

• 思远教辅精品绿色通道系列丛书 •

■ 依据《课程标准》《考试大纲》编写



绿色通道

□ 丛书主编 贾鸿玉

● 学生用书

高中
考虑
复习



数 学

九A理科版

天津人民美術出版社

出版人/刘子瑞 责任编辑/邢立宏 技术编辑/高 振 营销策划/老 多 封面设计/思远文化

品牌教辅
畅销全国

2009 GREEN PASSAGE 高考总复习

全新版 更全面 更实用

丛书科目

语文 数学 英语
物理 化学 生物
历史 地理 政治

温馨提示: ①本丛书高考总复习数学分为九A文科版、九B文科版、九A理科版、九B理科版四种版本。英语分为含听力版和不含听力版。
②本丛书备有方便教师备课用的(教师用书)全解全析,方便实用。
③英语配有原声磁带,语文文言文部分均备有译文,敬请广大师生放心订购。



ISBN 978-7-5305-3632-2



9 787530 536322 >

ISBN 978-7-5305-3632-2

全套定价:546.00元



品牌教辅 畅销全国
GREEN PASSAGE

绿色通道

高 考 总 复 习

数 学

九A理科版

丛书主编/贾鸿玉
本册主编/孔庆府 杨小梅
副主编/任宗杰 袁成 回春
张梅 郭众 张秀琴
编委/袁庆国 柳西川 田灵慧
刘井刚 洪君 王友智

天津人民美術出版社

绿色通道



图书在版编目 (CIP) 数据

高考总复习·数学/孔庆府主编. —天津: 天津人民美术出版社, 2008.4

(绿色通道)

ISBN 978-7-5305-3632-2

I. 高... II. 孔... III. 数学课—高中—升学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆CIP数据核字 (2008) 第033103号

敬告读者:

《高考绿色通道》系列的成功, 引发盗版仿作的狂潮, 为了维护著作和广大消费者的合法权益, 请远离盗版, 我们坚决打击盗版, 维护知识产权。

书 名: 绿色通道·高三数学

出 版 人: 刘子瑞 责任编辑: 邢立宏 技术编辑: 高 振
封面设计: 思远文化 营销策划: 老 多 责任印制: 刘艳娜

出版发行: 天津人民美术出版社 邮编: 300050
地 址: 天津市和平区马场道150号 电话: (022) 23287429
经 销: 全国新华书店 印刷: 河北腾飞印刷有限公司

版 次: 2008年4月第1版 2008年4月第1次印刷
开 本: 860×1200 1/16 印 张: 279
印 数: 0001-30000 全套定价: 546.00元 (共九册)

(如出现印装错误, 请与承印厂家调换)

第一章 集合与简易逻辑	1	体验高考	48
第一节 集合的运算	1	学习探究	49
重、难点提炼	1	自我评价	50
温故知新	1	第七节 二次函数	51
体验高考	2	重、难点提炼	51
学习探究	2	温故知新	52
自我评价	4	体验高考	53
第二节 含绝对值不等式与一元二次不等式	5	学习探究	55
重、难点提炼	5	自我评价	57
温故知新	6	第八节 指数函数与对数函数	59
体验高考	7	重、难点提炼	59
学习探究	7	温故知新	60
自我评价	10	体验高考	60
第三节 简易逻辑与充要条件	11	学习探究	61
重、难点提炼	11	自我评价	64
温故知新	12	第九节 函数的图象	66
体验高考	12	重、难点提炼	66
学习探究	13	温故知新	66
自我评价	15	体验高考	67
第二章 函数	17	学习探究	68
第一节 函数的概念与表示	17	自我评价	71
重、难点提炼	17	第十节 函数的综合应用	73
温故知新	17	重、难点提炼	73
体验高考	18	温故知新	74
学习探究	19	体验高考	74
自我评价	21	学习探究	75
第二节 函数的解析式与定义域	23	自我评价	78
重、难点提炼	23	第三章 数列	81
温故知新	24	第一节 数列的概念	81
体验高考	24	重、难点提炼	81
学习探究	25	温故知新	81
自我评价	27	体验高考	82
第三节 函数的值域与最值	29	学习探究	83
重、难点提炼	29	自我评价	85
温故知新	29	第二节 等差数列	87
体验高考	30	重、难点提炼	87
学习探究	31	温故知新	88
自我评价	34	体验高考	89
第四节 函数的单调性	36	学习探究	90
重、难点提炼	36	自我评价	92
温故知新	36	第三节 等比数列	93
体验高考	37	重、难点提炼	93
学习探究	38	温故知新	94
自我评价	40	体验高考	94
第五节 函数的奇偶性与周期性	42	学习探究	95
重、难点提炼	42	自我评价	97
温故知新	43	第四节 数列求和	99
体验高考	43	重、难点提炼	99
学习探究	44	温故知新	100
自我评价	46	体验高考	100
第六节 反函数	47	学习探究	102
重、难点提炼	47	自我评价	104
温故知新	48	第五节 数列的综合应用	106
		重、难点提炼	106
		温故知新	106

