、够用为度"的原则，本书强调微积分的基本计算和应用，舍弃了理论证明；同时，考虑到部分专业课程的教学中经常会用到解三角形、平面解析几何、复数等相关数学知识，本书在开始部分安排了知识回顾与应用这一章来介绍这些内容；另外，微分方程和级数是机电类专业课程所必须的重要工具，本书在最后也对这两部分内容进行了介绍，不同专业可根据实际需要选用。

我们在编写理念上力求创新，全书采用了任务驱动的方法，选取了大量生产、生活中的案例，将知识附着于任务，让学生在解决问题的过程中掌握相关数学知识，激发学习兴趣。我们力求这种编写方法能体现最新的教学改革成果。

在结构编排上，教材安排了学习目标、任务引入、主要知识、任务实施、课堂练习、应用举例、知识拓展等栏目。对于应用举例和知识拓展这两个栏目，教师可根据需要选讲或让学生课后自学。教材每一节习题分为A、B两组，其中A组题所有学生必须完成，B组题供学有余力

的学生自学或教师作为课堂教学内容的补充。书后同时配备了习题答案，供学生完成作业后参考。

参加本教材编写的人员有王建林、姜健、徐书娣、刘悦、黄华、蒋曙华、孙红芹、李明星、袁军，全书由王建林负责统稿。

本教材的编写得到了江苏省盐城技师学院的领导和部分老师的大力支持，苏州大学出版社的谢金海同志提出了不少宝贵意见，在此一并致以衷心的感谢。

由于编者的水平和经验有限，书中难免有错漏之处，恳请专家、同行和广大读者批评指正。

编 者

2008 年 8 月

目录

第一章　知识回顾与应用

§1-1　正弦定理和余弦定理 …… (1)
§1-2　二次曲线 …… (8)
§1-3　参数方程与极坐标 …… (22)
§1-4　复数 …… (33)

第二章　函数、极限与连续

§2-1　函数 …… (50)
§2-2　极限的概念 …… (60)
§2-3　极限的运算 …… (68)
§2-4　函数的连续性 …… (73)

第三章　导数与微分

§3-1　导数的概念 …… (83)
§3-2　导数的运算 …… (92)
§3-3　函数的微分 …… (98)
§3-4　导数的应用 …… (103)

第四章　不定积分

§4-1　不定积分的概念与性质 …… (117)
§4-2　直接积分法 …… (122)

§ 4-3　换元积分法 …………………………………………………… (126)
§ 4-4　分部积分法 …………………………………………………… (136)

第五章　定积分

§ 5-1　定积分的概念与性质 ……………………………………… (146)
§ 5-2　微积分基本公式 …………………………………………… (153)
§ 5-3　定积分的换元积分法与分部积分法 ……………………… (158)
§ 5-4　定积分的应用 ……………………………………………… (164)

第六章　微分方程简介

§ 6-1　微分方程的概念 …………………………………………… (179)
§ 6-2　一阶微分方程 ……………………………………………… (182)
§ 6-3　二阶常系数线性微分方程 ………………………………… (189)

第七章　无穷级数简介

§ 7-1　无穷级数的概念 …………………………………………… (199)
§ 7-2　傅立叶级数 ………………………………………………… (201)

参考答案 ……………………………………………………………… (208)

第一章 知识回顾与应用

本章主要回顾解三角形、平面解析几何、复数等相关知识，介绍这些知识在生产实践中的简单应用.

§1-1 正弦定理和余弦定理

学习目标

1. 能运用正弦定理、余弦定理解三角形.
2. 了解解三角形在零件加工中的应用.
3. 会计算锥形工件的圆锥半角.

任务引入

学习桌球技巧，关键在于掌握击球的力度和角度. 通过数学上的演译，或许可以帮助我们提高瞄准的意识并能更好地调准方向.

