



数学

配北师大版
必修4



课时1+3

案与测评



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社



数学

配北师大版
必修 4



主 编 泓 翰
副主编 张吉国
编 写 夏 炎 王思俭

高中新课标
GAO ZHONG XIN KE BIAO

课时1+3

学案与测评



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

学案与测评: 北师大版. 数学. 4: 必修/泓翰主编. —武汉: 武汉大学出版社, 2008. 9

ISBN 978-7-307-06457-7

I. 学… II. 泓… III. 数学课—高中—习题 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 116726 号

责任编辑: 李汉保

出版发行: 武汉大学出版社(430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件: wdp4@whu.edu.cn 网址: www.wdp.com.cn)

印刷: 山东鸿杰印务集团有限公司

开本: 880mm×1230mm 1/16 印张: 7 字数: 300 千字

版次: 2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-06457-7/G·1224 定价: 18.50 元

* 版权所有, 不得翻印; 凡购买我社的图书, 如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请与 13953171101 联系调换。

《学案与测评》是高中同步教学辅导用书，它以国家教育部新课程改革精神为指导，按照教育教学规律，科学地将教学与学习过程划分为课前、课中、课后三个阶段，并根据每个阶段的不同特点，确定浏览、研读、尝试、检测、评价等不同学习方式。本书循序渐进的合理设计，科学严谨的规范操作，将会确保广大学子在体味成长快乐的同时，享受成绩飞升的喜悦！

同步到课时，精确到课堂。
关怀到细节，服务到全程！

使用阶段	栏目名称		使用建议	使用效果
 课前	基础探究		课前预习	掌握本课时基础知识
 课中	互动学案	重点突破	课堂及时巩固	掌握重、难点知识
		范例点评	课堂梳理题型及方法	掌握各类题型的解题方法
		举一反三	课堂及时训练	熟练运用各类题型的解题方法
 课后	同步测评		实战练兵，自我检测	夯实基础，查缺补漏
	小结复习		自我梳理	掌握本章重、难点知识 构建完整的知识框架
	单元测试		正规测试	加强实战演练，提高应试技巧

高中新课标学案与测评

编委会

xue an yu ce ping

- 毕 鹏(山东省实验中学)
曹伯高(江苏省兴化中学)
曹光明(江苏省通州高级中学)
崔元刚(山东省烟台第二中学)
陈 华(江苏省江阴高级中学)
陈百尧(江苏省太仓高级中学)
邓干成(镇江市第一中学)
刁承才、高志雄(江苏省姜堰中学)
傅海伦(山东师范大学)
高玉军、赵希华(山东省济南外国语学校)
郭桂华(江苏省扬中高级中学)
何 勇(江苏省郑集中学)
胡静波(江苏省仪征中学)
黄国清(江苏省南菁高级中学)
金源萍(山东省威海第一中学)
蒋华强(江苏省宜兴中学)
蒋建华(江苏省泰州中学)
鞠党生、钱俊元(江苏省海安高级中学)
孔琪、张勇、董钦伟(山东省曲阜第一中学)
孔维玉、渠修东(山东省济宁第一中学)
李 帆(沂水第一中学)
李 宁(无锡市第一中学)
李圣平(山东省寿光第一中学)
李云国(山东省新泰第一中学)
李学生、王光锋(济南市长清第一中学)
李宗安(山东师范大学附中)
刘慧敏(临沂市第一中学)
刘艳潇、邹本荣(威海市第二中学)
张学科、韦修洋(山东省兖州第一中学)
冒亚平、张必忠(江苏省如东高级中学)
缪建新(江苏省南通中学)
潘溪民(江苏省华罗庚中学)
钱 进(南京市中华中学)
钱 骏(江苏省梁丰高级中学)
- 任欣伟(常州市第一中学)
孙广军、张吉国(山东省济北中学)
孙肖洁(山东省章丘第四中学)
汪六林(江苏省江都中学)
王海赳(江苏省木渎高级中学)
王 生(江苏省启东中学)
王树臣、刘红星(山东省聊城第一中学)
王统霞、彭春雨(临沂市莒南第一中学)
王兆平(江苏省东台中学)
王志勇(徐州市第一中学)
吴晓茅(南京市第一中学)
夏 炎(江苏省苏州中学)
肖秉林(江苏省建湖高级中学)
徐民东(广饶第一中学)
徐金才(江苏省邗江中学)
徐衍成、李传勇(泰安市第二中学)
杨洪伟(山东省泰安第一中学)
杨学华(莱芜市凤城高中)
杨忠锋(山东省济南第一中学)
叶育才(江苏省泰兴中学)
于振民、王 炜(山东省胶南第一中学)
喻旭初(南京市金陵中学)
臧宏毅、郭京君(山东省青岛第二中学)
张德伦(山东省东营第一中学)
张发新(南京市江宁高级中学)
张晓冰(江苏省南通第一中学)
张志朝(江苏省前黄高级中学)
张杰峰、窦健飞(山东省莱芜第十七中学)
赵达平(江苏省扬州中学)
赵洪德(山东省武城第二中学)
周久璘(南京师范大学附属中学)
周敏泽(江苏省常州高级中学)
朱春晓(江苏省丹阳高级中学)
姚建明、秦洁、陈峰、张莉娟(湖南省长郡中学)

泓翰编撰

Contents [目录]

高中新课标学案与测评

第一章 三角函数

第1课时	周期现象	(1)
第2课时	角的概念的推广	(3)
第3课时	弧度制	(6)
第4课时	任意角的正弦函数、余弦函数的定义	(8)
第5课时	单位圆与周期性	(10)
第6课时	单位圆与诱导公式	(12)
第7课时	从单位圆看正弦函数的性质、正弦函数的图像	(15)
第8课时	正弦函数的性质	(17)
第9课时	余弦函数的图像与性质	(19)
第10课时	正切函数的定义、图像与性质	(22)
第11课时	正切函数的诱导公式	(25)
第12课时	函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像	(27)
第13课时	三角函数的简单应用	(30)
第14课时	小结与复习	(33)
单元测试		(37)