体验高考	106	重、难点提炼	163
学习探究	108	温故知新	164
自我评价	111	体验高考	164
第四章 三角函数	113	学习探究	165
第一节 三角函数的基本概念	113	自我评价	166
重、难点提炼	113	第五节 解斜三角形	168
温故知新	114	重、难点提炼	168
体验高考	115	温故知新	169
学习探究	116	体验高考	169
自我评价	119	学习探究	170
第二节 两角和与差的三角函数	121	自我评价	173
重、难点提炼	121	第六章 不等式	175
温故知新	121	第一节 不等式的概念和性质	175
体验高考	122	重、难点提炼	175
学习探究	123	温故知新	175
自我评价	125	体验高考	176
第三节 三角函数的图象	127	学习探究	176
重、难点提炼	127	自我评价	178
温故知新	127	第二节 不等式的证明	179
体验高考	128	重、难点提炼	179
学习探究	129	温故知新	180
自我评价	131	体验高考	181
第四节 三角函数的性质	133	学习探究	182
重、难点提炼	133	自我评价	186
温故知新	134	第三节 不等式的解法	188
体验高考	134	重、难点提炼	188
学习探究	135	温故知新	188
自我评价	139	体验高考	189
第五节 三角函数的综合应用	141	学习探究	189
重、难点提炼	141	自我评价	192
温故知新	141	第四节 含有绝对值的不等式	193
体验高考	142	重、难点提炼	193
学习探究	143	温故知新	194
自我评价	147	体验高考	194
第五章 平面向量	150	学习探究	195
第一节 向量及向量的基本运算	150	自我评价	197
重、难点提炼	150	第五节 不等式的综合应用	199
温故知新	151	重、难点提炼	199
体验高考	151	温故知新	199
学习探究	151	体验高考	199
自我评价	153	学习探究	202
第二节 平面向量的坐标运算	154	自我评价	203
重、难点提炼	154	第七章 直线和圆的方程	206
温故知新	155	第一节 直线的方程	206
体验高考	155	重、难点提炼	206
学习探究	156	温故知新	206
自我评价	157	体验高考	207
第三节 平面向量的数量积	158	学习探究	207
重、难点提炼	158	自我评价	209
温故知新	158	第二节 两条直线的位置关系	210
体验高考	159	重、难点提炼	210
学习探究	160	温故知新	210
自我评价	162	体验高考	211
第四节 线段的定比分点与平移	163	学习探究	211

自我评价	213
第三节 简单线性规划	214
重、难点提炼	214
温故知新	214
体验高考	214
学习探究	215
自我评价	217
第四节 曲线与方程	218
重、难点提炼	218
温故知新	218
体验高考	219
学习探究	221
自我评价	222
第五节 圆	224
重、难点提炼	224
温故知新	225
体验高考	225
学习探究	226
自我评价	229
第八章 圆锥曲线	231
第一节 椭圆	231
重、难点提炼	231
温故知新	232
体验高考	232
学习探究	234
自我评价	237
第二节 双曲线	238
重、难点提炼	238
温故知新	239
体验高考	240
学习探究	242
自我评价	245
第三节 抛物线	246
重、难点提炼	246
温故知新	247
体验高考	247
学习探究	249
自我评价	251
第四节 直线与圆锥曲线的位置关系	253
重、难点提炼	253
温故知新	253
体验高考	254
学习探究	256
自我评价	258
第五节 轨迹问题	260
重、难点提炼	260
温故知新	260
体验高考	261
学习探究	262
自我评价	264
第六节 圆锥曲线的综合问题	266
重、难点提炼	266
温故知新	266
体验高考	267
学习探究	269