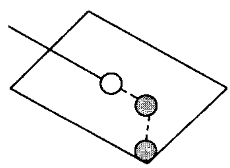


图 1-1

如图 1-1，假定桌面长度和宽度分别为 3.6 m 和 1.8 m，球的直径为 5.4 cm. 设白球刚好位于桌面的中央位置，而粉红色球与白色球皆位于同一中线上，两球相隔 1 m. 若想用白色球把粉红色球撞入左或右的尾袋取分，必须将前者从侧旁撞击后者，才有机会成功，那么我们怎样找出把白球击出时所需的角度?

主要知识

一、正弦定理

正弦定理 在任意三角形中，各边与它所对角的正弦之比相等，并且都等于三角形外接圆的直径. 即在$\triangle ABC$中，有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

正弦定理揭示的是三角形中各个角与其对应边的关系.

利用正弦定理求三角形的未知元素，主要有以下两种情形：

(1) 如果已知其任意两个角和一条边，就可计算出其他元素；

(2) 如果已知任意两条边和其中一条边的对角，就可以计算出其他元素.

例 1 在$\triangle ABC$中，$\angle A=45°$，$\angle B=60°$，$\angle a=10$，求 b.

解 由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，$\angle A=45°$，$\angle B=60°$，$a=10$，得

$$b=\frac{a}{\sin A}\cdot\sin B=\frac{10}{\sin 45°}\cdot\sin 60°=5\sqrt{6}.$$

例 2 在$\triangle ABC$中，已知 $a=8$ mm，$b=12$ mm，$\angle A=20°$，求$\angle B$，$\angle C$ 及边长 c.

解 利用正弦定理可得

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{12\cdot\sin 20°}{8}=0.5130.$$

因 $\sin B$ 是正值，故$\angle B$ 可以是锐角，也可以是钝角，有两种情形，如图 1-2 所示.

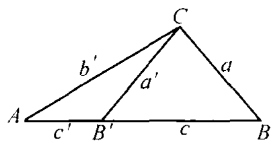


图 1-2

(1) 当$\angle B$ 为锐角时，$\angle B=30°52'$，此时

$$\angle C=180°-\angle A-\angle B=180°-20°-30°52'=129°8',$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{8\cdot\sin 129°8'}{\sin 20°}=18.14(\text{mm}).$$

(2)当$\angle B$ 为钝角时，$\angle B'=180°-30°52'=149°8'$，此时

$$\angle C'=180°-\angle A-\angle B=180°-20°-149°8'=10°52',$$

$$c'=\frac{a\cdot\sin C'}{\sin A}=\frac{8\cdot\sin 10°52'}{\sin 20°}=4.41(\text{mm}).$$

▶▶二、余弦定理

余弦定理 在任意三角形中,任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦乘积的2倍.即在△ABC中,有

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

余弦定理揭示的是三角形中两边及其夹角和另一边的关系.

利用余弦定理求三角形的未知元素,主要有以下两种情形:

(1) 如果已知三角形的两边及其夹角,就可计算出其他元素;

(2) 如果已知三角形的三条边,就可计算出其他元素.

例3 在△ABC中,已知$b=5$,$c=4$,$\angle A=60°$,求a,$\angle C$.

解 这是两边夹一角类型.

由余弦定理得

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=5^2+4^2-2\times5\times4\times\cos60°=21$,

则$a=\sqrt{21}$.

再一次运用余弦定理,得

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{21+25-16}{2\times\sqrt{21}\times5}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$,

则$\angle C=\arccos\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

例4 在△ABC中,已知$a=\sqrt{6}$,$b=\sqrt{3}+1$,$\angle C=45°$,求$\angle A$.

解 由余弦定理得

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=6+(\sqrt{3}+1)^2-2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)\cos45°=4$,

则$c=2$.

再由正弦定理得

$\sin A=\dfrac{a\sin C}{c}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

因$b>a$,故$A=60°$.(这里也可继续使用余弦定理来求,但计算量稍大一些)

任务实施

我们现在运用所掌握的知识完成开始提出的任务，该任务可简化为图 1-3.