第二章 平面向量

第1课时	从位移、速度、力到向量	(39)
第2课时	向量的加法	(41)
第3课时	向量的减法	(43)
第4课时	数乘向量	(46)
第5课时	平面向量基本定理	(48)
第6课时	平面向量的坐标(1)	(50)
第7课时	平面向量的坐标(2)	(53)
第8课时	从力做的功到向量的数量积	(55)

第 9 课时	平面向量数量积的坐标表示	(57)
第 10 课时	点到直线的距离公式	(60)
第 11 课时	向量的应用举例	(61)
第 12 课时	小结与复习	(64)
单元测试		(67)

第三章 三角恒等变形

第 1 课时	同角三角函数的基本关系	(69)
第 2 课时	两角和与差的三角函数(1)	(71)
第 3 课时	两角和与差的三角函数(2)	(73)
第 4 课时	二倍角的三角函数(1)	(76)
第 5 课时	二倍角的三角函数(2)	(79)
第 6 课时	小结与复习	(81)
单元测试		(85)

综合测试	(87)
------	------

参考答案	(89)
------	------



第一章

三角函数

第1课时 周期现象



基础探究

周期现象:下列属于周期现象的是_____.

- ①潮汐 ②海啸 ③地震 ④日出日落

互动学案

重点突破

周期现象

若某一现象按照一定的规律周而复始地重复出现,那么这种现象就称为周期现象.如海上波浪每间隔一段时间会重复出现,这种现象就是周期现象;再比如一个角度旋转一周(顺时针或逆时针)后,终边就又回到原来的位置,这也是周期现象.因此判断一种现象是否为周期现象,关键是看这种现象是否能够按照一定规律重复出现.

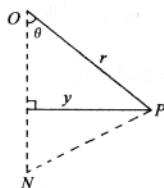
范例点评

题型一 生活与物理中的周期现象

【例1】走路时,我们的手臂自然地随步伐周期性地摆动,试分析手臂的周期摆动满足什么规律?

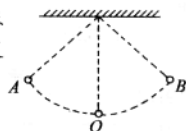
分析 将手臂的摆动看作是周期性的单摆运动.求所满足的规律,只要求出某一函数关系式即可.

解 如图所示,



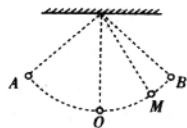
以 ON 代表手臂的垂直位置,当手臂摆动到 OP 位置时,设 $\theta = \angle PON$ 为摆动的幅角,而 y 为 P 点离开直线 ON 的水平距离, r 为手臂的长度.根据初中平面几何知识可得: $y = r \sin \theta$.

点评 如图所示,单摆运动,质点从 A 运动到 B 再回到 A 算是一次往复运动,这是解决单摆周期问题的关键.



举一反三

1. 如图所示,一个质点在平衡位置 O 点附近振动.如果不计阻力,可将这个振动看作周期运动.它离开 O 点向左运动,4 s 后第1次经过 M 点,再过2 s 第2次经过 M 点.该质点再过多长时间第4次经过 M 点?



题型二 海洋中的周期现象

【例2】为了观潮方便,通过研究潮汐规律,人们总结出下面的观潮表.

季节	农历	三十	初一	初二	初三	初四	初五	初六
		十五	十六	十七	十八	十九	二十	二十一
春	日	11:45	12:15	12:45	13:25	14:05	14:40	15:20
	夜	23:40	0:10	0:45	1:15	1:50	2:25	3:05
夏	日	11:30	11:50	12:25	13:15	13:45	14:25	15:05
	夜	23:20	23:45	0:10	1:05	1:40	2:15	2:55
秋	日	11:35	12:05	12:45	13:23	14:00	14:35	15:15
	夜	23:25	0:00	0:35	1:15	1:50	2:20	3:00
冬	日	11:10	11:45	12:15	13:05	13:40	14:15	15:00
	夜	23:05	23:35	0:05	1:00	1:30	2:10	2:55

根据观潮表,回答下面问题:

- (1)按一年的四季看,在每月农历三十的白天,哪一个季节潮水出现较早?

(2)一名游客七月份到该地旅游,白天几点去观潮好?

(3)假如一名游客春季某月的农历十九到该地观潮,中午13:30抵达观潮点,该游客至少还要等多长时间才能看到潮水?

(4)将观潮表的春季白天观潮时刻画成折线图,观察折线图有何特征?

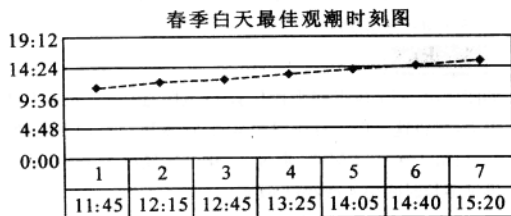
分析 观察数据,探寻观潮表中蕴涵的规律.

解 (1)根据观潮表,冬季潮水出现较早;

(2)三十、十五 11:30 去观潮;初一、十六 11:50 去观潮……初六、二十一 15:05 去观潮;

(3)因为春季的农历十九最佳的观潮时刻为 14:05,该游客中午 13:30 抵达观潮点,所以至少还要等 35 分钟才能看到潮水;

(4)折线图如下图所示:



图形近似为一条直线,说明相邻时刻相差时间近似相同,所以春季每月从农历三十到农历初六,从农历十五到农历二十一,观潮时间是周期性变化的.

点评 观潮表是人们经过长期观察潮水变化总结出来的,其中蕴涵了较多的周期性变化规律.