自我评价	272
第九章 直线、平面、简单几何体(A)	274
第一节 平面、空间直线	274
重、难点提炼	274
温故知新	275
体验高考	275
学习探究	276
自我评价	280
第二节 空间的直线与平面	281
重、难点提炼	281
温故知新	282
体验高考	283
学习探究	284
自我评价	287
第三节 空间的平面与平面	289
重、难点提炼	289
温故知新	290
体验高考	290
学习探究	292
自我评价	294
第四节 空间角	296
重、难点提炼	296
温故知新	297
体验高考	298
学习探究	299
自我评价	302
第五节 空间距离	304
重、难点提炼	304
温故知新	304
体验高考	305
学习探究	306
自我评价	309
第六节 棱柱	311
重、难点提炼	311
温故知新	311
体验高考	312
学习探究	312
自我评价	316
第七节 棱锥	318
重、难点提炼	318
温故知新	318
体验高考	319
学习探究	320
自我评价	322
第八节 简单多面体与球	324
重、难点提炼	324
温故知新	324
体验高考	325
学习探究	325
自我评价	326
第十章 排列、组合和二项式定理	328

第一节 分类计数原理与分步计数原理	328	重、难点提炼	364
重、难点提炼	328	温故知新	365
温故知新	328	体验高考	366
体验高考	329	学习探究	367
学习探究	329	自我评价	369
自我评价	330	第十三章 极限	371
第二节 排列与组合的基本问题	331	第一节 数学归纳法	371
重、难点提炼	331	重、难点提炼	371
温故知新	332	温故知新	371
体验高考	332	体验高考	372
学习探究	332	学习探究	373
自我评价	334	自我评价	375
第三节 排列组合的综合应用	335	第二节 数列的极限	377
重、难点提炼	335	重、难点提炼	377
温故知新	335	温故知新	377
体验高考	336	体验高考	378
学习探究	336	学习探究	378
自我评价	339	自我评价	379
第四节 二项式定理	340	第三节 函数的极限与函数的连续性	381
重、难点提炼	340	重、难点提炼	381
温故知新	340	温故知新	382
体验高考	340	体验高考	382
学习探究	341	学习探究	383
自我评价	342	自我评价	384
第十一章 概率	343	第十四章 导数	386
第一节 随机事件的概率	343	第一节 导数的概念及运算	386
重、难点提炼	343	重、难点提炼	386
温故知新	343	温故知新	387
体验高考	344	体验高考	387
学习探究	344	学习探究	388
自我评价	346	自我评价	389
第二节 互斥事件有一个发生的概率	347	第二节 导数的应用	391
重、难点提炼	347	重、难点提炼	391
温故知新	348	温故知新	391
体验高考	348	体验高考	392
学习探究	349	学习探究	394
自我评价	350	自我评价	395
第三节 相互独立事件同时发生的概率	352	第十五章 数的扩充——复数	397
重、难点提炼	352	第一节 复数的概念	397
温故知新	352	重、难点提炼	397
体验高考	353	温故知新	397
学习探究	354	体验高考	398
自我评价	355	学习探究	398
第十二章 概率与统计	357	自我评价	399
第一节 离散型随机变量的分布列、期望与方差	357	第二节 复数的运算	400
重、难点提炼	357	重、难点提炼	400
温故知新	358	温故知新	401
体验高考	358	体验高考	401
学习探究	360	学习探究	401
自我评价	362	自我评价	402
第二节 统计、正态分布、线性回归	364	参考答案	403



第一章

集合与简易逻辑

第一节

集合的运算

重、难点提炼

1. 集合的概念

(1) 集合元素的三个特性: _____、_____、_____.

(2) 元素与集合之间的关系是 _____ 或 _____ 关系. 用符号 _____ 或 _____ 表示.

(3) 集合的表示方法: _____、_____、_____.

(4) 常用数集: 自然数集 _____; 正整数集 _____; 整数集 _____; 有理数集 _____; 实数集 _____.

(5) 集合的分类: 按元素个数的多少, 分为 _____.

(6) _____ 的集合叫空集, 且 $\emptyset$ _____ A (任意).(7) 两个集合 A 与 B 的关系有 A _____ B 或 A _____ B . 其中 $A \subseteq B$ 可细分为 A _____ B 或 A _____ B ; $A \cap B = \emptyset$ (非空); $A = B \Leftrightarrow$ _____; 若集合 A 有元素 n 个, 则 A 的子集共 _____ 个, 真子集共 _____ 个, 非空真子集共 _____ 个.