在图 1-3 中，瞄准时 OP 为两球重心相隔的距离. 设 φ 为白球击出方向(OW)与线 OP 所成的角度，而撞击后粉红色球则以角度 θ 进入尾袋的 S 位置.

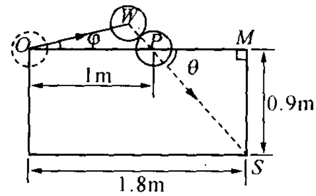


图 1-3

要找出 φ，可按以下三个步骤进行：

第一步：找出角度 θ.

$PM=(1.8-1)\ \text{m}=0.8\ \text{m}$,

$SM=0.9\ \text{m}$,

则 $\tan\theta=\dfrac{SM}{PM}=\dfrac{0.9}{0.8}=1.125$,

得 $\theta=48.37°$.

第二步：求出 OW 的长度.

在$\triangle OPW$ 中，PW=球的直径$=0.054\ \text{m}$,

由余弦定理得

$OW^2=PW^2+OP^2-2PW\cdot OP\cos\theta$,

代入已知数值得 $OW=0.965\ \text{m}$.

第三步：利用正弦定理算出 φ.

在$\triangle OPW$ 中，$\dfrac{PW}{\sin\varphi}=\dfrac{OW}{\sin\theta}$，则

$$\sin\varphi=\frac{PW\cdot\sin\theta}{OW}=\frac{0.8\times\sin 48.37°}{0.965}=0.041\ 8,$$

得 $\varphi=2.4°$.

由此可知：击球的角度必须非常精确，才能将粉红色球击入袋中.

课堂练习

利用正弦定理、余弦定理解三角形：

1. 在$\triangle ABC$ 中，已知 $a=\sqrt{2}$，$c=2$，$\angle A=30°$，求$\angle B$.
2. 在$\triangle ABC$ 中，已知 $a=3\sqrt{3}$，$b=2$，$\angle C=150°$，求 c.

应用举例

1. 解三角形在零件加工中的应用

例 5 如图 1-4 所示的曲柄连杆装置，连杆长 $L=400$ mm，曲柄 OP 的长 $r=100$ mm，当 $\alpha=0°$时，活塞 B 在 B'点. 求 $\alpha=50°$时，活塞 B 移动的距离 x.

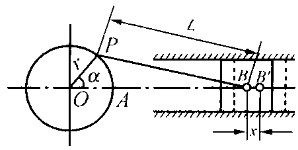


图 1-4

解 在$\triangle OPB$ 中，$\dfrac{r}{\sin B}=\dfrac{L}{\sin\alpha}$，则

$\sin B=\dfrac{r\cdot\sin\alpha}{L}=\dfrac{100\sin50°}{400}=0.1915$，

得$\angle B=11°2'$，

故$\angle P=180°-\angle B-\alpha=180°-11°2'-50°$

$=118°58'$.

又$\dfrac{OB}{\sin P}=\dfrac{L}{\sin\alpha}$，则

$OB=\dfrac{L\cdot\sin P}{\sin\alpha}=\dfrac{400\sin118°58'}{\sin50°}=456.84$(mm).

因为 $OB'=r+L=100+400=500$(mm)，

所以 $x=OB'-OB=500-456.84=43.16$(mm).

例 6 变速箱上三个孔的距离如图 1-5 所示(单位:mm)，在加工这些孔时，需要知道 B 孔与 A 孔的水平距离 x 和垂直距离 y，试求 x 和 y 的值.

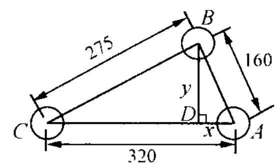


图 1-5

解 在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理得

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A$，

$\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=0.5115$，

则$\angle A=59°14'$.

在 Rt$\triangle ABD$ 中，

$y=AB\sin A=160\sin59°14'=137.48$(mm)，

$x=AB\cos A=160\cos59°14'=81.85$(mm).