举一反三

2. 已知某海滨浴场的海浪高度 $y(\text{m})$ 是时间 $t(0 \leq t \leq 24, \text{单位: h})$ 的函数,记作: $y = f(t)$,下表是某日各时的浪高数据:

$t(\text{h})$	0	3	6	9	12	15	18	21	24
$y(\text{m})$	1.5	1.0	0.5	1.0	1.5	1.0	0.5	0.99	1.5

依据规定,当海浪高于 1 m 时才对冲浪爱好者开放,依据上表可以判断,一天内的 8:00 至 20:00 之间有多少时间可以供冲浪者运动?

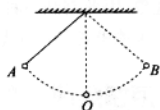
同步测评

基础巩固

- 下列现象是周期现象的是 ()
①心脏的跳动 ②汶川地震 ③心电图 ④走路时手臂的摆动
A. ①②③ B. ①③④
C. ①② D. ①②④
- 按照下列方式排列,周期是_____,第 100 个位置是_____.
□▲△◇★◆□▲△◇★◆□▲△◇★◆□▲△◇★◆
.....
- 今天是星期一,那么 2 012 天后是星期_____.
- 已知 $\frac{1}{7} = 0.142\ 857\ 142\ 857\cdots$,它的小数点后第 2 007 位的数字是_____.
- 男生女生按照下列方式排队,则第 21 个位置是_____.
男男男女女男男女女.....
- 今天是星期一,15 天后是星期_____.

能力提升

- 设钟摆每经过 1.8 秒回到原来的位置.在图中钟摆达到最高位置时开始计时,经过 1 分钟后,钟摆的大致位置是 ()
A. 点 A 处
B. 点 B 处
C. O、A 之间
D. O、B 之间
- 游乐场中的过山车有 20 个座位,每 20 分钟转一圈,则 3 小时内最多乘坐 ()
A. 170 人 B. 180 人 C. 190 人 D. 200 人



拓展延伸

- 今天是星期一,问:
(1) $7k(k \in \mathbb{Z})$ 天后的这天是星期几? $7k(k \in \mathbb{Z})$ 天前的这天是星期几?
(2) 158 天后的这天是星期几?

第2课时 角的概念的推广

基础探究

1. 正角、负角与零角

我们规定,一条射线按_____时针方向旋转形成的角叫正角;按_____时针方向旋转形成的角叫负角;_____旋转形成的角叫零角.

2. 终边相同的角

一般地,所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合:_____,即任何一个与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与周角的_____倍的和.

互动学案

重点突破

1. 任意角、象限角概念的理解

(1)对于正角、负角、零角概念的理解,由定义可知,关键是抓住终边的旋转方向是逆时针、顺时针还是没有转动.

(2)象限角

当角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,那么角的终边(除端点外)在第几象限,就说这个角是第几象限角.

2. 终边相同的角

(1)所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$,即任一与角 α 终边相同的角都可表示成角 α 与整数个周角的和.

(2)对于终边相同的角的表示要明确以下几点:

① k 为整数,且此条件必不可少;

② α 为任意角;

③ $k\cdot 360^\circ$ 与 α 之间用“+”连接,对于“ $k\cdot 360^\circ-\alpha$ ”可理解为“ $k\cdot 360^\circ+(-\alpha)$, $k\in\mathbf{Z}$ ”;

④相等的角终边一定相同,终边相同的角不一定相等,终边相同的角有无数个,它们相差 360° 的整数倍.

3. α 所在象限的判定

应先将 α 表示成: $k\cdot 360^\circ+\theta(k\in\mathbf{Z}, 0^\circ<\theta<360^\circ)$,则 θ 所在的象限即 α 所在的象限;在坐标系中,由角 α 的终边落在阴影部分写出 α 的集合,应按逆时针方向描述.如出现多个阴影部分合并时,应考虑周期性这一特征.

4. 第一象限的角、锐角、 $0^\circ\sim 90^\circ$ 的角、小于 90° 的角的区别与联系

第一象限的角可以表示成 $\{\alpha|k\cdot 360^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+90^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$,它包含锐角;锐角可以写成 $\{\alpha|0^\circ<\alpha<90^\circ\}$,它是第一象限的角; $0^\circ\sim 90^\circ$ 角是 $\{0|0^\circ\leq\alpha<90^\circ\}$,它包含锐角,也

是小于 90° 的角;小于 90° 的角可以写成 $\{\alpha|\alpha<90^\circ\}$,它包含锐角、零角和负角.

范例点评

题型一 有关角的概念

【例1】判断下列命题的真假.

- (1)终边相同的角一定相等;
- (2)锐角都是第一象限的角;
- (3) $0^\circ\sim 90^\circ$ 的角一定是锐角;
- (4)若 $\alpha\in[0^\circ, 90^\circ]$,则 α 是第一象限的角.

分析 根据各种角的定义判断.

解 (1)、(3)、(4)为假命题,(2)是真命题.

(1) -60° 和 300° 终边相同,但并不相等.

(2)因为锐角的集合是 $A=\{\alpha|0^\circ<\alpha<90^\circ\}$,第一象限角的集合是 $B=\{\alpha|k\cdot 360^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+90^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$.

对于 B :当 $k=0$ 时, B 与 A 相同,所以锐角是第一象限的角.

(3) $0^\circ\sim 90^\circ$ 的角是区间 $[0^\circ, 90^\circ]$ 内的角,与锐角范围不同.

(4) $\alpha=0^\circ$ 或 $\alpha=90^\circ$ 是轴线角,而非象限角.

点评 (1)要判断一个命题为假,只需举出一个反例,如

(1)、(4);

(2)正确理解正角、负角、零角的概念.

举一反三

1. 设 $M=\{\text{小于 } 90^\circ \text{ 的角}\}$, $N=\{\text{第一象限的角}\}$,则 $M\cap N=$ ()

- A. {锐角}
- B. {小于 90° 的角}
- C. {第一象限的角}
- D. 以上都不对

题型二 判定角所在的象限

【例2】已知角 α 是第二象限角,试确定 $2\alpha, \frac{\alpha}{2}$ 的终边所在的位置.