2. 集合的运算

(1) $A \cap B =$ _____, $A \cup B =$ _____.(2) 性质: ① $A \cap B$ _____ A _____ $A \cup B$;② $A \cap B$ _____ B _____ $A \cup B$;③ $A \cap B$ _____ $B \cap A$;④ $A \cup B$ _____ $B \cup A$;⑤ $A \cap A =$ _____;⑥ $A \cup A =$ _____;⑦ $A \cap \emptyset =$ _____;⑧ $A \cup \emptyset =$ _____;⑨ $\complement_U(\complement_U A) =$ _____;⑩ $A \cap \complement_U A =$ _____;⑪ $A \cup \complement_U A =$ _____;⑫ $\complement_U(A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$;⑬ $\complement_U(A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$;⑭ $A \cap U =$ _____; $A \cup U =$ _____;⑮ $\complement_U U =$ _____; $\complement_U \emptyset =$ _____;⑯ $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$;⑰ $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$;(3) 记有限集合 A, B 的元素个数为 $\text{card}(A)$, $\text{card}(B)$, 则有: $\text{card}(A \cup B) =$ _____; $\text{card}[\complement_U(A \cup B)] =$ _____.

[答案] 1. (1) 确定性 互异性 无序性

(2) 属于 不属于 $\in \notin$

(3) 列举法 描述法 图示法 区间法

(4) $\mathbb{N}$ $\mathbb{N}^*$ (或 $\mathbb{N}_+$) $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$

(5) 有限集 无限集 空集

(6) 不含任何元素 $=$ (7) $\subseteq \subsetneq \supsetneq = \subseteq \supsetneq A \subseteq B, \text{ 且 } B \subseteq A$ 2^n $2^n - 1$ $2^n - 2$ 2. (1) $\{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ $\{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ (2) ① $\subseteq$ ② $\subseteq$ ③ $=$ ④ $=$ ⑤ A ⑥ A ⑦ $\emptyset$ ⑧ A ⑨ A ⑩ $\emptyset$ ⑪ U ⑫ U ⑬ $\cap$ ⑭ $A \cup$ ⑮ $\emptyset \cup$ ⑯ $A \subseteq B$ ⑰ $A = B$ (3) $\text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$ $\text{card}(U) - \text{card}(A) - \text{card}(B) + \text{card}(A \cap B)$

温故知新

1. (2006 · 高考重庆卷) 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 5, 7\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, 则 $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) =$ A. $\{1, 6\}$ B. $\{4, 5\}$ C. $\{2, 3, 4, 5, 7\}$ D. $\{1, 2, 3, 6, 7\}$ 2. (2006 · 高考江西卷) 已知集合 $M = \{x | \frac{x}{(x-1)^2} \geq 0\}$,

$N = \{y | y = 3x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $M \cap N$ 等于

- ()
A. $\emptyset$ B. $\{x | x \geq 1\}$
C. $\{x | x > 1\}$ D. $\{x | x \geq 1 \text{ 或 } x < 0\}$

3. (2006 · 高考辽宁卷) 设集合 $A = \{1, 2\}$, 则满足 $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ 的集合 B 的个数

- ()
A. 1 B. 3
C. 4 D. 8

4. (2006 · 高考山东卷) 定义集合运算: $A \odot B = \{x | x = xy(x+y), x \in A, y \in B\}$. 设集合 $A = \{0, 1\}, B = \{2, 3\}$, 则集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为

- ()
A. 0 B. 6
C. 12 D. 18

5. 设 A, B, I 均为非空集合, 且满足 $A \subseteq B \subseteq I$, 则下列各式中错误的是

- ()
A. $(\complement_I A) \cup B = I$
B. $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = I$
C. $A \cap (\complement_I B) = \emptyset$
D. $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \complement_I B$

体验高考

1. (2007 · 全国 I · 5) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 集合 $\{1, a+b, a\} = \{0, \frac{b}{a}, b\}$, 则 $b-a$ 等于

- ()
A. 1 B. -1
C. 2 D. -2

[答案] C

[解析] $\because a \neq 0, \therefore a+b=0, \therefore \frac{b}{a} = -1, \therefore b = -a$,
 $a = -1, \therefore b - a = 2$, 故选 C.