2. 加工锥形工件时圆锥半角$\dfrac{\alpha}{2}$的计算

锥形工件中心线的截面图是一个等腰梯形，在车削时，对于锥体较短和锥度大于$\dfrac{1}{25}$的工件，可用转动小拖板的方法加工(如图 1-6(a)).

(1) 如果已知大端直径 D、小端直径 d 及锥形部分的长度 L，那么由图 1-6(b)

知，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC=L$，$BC=\dfrac{D-d}{2}$，则

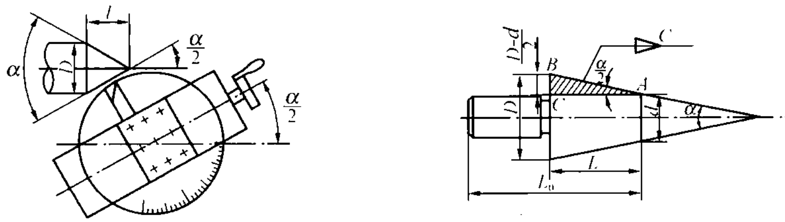
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{BC}{AC}=\frac{\frac{D-d}{2}}{L}=\frac{D-d}{2L}.$$

（2）如果已知锥度 C，那么由锥度公式 $C=\dfrac{D-d}{L}$ 代入上式，得

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{C}{2}.$$

（3）当圆锥半角 $\dfrac{\alpha}{2}<6^{\circ}$ 时，可用下列近似公式计算：

$$\frac{\alpha}{2}\approx 28.7^{\circ}\times\frac{D-d}{L}\approx 28.7^{\circ}\times C.$$



(a) (b)

图 1-6

例 7　在车削图 1-6(b)所示的锥形工件中，已知 $D=60$，$d=40$，$L=100$，求小拖板所转的角度 $\dfrac{\alpha}{2}$.

解　由 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{D-d}{2L}=\dfrac{60-40}{2\times 100}=0.1$，

得 $\dfrac{\alpha}{2}=\arctan 0.1=5^{\circ}43'$.

故小拖板所转的角度为 $5^{\circ}43'$.

例 8　有一主轴，其锥形部分锥度 $C=1:20$，求圆锥半角 $\dfrac{\alpha}{2}$.

解　$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{C}{2}=\dfrac{\frac{1}{20}}{2}=\dfrac{1}{40}=0.025$，

得 $\dfrac{\alpha}{2}=\arctan 0.025=1^{\circ}26'$.

故所求圆锥半角为 $1^{\circ}26'$.

习题 1-1

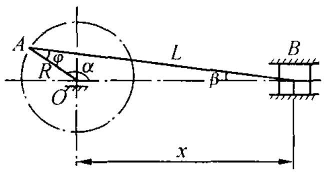
A 组

1. 在$\triangle ABC$中，$a=1$，$b=\sqrt{3}$，$\angle A=30°$，$\angle B$是锐角，求$\angle B$.

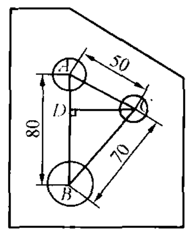
2. 在$\triangle ABC$中，$a=\sqrt{3}+1$，$b=2$，$c=\sqrt{2}$，求三个角.

3. 在$\triangle ABC$中，$a=2\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{3}$，$A=45°$，求c，$\angle B$，$\angle C$.

4. 如图所示曲柄连杆装置，已知曲柄长$R=10$ cm，连杆长$L=50$ cm，问：当$\alpha=120°$时，β及x值为多少？



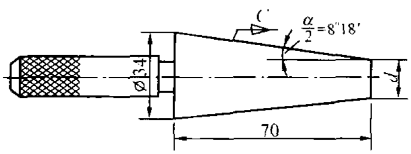
第 4 题图



第 5 题图

5. 齿轮箱侧面有图示三孔(单位：mm)，其中A、B两孔的中心连线垂直于底座基准线. 加工时顺次镗好A、B孔后，把镗杆从B退到D，再移动工作台，使镗杆对准C，然后镗C孔. 试根据图示尺寸求BD和DC.