分析 确定角的终边所在的位置,就需要把角写成 $k\cdot 360^\circ+\alpha(0^\circ\leq\alpha<360^\circ, k\in\mathbf{Z})$ 的形式.

解 $\because \alpha$ 是第二象限角,

$\therefore k\cdot 360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+180^\circ(k\in\mathbf{Z})$

(1) $\because 2k\cdot 360^\circ+180^\circ<2\alpha<2k\cdot 360^\circ+360^\circ,$

$\therefore 2\alpha$ 是第三或第四象限的角或终边在 y 轴的非正半轴上.

(2) $\because k\cdot 180^\circ+45^\circ<\frac{\alpha}{2}<k\cdot 180^\circ+90^\circ,$

$\therefore$ 当 $k=2n(n\in\mathbf{Z})$ 时,

$n\cdot 360^\circ+45^\circ<\frac{\alpha}{2}<n\cdot 360^\circ+90^\circ$,即 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角;

当 $k=2n+1 (n \in \mathbb{Z})$ 时,

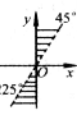
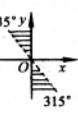
$n \cdot 360^\circ + 225^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 270^\circ$, 即 $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角.

$\therefore \frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限角.

点评 (1) 解决此类问题, 需熟练掌握各象限角的表示方法.

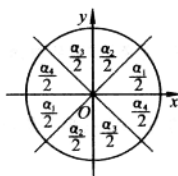
(2) 注意分类讨论思想的应用, 讨论依据是: 相差 360° 的整数倍的角的终边相同.

(3) 已知角 α 所在象限, 应熟练地确定 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限:

α	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
$\frac{\alpha}{2}$	第一或第三象限		第二或第四象限	
区域				

如果 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 分别表示第一、二、三、四象限角, 则 $\frac{\alpha_1}{2}$,

$\frac{\alpha_2}{2}, \frac{\alpha_3}{2}, \frac{\alpha_4}{2}$ 分布如图, 即第一象限角的半角是第一或第三象限角 (其余略), 熟记下图, 解有关问题就方便多了, 同理也可求 $\frac{\alpha}{3}$ 所在的位置.

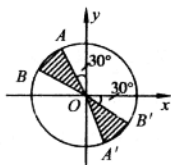


举一反三

2. 若 α 是第一象限角, 求 $\frac{\alpha}{3}$ 是第几象限角.

题型三 角的范围的表示

【例 3】如图, 写出角 α 的终边落在阴影部分 (含边界) 的角的集合.



分析 可分别表示两个阴影部分的角, 然后将两部分一起表示出来.

解 第二象限阴影部分角的集合可表示为

$$\{\alpha | 120^\circ + k \cdot 360^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\alpha | 120^\circ + 2k \cdot 180^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\};$$

第四象限阴影部分角的集合可表示为

$$\{\alpha | 300^\circ + k \cdot 360^\circ \leq \alpha \leq 330^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\alpha | 120^\circ + (2k+1) \cdot 180^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ + (2k+1) \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$$

综上所述, 所求阴影部分角的集合为

$$\{\alpha | 120^\circ + k \cdot 180^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$$

点评 如果一个阴影区域可看成一条直线沿逆时针方向旋转而成的, 则终边在这个阴影区域内的角的集合可以用一个不等式表示, 不等式的左端点是终边在已知初始直线上的角, 在此基础上加上沿逆时针方向旋转的度数, 便得到不等式的右端点.

举一反三

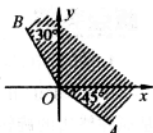
3. 如图, 终边落在阴影部分 (含边界) 的角的集合是 ()

A. $\{\alpha | -45^\circ \leq \alpha \leq 120^\circ\}$

B. $\{\alpha | 120^\circ \leq \alpha \leq 315^\circ\}$

C. $\{\alpha | k \cdot 360^\circ - 45^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 120^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

D. $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 120^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 315^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$



题型四 终边相同的角问题

【例 4】在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间, 求出与下列各角终边相同的角, 并判断下列各角是哪个象限的角.

(1) $920^\circ 18'$; (2) -840° .

分析 将所给的角写成 $\alpha + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z}, \alpha \in (0^\circ, 360^\circ))$ 的形式, α 所在象限即为该角所在象限.

解 (1) $920^\circ 18' = 2 \times 360^\circ + 200^\circ 18'$, 则 $200^\circ 18'$ 即为所求角, 因为它是第三象限角, 从而 $920^\circ 18'$ 也是第三象限的角.

(2) $-840^\circ = -3 \times 360^\circ + 240^\circ$, 则 240° 即为所求角, 因为它是第三象限角, 从而 -840° 也是第三象限的角.

点评 判定一个角所在象限, 关键是将该角写成 $k \cdot 360^\circ + \theta (k \in \mathbb{Z}, 0^\circ < \theta < 360^\circ)$, 则 θ 所在象限即为该角所在象限.

举一反三

4. 下列各组角中, 终边相同的是 ()

A. $390^\circ, 690^\circ$

B. $-330^\circ, 750^\circ$

C. $480^\circ, -420^\circ$

D. $330^\circ, -840^\circ$

题型五 区域角问题

【例 5】求终边在 $y = -x$ 上的角的集合.

分析 先在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内找出满足条件的角, 然后表示出与其终边相同的角的集合.