2. (2007 · 广东 · 1) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 的定义域为 M , $g(x) = \ln(1+x)$ 的定义域为 N , 则 $M \cap N$ 等于

- ()
A. $\{x | x > -1\}$ B. $\{x | -1 < x < 1\}$
C. $\{x | x < 1\}$ D. $\emptyset$

[答案] B

[解析] $M = \{x | x < 1\}, N = \{x | x > -1\}$,
 $\therefore M \cap N = \{x | -1 < x < 1\}$, 故选 B.

3. (2007 · 福建 · 3) 已知集合 $A = \{x | x < a\}, B = \{x | 1 < x < 2\}$, 且 $A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) = \mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是

- ()
A. $a \leq 1$ B. $a < 1$
C. $a \geq 2$ D. $a > 2$

[答案] C

[解析] $\complement_{\mathbf{R}} B = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$,

又 $A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) = \mathbf{R}$, 数轴上画图可得 $a \geq 2$, 故选 C.

4. (2007 · 湖南 · 10) 设集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $S_1, S_2, \dots, S_k$ 都是 M 的含两个元素的子集, 且满足: 对任意的

$S_i = \{a_i, b_i\}, S_j = \{a_j, b_j\} (i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3, \dots, k\})$ 都有 $\min\{\frac{a_i}{b_i}, \frac{b_i}{a_i}\} \neq \min\{\frac{a_j}{b_j}, \frac{b_j}{a_j}\}$ ($\min\{x, y\}$ 表示两个数 x, y 中的较小者). 则 k 的最大值是

- ()
A. 10 B. 11
C. 12 D. 13

[答案] B

[解析] M 的含两个元素的子集的个数有 $C_6^2 = 15$

个, 但 $\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{2, 4\}$ 不满足 $\min\{\frac{a_i}{b_i}, \frac{b_i}{a_i}\} \neq \min\{\frac{a_j}{b_j}, \frac{b_j}{a_j}\}$,

$\{1, 3\}, \{2, 6\}$ 和 $\{2, 3\}, \{4, 6\}$ 亦不满足条件 $\min\{\frac{a_i}{b_i}, \frac{b_i}{a_i}\} \neq \min\{\frac{a_j}{b_j}, \frac{b_j}{a_j}\}$,

故应去掉四个, 故 k 的最大值为 11, 故

选 B.

5. (2007 · 北京 · 12) 已知集合 $A = \{x | |x-a| \leq 1\}, B = \{x | x^2 - 5x + 4 \geq 0\}$. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是

[答案] $(2, 3)$

[解析] $x^2 - 5x + 4 \geq 0, \therefore x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 4$.

即 $B = (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$

又 $A = [a-1, a+1], A \cap B = \emptyset$.

$\therefore \begin{cases} a+1 < 4 \\ a-1 > 1 \end{cases}$ 解得 $2 < a < 3$, 故填 $(2, 3)$.

学习探究

! 题型一 元素与集合之间的关系

(例) 已知 $A = \{x | x = m + n \cdot \sqrt{2}, m, n \in \mathbf{Z}\}$.

(1) 设 $x_1 = \frac{1}{3-4\sqrt{2}}, x_2 = \sqrt{9-4\sqrt{2}}, x_3 = (1-3$

$\sqrt{2})^2$, 试判断 x_1, x_2, x_3 与 A 之间的关系;

(2) 任取 $x_1, x_2 \in A$, 试判断 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 与 A 之间的关系.

[分析] 此题主要考查元素集合间的关系等基础知识, 考查分析问题, 解决问题的能力.

[解] 解决的关键在于: 若 $x \in A$, 则 x 满足 $x = m + n \cdot \sqrt{2}, m, n \in \mathbf{Z}$, 反之, x 满足 $x = m + n \cdot \sqrt{2}, m, n \in \mathbf{Z}$, 则 $x \in A$.

(1) 由于 $x_1 = \frac{1}{3-4\sqrt{2}} = -\frac{3}{23} - \frac{4}{23}\sqrt{2}$, 则 $x_1 \notin A$.

由于 $x_2 = \sqrt{9-4\sqrt{2}} = \sqrt{(1-2\sqrt{2})^2} = -1 + 2\sqrt{2}$.



则 $x_2 \in A$.