6. 塞规的尺寸如图所示(单位：mm)，求其锥度C和小端直径d.



B 组

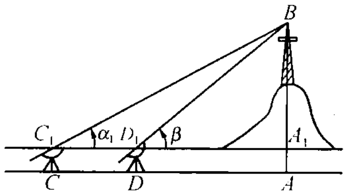
1. 在$\triangle ABC$中，$b=6$，$c=4$，$\cos A=\dfrac{1}{3}$，求a.

2. 在$\triangle ABC$中，已知$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，试判断三角形的形状.

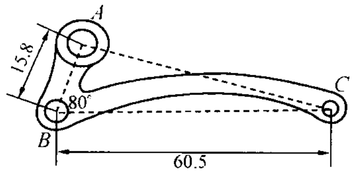
3. 已知：$\triangle ABC$中，$c=b(1+2\cos A)$，求证：$\angle A=2\angle B$.

4. 如图所示，要测量底部无法到达的山顶上电视塔的塔顶到地平面的高度

AB,从与山底在同一水平直线上的 C、D 两处,测得塔顶的仰角分别为 $\alpha_1=68°12'$ 和 $\beta=79°48'$,C 和 D 两点间的距离为 64.15 m,已知测量仪的高度为 1.56 m,求 AB.



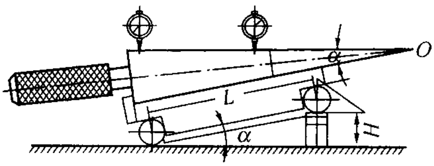
第 4 题图



第 5 题图

5. 缝纫机上的挑线杆形状如图所示(单位:mm),加工过程中需要计算 A 和 C 两个孔的中心距. 已知 $BC=60.5$ mm,$AB=15.8$ mm,$\angle ABC=80°$,求 AC 的长.(结果精确到 0.1 mm)

6. 如图所示用正弦规测量锥形工件,已知其圆锥半角 $\frac{\alpha}{2}=1°28'$,使用中心距 $L=200$ mm 的正弦规,求测量时应垫进量块组的高度 H.



第 6 题图

§1-2 二次曲线

学习目标

1. 知道二次曲线的标准方程.
2. 能根据条件求出二次曲线的方程.
3. 会运用二次曲线的相关知识解决生产实践中的问题.

任务引入

篮球运动是一项跳跃运动，而跳射是一种常见的投篮动作. 运动员如何利用这个动作进行投篮呢？

主要知识

一、直线

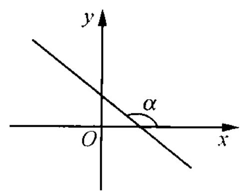


图 1-7

1. 倾斜角

一条直线的向上方向与 x 轴的正方向所夹的角称为直线的**倾斜角**(图 1-7).

直线与 x 轴平行时，其倾斜角规定为 0.

由定义，直线的倾斜角的范围是 $0\leqslant\alpha<\pi$.

斜率 k：当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时，$k=\tan\alpha$. 若直线经过两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，且不与 y 轴平行，则 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

2. 直线方程的几种形式

平面内一条直线的位置，可以由不同的条件来确定. 根据不同的条件可归纳成如下 5 种形式：

名称	已知条件	方程	说明
点斜式	点 $P_0(x_0,y_0)$ 斜率 k	$y-y_0=k(x-x_0)$	不包括 y 轴和平行于 y 轴的直线
斜截式	斜率 k 纵截距 b	$y=kx+b$	不包括 y 轴和平行于 y 轴的直线
两点式	点 $P_1(x_1,y_1)$ 点 $P_2(x_2,y_2)$	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$	不包括坐标轴和平行于坐标轴的直线
截距式	横截距 a 纵截距 b	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	不包括经过坐标原点的直线和平行于坐标轴的直线
一般式		$Ax+By+C=0$	A、B 不同时为零

以下给出几种特殊直线的方程：

① 平行于 x 轴的直线 $y=b(b\neq0)$；