解 $\because$ 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 满足条件的角为 135° 和 315° , $\therefore$ 终边在 $y = -x$ 上的角的集合为

$\{ \alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 135^\circ, k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 315^\circ, k \in \mathbb{Z} \}$

$= \{ \alpha | \alpha = 2k \cdot 180^\circ + 135^\circ, k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \alpha | \alpha = 2k \cdot 180^\circ + 180^\circ + 135^\circ, k \in \mathbb{Z} \}$

$= \{ \alpha | \alpha = 2k \cdot 180^\circ + 135^\circ, k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \alpha | \alpha = (2k+1) \cdot 180^\circ + 135^\circ, k \in \mathbb{Z} \}$

$= \{ \alpha | \alpha = n \cdot 180^\circ + 135^\circ, n \in \mathbb{Z} \}.$

点评 (1)先找出 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内满足条件的角,其他符合条件的角必与这些角的终边相同.

(2)化简集合时,注意把大角向小角分解.如本题 $315^\circ = 135^\circ + 180^\circ$,同时把 $k \cdot 360^\circ$ 写成 $2k \cdot 180^\circ$,以便统一形式.

举一反三

5. 写出终边在坐标轴上的角的集合.

误区警示

【案例分析】下列命题中正确的是 ()

- A. 终边相同的角都相等
- B. 第一象限的角比第二象限的角小
- C. 第一象限的角都是锐角
- D. 锐角都是第一象限的角

错解 A、B或C

错解分析 错选A的是因为对终边相同的角的概念理解不透彻,任何一个角 α 的终边旋转 360° 的整数倍以后,都与它原来的终边重合,但它们相差 360° 的整数倍;错选B的是因为对象限角的概念理解不清,象限角只反映角的终边的位置,而不反映角的大小.某个象限的角有无数个,其中有正角,也有负角,所以第一象限的角不一定比第二象限的角小;错选C的是因为对象限角与锐角的概念理解不清.

正解 D

同步测评

基础巩固

①在 0° 到 360° 的范围内与 -225° 终边相同的角是 ()

- A. 45° B. 135° C. 225° D. 315°

②与 -457° 角终边相同的角的集合是 ()

- A. $\{ \alpha | \alpha = 457^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \}$
- B. $\{ \alpha | \alpha = 97^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \}$
- C. $\{ \alpha | \alpha = 263^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \}$
- D. $\{ \alpha | \alpha = -263^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \}$

③若 α 为锐角,则 $\alpha + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ 所在的象限是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限
- C. 第一、三象限 D. 第一、四象限

④给出下列四个命题:

- ① -60° 是第四象限角;
- ② 225° 是第三象限角;
- ③ -940° 是第二象限角;
- ④ -675° 是第一象限角.

其中正确的有 ()

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

⑤若 α 是第一象限角,则下列各角中仍是第一象限角的是 ()

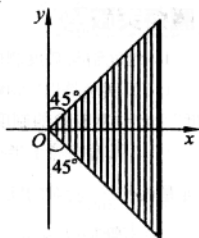
- A. $90^\circ - \alpha$ B. $90^\circ + \alpha$
- C. $360^\circ - \alpha$ D. $180^\circ + \alpha$

⑥已知 α 为第三象限角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限是 ()

- A. 第一或第二象限 B. 第二或第三象限
- C. 第一或第三象限 D. 第二或第四象限

能力提升

⑦写出下列区域(含边界)所表示的角的集合.



⑧集合 $A = \{ \alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ - 36^\circ, k \in \mathbb{Z} \}$, $B = \{ \beta | -180^\circ < \beta < 180^\circ \}$, 则 $A \cap B =$ _____.

拓展延伸

⑨已知角 α 的终边经过点 $P(1, 1)$, 试写出角 α 的集合 A , 并把集合 A 中在 -720° 到 360° 间的角写出来.

第3课时 弧度制

基础探究

1. 在单位圆中长为1个单位长度的弧所对的圆心角称为_____,它的单位符号是_____,读作_____.
2. 在单位圆中,当圆心角为周角时,它所对的弧长(即圆周长)为_____,所以周角的弧度数为_____.
3. 一般地,任一正角的弧度数都是一个_____;任一负角的弧度数都是一个_____;零角的弧度数是_____.
4. 以_____作为单位来度量角的单位制,叫做弧度制.
5. $360^\circ = \text{_____ rad}$, $180^\circ = \text{_____ rad}$, $1^\circ = \text{_____ rad} \approx 0.01745 \text{ rad}$, $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'$.

互动学案

重点突破

1. 角度制与弧度制的区别与联系

(1) 弧度制是以“弧度”为单位度量角的制度,角度制是以“度”为单位度量角的制度.

(2) 1 弧度是等于半径长的圆弧所对的圆心角的大小,而1度是圆的 $\frac{1}{360}$ 所对的圆心角的大小.

(3) 不管是以“弧度”还是以“度”为单位的角的大小都是一个与半径的大小无关的定值.

(4) 用弧度为单位表示角的大小时,“弧度”两字可以省略不写,这时弧度数在形式上虽是一个无名数,但我们应当把它理解为名数.如 $\sin 2$ 是指 $\sin(2 \text{ 弧度})$, $\pi = 180^\circ$ 是指 $\pi \text{ 弧度} = 180^\circ$;但如果以度($^\circ$)为单位表示角时,度($^\circ$)就不能省去.

(5) 角的概念推广以后,无论用角度制还是用弧度制都能在角的集合与实数集 $\mathbf{R}$ 之间建立一种一一对应的关系;每一个角都有唯一的一个实数与它对应;反过来,每一个实数也都有唯一的一个角与它对应.

2. 弧长公式与扇形面积公式

(1) 设 l 是以角 α 作为圆心角时所对的弧的长, r 是圆的半径,则有 $l = |\alpha|r$.

(2) 扇形面积公式 $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}|\alpha|r^2$.

范例点评

题型一 度与弧度的转化

【例1】把 $22^\circ 30'$ 化为弧度;把 $\frac{\pi}{12}$ 化为角度.

分析 依据 $2\pi = 360^\circ$ 进行转化.