由于 $x_3 = (1 - 3\sqrt{2})^2 = 19 - 6\sqrt{2}$, 则 $x_3 \in A$.

(2) 由 $x_1, x_2 \in A$, 设 $x_1 = m_1 + n_1 \cdot \sqrt{2}$.

$x_2 = m_2 + n_2 \cdot \sqrt{2}$ ($m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$).

则 $x_1 + x_2 = (m_1 + m_2) + (n_1 + n_2) \cdot \sqrt{2}$,

(其中 $m_1 + m_2, n_1 + n_2 \in \mathbb{Z}$), 则 $x_1 + x_2 \in A$.

由于 $x_1 x_2 = (m_1 + n_1 \sqrt{2})(m_2 + n_2 \sqrt{2})$

$= (m_1 m_2 + 2n_1 n_2) + (m_1 n_2 + m_2 n_1) \cdot \sqrt{2}$

(其中 $m_1 m_2 + 2n_1 n_2, m_1 n_2 + m_2 n_1 \in \mathbb{Z}$), 则 $x_1 x_2 \in A$.

【评析】 对于 A 中的元素应具备两点: 一是满足形式 $m + n\sqrt{2}$; 二是 $m, n \in \mathbb{Z}$. 易理解偏差而致误.

变式训练

1. (2006·黄冈) 若 x 为实数, 向量 $a = (x, 0)$, $b = (0, x)$, 则由下列各数 $x, -x, |x|, \sqrt[3]{x^3}, -(\sqrt[5]{x})^5, \sqrt{x^2}, |a|, |b|, (\sqrt{|a|})^2$ 所组成的集合的元素最多有

A. 1 个

B. 2 个

C. 4 个

D. 8 个



题型二 集合与集合之间的关系

【例】 (2005·成都市二模) 设集合 $P = \{x | x = \frac{k}{3} + \frac{1}{6}, k \in \mathbb{Z}\}$, $Q = \{x | x = \frac{k}{6} + \frac{1}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 ()

A. $P = Q$

B. $P \subsetneq Q$

C. $P \supsetneq Q$

D. $P \cap Q = \emptyset$

【答案】 B

【解析】 $P: x = \frac{k}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2k+1}{6}, k \in \mathbb{Z}; Q: x = \frac{k}{6} + \frac{1}{3} = \frac{k+2}{6}, k \in \mathbb{Z}$, 从而 P 表示 $\frac{1}{6}$ 的奇数倍数组成的集合, 而 Q 表示 $\frac{1}{6}$ 的所有整数倍数组成的集合, 故 $P \subsetneq Q$. 选 B.

变式训练

2. 设集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$,

$N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 ()

A. $M = N$

B. $M \subsetneq N$

C. $M \supsetneq N$

D. $M \cap N = \emptyset$



题型三 集合运算

【例】 (2006·北京市西城区) 已知 $A = \{x | x^2 \geq 9\}$,

$B = \{x | \frac{x-7}{x+1} \leq 0\}$, $C = \{x | |x-2| < 4\}$.

(1) 求 $A \cap B$ 及 $A \cup C$;

(2) 若 $U = \mathbb{R}$, 求 $A \cap \complement_U(B \cap C)$.

【解】 由 $x^2 \geq 9$, 得 $x \geq 3$, 或 $x \leq -3$,

$\therefore A = \{x | x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -3\}$.

又由不等式 $\frac{x-7}{x+1} \leq 0$, 得 $-1 < x \leq 7$,

$\therefore B = \{x | -1 < x \leq 7\}$.

又由 $|x-2| < 4$, 得 $-2 < x < 6$,

$\therefore C = \{x | -2 < x < 6\}$.

(1) $A \cap B = \{x | 3 \leq x \leq 7\}$, 如下图(a)所示;

$A \cup C = \{x | x \leq -3 \text{ 或 } x > -2\}$, 如下图(b)所示.



(2) $\because U = \mathbb{R}, B \cap C = \{x | -1 < x < 6\}$,

$\therefore \complement_U(B \cap C) = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 6\}$,

$\therefore A \cap \complement_U(B \cap C) = \{x | x \leq -3 \text{ 或 } x \geq 6\}$.

【评析】 数轴是解决数集问题的有效工具, 它体现了数形结合的思想方法, 简捷、直观. 但在运用时, 要特别关注边界值的取舍.

变式训练

3. 已知全集 $I = \mathbb{R}$ 集合 $M = \{x | |x| < 2, x \in \mathbb{R}\}$, $P = \{x | x > a\}$, 并且 $M \subseteq \complement_I P$, 那么 a 的取值集合是

A. $\{2\}$

B. $\{a | a \leq 2\}$

C. $\{a | a \geq 2\}$

D. $\{a | a < 2\}$



题型四 集合的运算与函数的关系

【例】 (2005·浙江·理·9) 设 $f(n) = 2n+1$ ($n \in \mathbb{N}$), $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Q = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, 记 $\hat{P} = \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in P\}$, $\hat{Q} = \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in Q\}$, 则 $(\hat{P} \cap \complement_{\mathbb{N}} \hat{Q}) \cup (\hat{Q} \cap \complement_{\mathbb{N}} \hat{P})$ 等于 ()

A. $\{0, 3\}$

B. $\{1, 2\}$

C. $\{3, 4, 5\}$

D. $\{1, 2, 6, 7\}$

【答案】 A

【解析】 $\hat{P} = \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in P\} = \{0, 1, 2\}$, $\hat{Q} = \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in Q\} = \{1, 2, 3\}$, 则

$\hat{P} \cap \complement_{\mathbb{N}} \hat{Q} = \{0\}$, $\hat{Q} \cap \complement_{\mathbb{N}} \hat{P} = \{3\}$, 因而 $(\hat{P} \cap \complement_{\mathbb{N}} \hat{Q}) \cup (\hat{Q} \cap \complement_{\mathbb{N}} \hat{P}) = \{0, 3\}$.

变式训练

4. 设 M 是满足下列两个条件的函数 $f(x)$ 的集合:



(1) $f(x)$ 的定义域是 $[-1, 1]$;

(2) 若 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$,

则 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 4|x_1 - x_2|$.

试问:定义在 $[-1, 1]$ 上的函数 $g(x) = x^2 + 2x - 1$ 是否属于集合 M , 并说明理由.

A. -2

B. 2

C. 1

D. 0

二、填空题

6. (2006 · 中山市高三统测) 已知集合 $A = \{0, 2, 3\}$, $B = \{x | x = ab, a, b \in A, \text{且 } a \neq b\}$, 则 B 的子集的个数是

7. (2006 · 济南市) 已知 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, $B = \{x | |x| < a\}$, 若 $\emptyset \subsetneq B \subsetneq A$, 则实数 a 的取值范围是

三、解答题

8. (2007 · 北京 · 20) 已知集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} (k \geq 2)$, 其中 $a_i \in \mathbb{Z} (i = 1, 2, \dots, k)$. 由 A 中的元素构成两个相应的集合:

$S = \{(a, b) | a \in A, b \in A, a + b \in A\}$, $T = \{(a, b) | a \in A, b \in A, a - b \in A\}$, 其中 (a, b) 是有序数对, 集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n .

若对于任意的 $a \in A$, 总有 $-a \notin A$, 则称集合 A 具有性质 P :

(I) 检验集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 与 $\{-1, 2, 3\}$ 是否具有性质 P , 并对其中具有性质 P 的集合写出相应的集合 S 和 T .

(II) 对任何具有性质 P 的集合 A , 证明: $n \leq \frac{k(k-1)}{2}$.

(III) 判断 m 和 n 的大小关系, 并证明你的结论.

自我评价

A级题: 能力提升

一、选择题

1. (2007 · 辽宁 · 1) 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$ 等于 ()

A. $\{1\}$

B. $\{5\}$

C. $\{2, 4\}$

D. $\{1, 2, 4, 5\}$

2. (2007 · 江苏 · 2) 已知全集 $U = \mathbb{Z}$, $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | x^2 = x\}$, 则 $A \cap \complement_U B$ 为 ()

A. $\{-1, 2\}$

B. $\{-1, 0\}$

C. $\{0, 1\}$

D. $\{1, 2\}$

3. (2007 · 陕西 · 12) 设集合 $S = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, 在 S 上定义运算 $\oplus$ 为: $A_i \oplus A_j = A_k$, 其中 k 为 $i + j$ 被 4 除的余数, $i, j = 0, 1, 2, 3$. 则满足关系式 $(x \oplus x) \oplus A_2 = A_0$ 的 $x (x \in S)$ 的个数为 ()