解 $22^\circ 30' = 22.5^\circ = 22.5 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$;

$\frac{\pi}{12} \text{ rad} = \frac{\pi}{12} \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$.

点评 应熟练掌握度与弧度的变化,尤其是对 0° 、 30° 、 45° 、 60° 、 90° 、 120° 、 150° 、 270° 的弧度表示.

举一反三

1. $\frac{\pi}{5} = \text{_____}^\circ$; $-72^\circ = \text{_____} \text{ 弧度}$.

题型二 终边相同的角

【例2】已知角 α 的终边与 $\frac{\pi}{3}$ 的终边相同,在 $[0, 2\pi)$ 内

哪些角与 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边相同?

分析 将 $\frac{\alpha}{3}$ 表示成 $\frac{2k\pi}{3} + \theta$ ($0 < \theta < 2\pi$) 的形式,根据 k 的取值判断.

解 $\because \alpha$ 的终边与 $\frac{\pi}{3}$ 的终边相同,

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), $\therefore \frac{\alpha}{3} = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ ($k \in \mathbf{Z}$),

当 $k=0, 1, 2$ 时,有 $\frac{\alpha}{3} = \frac{\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}$, 它们均在 $[0, 2\pi)$ 内,

故所求角为 $\frac{\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}$.

点评 与 α 终边相同的角的弧度制形式为 $2k\pi + \alpha$ ($k \in \mathbf{Z}$), 这里 α 应为弧度. 寻找某个区间内与 α 终边相同的角 β 时,要先表示出 β 的一般形式,然后再讨论 k 的取值.

举一反三

2. 将下列弧度制表示的角化为 $2k\pi + \alpha$ ($k \in \mathbf{Z}, \alpha \in [0, 2\pi)$) 的形式,并指出它们所在的象限.

(1) $-\frac{15\pi}{4}$; (2) $\frac{32\pi}{3}$; (3) -20 .

题型三 扇形中的弧长与面积问题

【例3】已知一扇形的周长为 40 cm , 当它的半径和圆心角取什么值时,才能使扇形的面积最大? 最大面积是多少?

分析 根据周长表示出扇形面积.

解 设扇形的圆心角为 θ , 半径为 r , 弧长为 l , 面积为 S , 则 $l+2r=40$, $\therefore l=40-2r$,

$$\therefore S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}(40-2r)r = -r^2 + 20r \\ = -(r-10)^2 + 100,$$

$\therefore$ 当 $r=10$ cm 时, 扇形的面积最大, 这个最大值为 100 cm^2 , 这时 $\theta = \frac{l}{r} = \frac{40-2 \times 10}{10} = 2(\text{rad})$.

点评 扇形四要素: S, l, r, θ , 每三要素间均构成联系, 知道其中两个可求另外两个.

举一反三

3. 已知一扇形的周长是 6 cm, 该扇形的圆心角是 1 弧度, 求该扇形的面积.

D. $\left\{ \beta \mid \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

- ③ 若 $\alpha = -3$, 则 α 的终边在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

- ④ 终边在第一、四象限的角的集合可表示为 ()

A. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$

B. $\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right), k \in \mathbb{Z}$

C. $\left(0, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right)$

D. $\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi \right) \cup \left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right), k \in \mathbb{Z}$

- ⑤ 下列终边相同的角是 ()

A. $(2k+1)\pi$ 与 $(4k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$

B. $\frac{k\pi}{2}$ 与 $k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

C. $k\pi + \frac{\pi}{6}$ 与 $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

D. $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 与 $\frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

- ⑥ 在半径为 1 的单位圆中, 一条弦 AB 的长度为 $\sqrt{3}$, 则弦 AB 所对的圆心角 α 是 ()

A. $\alpha = \sqrt{3}$

B. $\alpha < \sqrt{3}$

C. $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

D. $\alpha = 120$

能力提升

- ⑦ 用弧度制表示终边在 $y = \sqrt{3}x$ 上的角的集合 _____.

- ⑧ 圆的半径变为原来的 $\frac{1}{2}$, 而弧长不变, 则该弧所对的圆心角是原来的 _____ 倍.

拓展延伸

- ⑨ 已知一个扇形的圆心角为 72° , 半径等于 20 cm, 求扇形的面积.

误区警示

用弧度制表示角时, 注意不能与角度制混合使用.

【案例分析】把下列各角化成 0 到 2π 的角加上 $2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 的形式.

(1) $\frac{23\pi}{3}$; (2) -450° .

错解 (1) $\frac{23\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 7\pi$;

(2) $-450^\circ = -720^\circ + 270^\circ = -4\pi + 270^\circ$.

错解分析 (1) 没有化为“ $2k\pi + \alpha$ ”的形式; (2) 角度制与弧度制混用.

正解 (1) $\frac{23\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + 6\pi$; (2) $-450^\circ = \frac{3\pi}{2} - 4\pi$.

同步测评

基础巩固

- ① 与 60° 的角终边相同的角的集合是 ()

A. $\left\{ \beta \mid \beta = \frac{\pi}{3} + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \right\}$

B. $\left\{ \beta \mid \beta = 60^\circ + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

C. $\left\{ \beta \mid \beta = 60^\circ + 2k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \right\}$

D. $\left\{ \beta \mid \beta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

- ② 在直角坐标系中, 终边在 y 轴上的角的集合是 ()

A. $\left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$

B. $\left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$

C. $\left\{ \beta \mid \beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

第4课时 任意角的正弦函数、余弦函数的定义

基础探究

1. 在直角坐标系中,以原点为圆心,以_____为半径的圆称为单位圆.

2. 一般地,在直角坐标系中,给定单位圆,对于任意角 α ,使角 α 的顶点与原点重合,始边与 x 轴正半轴重合,终边与单位圆交于点 $P(u, v)$,那么点 P 的_____ v 叫做角 α 的正弦函数,记作_____ ;点 P 的_____ u 叫做角 α 的余弦函数,记作_____ .

3. 通常,我们用 x 表示自变量,即 x 表示角的大小,用 y 表示函数值,这样我们就定义了任意角三角函数 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$,它们的定义域为_____,值域为_____.

4. 角 α 的正余弦函数值:

象限	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
三角函数				
$\sin \alpha$	+		-	
$\cos \alpha$		-		+

互动学案

重点突破

1. 对三角函数定义的理解

三角函数值是比值,是一个实数,这个实数的大小和 (x, y) 在终边上的位置无关,而由角 α 的终边位置决定.对于确定的角 α ,其终边的位置也唯一确定,因此,三角函数是角的大小的函数.

2. 三角函数值在各象限内的符号

三角函数值在各象限内的符号判别记忆规律如下:一全正、二正弦、三两切、四余弦(“一全正”是指角的终边在第一象限时,各种三角函数值的符号全为正号).每个三角函数在两个象限内符号为正,另两个象限内符号为负.

范例点评

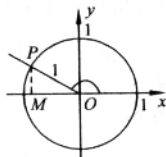
题型一 已知角的大小求其正、余弦值

【例1】在直角坐标系下的单位圆中, $\alpha = \frac{5}{6}\pi$,求 $\sin \alpha$,

$\cos \alpha$.

分析 由任意角的正弦、余弦函数的定义求解.

解 如图,以原点为角的顶点,以 x 轴的正半轴为始边,作 $\angle xOP = \frac{5}{6}\pi$,点 P 为角 $\frac{5}{6}\pi$ 与单位圆的交点.



作 $PM \perp x$ 轴于 M ,则 $\angle POM = \frac{\pi}{6}$.

$\because OP = 1, \therefore |MP| = \frac{1}{2}, |OM| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $\because$ 点 P 在第二象限,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

$\therefore \sin \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}, \cos \frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

点评 运用任意角三角函数的定义求角 α 的正弦、余弦函数时,可由点 P 向 x 轴、 y 轴引垂线,构造直角三角形,求得直角三角形直角边的长,再根据角 α 终边所在象限,写出点 P 的坐标,从而求得 α 的正弦、余弦函数值.

举一反三

1. 在直角坐标系下的单位圆中, $\alpha = \frac{\pi}{3}$,求 $\sin \alpha, \cos \alpha$.

题型二 任意角的正弦、余弦函数的定义

【例2】已知角 θ 的终边与单位圆交于点 $P(-\frac{\sqrt{3}}{2}, y)$,

求 $\sin \theta$ 与 $\cos \theta$ 的值.

分析 先求出 y 的值,然后根据正弦函数的定义域求解.

解 因为点 P 在单位圆上,所以 $(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + y^2 = 1$,解得 $y = \pm \frac{1}{2}$.

当 $y = \frac{1}{2}$ 时,点 P 的坐标为 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$,

$\sin \theta = \frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

当 $y = -\frac{1}{2}$ 时,点 P 的坐标为 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$,

$$\sin \theta = -\frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

点评 灵活运用任意角的正弦、余弦函数定义解题.

举一反三

2. 若角 α 的终边落在直线 $y = \sqrt{3}x$ 上, 求 $\sin \alpha, \cos \alpha$.

题型三 三角函数在各象限符号的判定

【例 3】判断下列各式的符号.

- (1) $\cos(-350^\circ)$; (2) $\sin 105^\circ \cos 230^\circ$.

分析 先确定角所在象限, 然后确定三角函数值的符号.

解 (1) $\because -350^\circ = -360^\circ + 10^\circ$ 是第一象限角,

$$\therefore \cos(-350^\circ) > 0.$$

(2) $\because 105^\circ$ 是第二象限角, 230° 是第三象限角,

$$\therefore \sin 105^\circ > 0, \cos 230^\circ < 0, \therefore \sin 105^\circ \cos 230^\circ < 0.$$

点评 若角确定, 则角所在象限确定, 角的各三角函数值的符号也就确定了. 在判定符号时, 要联系三角函数的定义, 这样解题思路的形成就有了依托.

举一反三

3. 判断下列各式的符号.

- (1) $\sin \frac{7}{12}\pi$; (2) $\cos 3$.

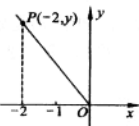
误区警示

【案例分析】已知 $P(-2, y)$ 是角 θ 终边上一点, 且 $\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{5}$, 求 y 的值.

错解 $\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{4+y^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$, 解得 $y = \pm \frac{4\sqrt{34}}{17}$.

错解分析 本题的错因是没有注意角 θ 终边的位置, 要先根据 $\sin \theta$ 的符号确定 θ 角终边的位置, 然后根据 θ 角终边的位置确定 y 的符号.

正解 如图, 由正弦函数定义及平面几何中相似三角形的知识可知, 当 $\sin \theta > 0$ 时, 角 θ 的终边在第一、第二象限或 y 轴正半轴上. 由于点 P 是角 θ 终边上一点, 且 $x_p = -2 < 0$, 因此, $y > 0$.



又 $|OP| = \sqrt{(-2)^2 + y^2} = \sqrt{4+y^2}$, 故 $\sin \theta = \frac{y}{|OP|}$,

$\therefore \frac{2\sqrt{2}}{5} = \frac{y}{\sqrt{4+y^2}}$, 整理得 $y^2 = \frac{32}{17}$, 故 $y = \frac{4\sqrt{34}}{17}$.

同步测评

基础巩固

- ① $\sin \frac{3}{2}\pi$ 等于 ()

- A. 1 B. -1 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

- ② 角 α 的终边上有一点 $P(1, -1)$, 则 $\sin \alpha$ 的值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

- C. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 1

- ③ 若 $\sin \alpha \cos \alpha > 0$, 则 α 角在 ()

- A. 第一、二象限 B. 第一、三象限
C. 第一、四象限 D. 第三、四象限

- ④ 已知角 α 的终边经过点 $P(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ)$, 则 $\sin \alpha$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$

- C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

- ⑤ 已知 $P(-\sqrt{3}, y)$ 为角 β 的终边上的一点, 且 $\sin \beta = \frac{\sqrt{13}}{13}$, 则 y 等于 ()

- A. $\pm \frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$

- C. $-\frac{1}{2}$ D. ± 2

- ⑥ 已知角 α 的终边在直线 $y = -3x$ 上, 则 $\sin \alpha$ 等于 ()

- A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ B. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

- C. $\pm \frac{3\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

能力提升

- ⑦ $\sin \frac{4}{3}\pi$ _____ 0, $\cos \frac{11}{3}\pi$ _____ 0. (填“>”, “<”)

- ⑧ 已知 $|\cos \theta| = \cos \theta$, $|\sin \theta| = -\sin \theta$, 则 $\frac{\theta}{2}$ 的终边在 _____.

拓展延伸

- ⑨ 已知角 α 的终边经过点 $P(-15a, 8a)$ ($a \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 0$), 求 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$.

第5课时 单位圆与周期性

基础探究

1. 周期函数与周期

一般地,对于函数 $f(x)$,如果存在非零实数 T ,任取定义域内的任意一个 x 值,都有 $f(x+T)=f(x)$,我们就把 $f(x)$ 称为周期函数, T 称为这个函数的周期.

2. 正弦、余弦函数的周期性

函数值随自变量的变化呈周期性变化的函数叫周期函数. 正弦函数、余弦函数是周期函数,称为 2π 的正弦函数、余弦函数的周期,其中 2π 是正弦函数、余弦函数正周期中最小的一个,称为最小正周期.

互动学案

重点突破

1. 对周期函数的理解

(1) 周期性不是正弦函数、余弦函数的专有性质. 例如, $y=(x-2k)^2 (x \in [2k-1, 2k+1], k \in \mathbb{Z})$ 就是一个周期为 2 的函数.

(2) 根据周期函数的定义,对于不为零的常数 T ,如果“ $(x+T)$ 的函数值等于 x 的函数值”不是对定义域中的每一个 x 值都成立,那么常数 T 就不是函数 $f(x)$ 的周期. 例如: $\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = \sin \frac{3\pi}{4}$,但是 $\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}) \neq \sin \frac{5\pi}{6}$. 就是说不是对于定义域内的每一个 x 值都有 $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x$,因此 $\frac{\pi}{2}$ 不是 $y = \sin x$ 的周期.

(3) 对于每一个周期函数 $f(x)$,如果在它所有的周期中存在一个最小的正数,那么这个最小正数就叫做 $f(x)$ 的最小正周期. 2π 是正弦函数的所有周期中的最小正数,所以 2π 是正弦函数的最小正周期. 但并非每一个周期函数都有最小正周期. 例如,任意非零常数都是常数函数 $f(x)=c (c \text{ 为常数})$ 的周期,因而常数函数无最小正周期.

(4) 利用单位圆本身的对称性,观察角的终边 α 与角 $\pi-\alpha, -\alpha, 2\pi-\alpha, \pi+\alpha, \frac{\pi}{2}-\alpha$ 的终边与单位圆交点坐标的对称性,得到角 α 与 $\pi-\alpha$ 的正弦、余弦函数关系——关于 y 轴对称;角 α 与 $-\alpha, 2\pi-\alpha$ 的正弦、余弦函数关系——关于 x 轴对称;角 α 与 $\pi+\alpha$ 的正弦、余弦函数关系——关于原点对称;角 α 与 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的正弦、余弦函数关系——关于直线 $y=x$ 对称.

2. 正弦、余弦函数的周期

在单位圆中,角 x 终边与单位圆的交点的坐标为 $P(u, v)$,则所有与角 x 终边相同的角的终边与单位圆的交点都是 $P(u, v)$,由正弦、余弦函数的定义知

$$\sin(2k\pi+x)=\sin x (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\cos(2k\pi+x)=\cos x (k \in \mathbb{Z}).$$

即终边相同的角正弦、余弦函数值相同.

因此,正、余弦函数的周期都是 $2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

范例点评

题型一 利用正、余弦函数的周期性求三角函数值

【例1】 求下列各三角函数值.

$$(1) \cos 1560^\circ; (2) \sin(-\frac{17\pi}{3}).$$

分析 把式子中的角化为 $2k\pi + \alpha (0 \leq \alpha < 2\pi, k \in \mathbb{Z})$ 的形式.

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \cos 1560^\circ &= \cos(4 \times 360^\circ + 120^\circ) \\ &= \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$(2) \sin(-\frac{17\pi}{3}) = \sin(-6\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

点评 根据正弦、余弦函数的周期性,对于任意角 α ,都可以在 $0 \sim 2\pi$ 中找到一个角与其函数值相等.

举一反三

1. 求 $\sin(-\frac{19}{3}\pi)$ 的值.

题型二 函数的周期

【例2】 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数 $f(x)$,它的一个周期是 3,且 $f(1)=8$,求 $f(-8)$ 的值.

分析 由周期函数的定义求解.

解 $\because$ 周期函数 $f(x)$ 的一个周期是 3,

$$\therefore f(x+3)=f(x), \therefore f(x+3k)=f(x) (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\therefore f(-8)=f(-9+1)=f(-3 \times 3+1)=f(1)=8.$$

点评 由周期函数的定义知,若函数 $f(x)$ 的周期为 T ,则 $kT (k \in \mathbb{Z}, \text{且 } k \neq 0)$ 也是函数 $f(x)$ 的周期.

举一反三

2. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数,且 $f(1)=2, f(x+4)=f(x)$,求 $f(2007)$.