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

4. (2006 · 重庆市联合检测) 若集合 $M = \{y | y = 2^x, x \in \mathbb{R}\}$, $P = \{y | y = \sqrt{x-1}, x \geq 1\}$, 则 $M \cap P =$ ()

A. $\{y | y > 1\}$

B. $\{y | y \geq 1\}$

C. $\{y | y > 0\}$

D. $\{y | y \geq 0\}$

5. (2008 · 安徽皖南八校联考) 设全集 $U = \mathbb{R}$, $A = \{x | \frac{x-a}{x+b} \geq 0\}$, $\complement_U A = (-1, -a]$, 则 $a + b =$ ()

B级题: 最新模拟

1. (2007 · 北京西城 4 月) 若集合 A_1, A_2 满足 $A_1 \cup A_2 = A$, 则记 $[A_1, A_2]$ 是 A 的一组双子集拆分. 规定: $[A_1, A_2]$ 和 $[A_2, A_1]$ 是 A 的同一组双子集拆分. 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 那么 A 的不同双子集拆分共有 ()

A. 15 组

B. 14 组

C. 13 组

D. 12 组

2. (2007 · 商丘二模) 设集合 $U = \mathbb{R}$, 集合 $P = \{x | x^2 \geq x\}$, $Q = \{x | x > 0\}$, 则下列关系中正确的是 ()

A. $P \cap Q \subset Q$

B. $P \cup Q \subset Q$

C. $P \cup Q \neq \mathbb{R}$

D. $\complement_U Q \cap P = \emptyset$



3. (2007·南昌一测) 设 $\ast$ 是集合 A 中元素的一种运算, 如果对于任意的 $x, y \in A$ 都有 $x \ast y \in A$, 则称运算 $\ast$ 对集合 A 是封闭的, 若 $M = \{x | x = a + \sqrt{2}b, a, b \in \mathbb{Z}\}$, 则对集合 M 不封闭的运算是 ()

A. 加法
B. 减法
C. 乘法
D. 除法

4. (2007·江西九校联考) 已知集合 $M = \{y | y = 10^{-|x|}\}$, 集合 $N = \{x | y = \sqrt{|\log_3 x| - 1}\}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()

A. $\{x | x \geq 3\}$
B. $\{x | x \leq \frac{1}{3}\}$
C. $\{x | 0 < x \leq 1\}$
D. $\{x | 0 < x \leq \frac{1}{3}\}$

5. (2007·安徽皖南八校) 已知 $M = \{y \in \mathbb{R} | y = x^2\}$, $N = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 = 2\}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()

A. $\{(-1, 1), (1, 1)\}$
B. $\{1\}$
C. $[0, 1]$
D. $[0, \sqrt{2}]$

6. (2008·湖北省八校联考) 设 $A = \{(x, y) | y \leq -|x - 3|\}$, $B = \{(x, y) | y \geq 2|x| + b, b \text{ 为常数}\}$, $A \cap B \neq \emptyset$.

(1) b 的取值范围是 _____;

(2) 设 $P(x, y) \in A \cap B$, 点 T 的坐标为 $(1, \sqrt{3})$, 若 $\overrightarrow{OP}$ 在

$\overrightarrow{OT}$ 方向上投影的最小值为 $-5\sqrt{3}$, 则 b 的值为 _____.

7. (2007·安徽皖南八校) 已知函数 $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ 的定义域是集合 A , 函数 $g(x) = \lg[x^2 - (2a+1)x + a^2 + a]$ 的定义域是集合 B .

(1) 求集合 A, B ;

(2) 若 $A \cup B = B$, 求实数 a 的取值范围.

第二节

含绝对值不等式与一元二次不等式

一、难点提炼

1. 绝对值不等式的解法

(1) 公式法

① 当 $a > 0$ 时, $|x| > a \Leftrightarrow x^2 > a^2 \Leftrightarrow$ _____;
 $|x| < a \Leftrightarrow x^2 < a^2 \Leftrightarrow$ _____.

② 当 $a = 0$ 时, 不等式 $|x| > a$ 的解集为 _____,
 $|x| < a$ 的解集为 _____.

③ 当 $a < 0$ 时, 不等式 $|x| > a$ 的解集为 _____,
 $|x| < a$ 的解集为 _____.

④ $c > 0$ 时, $|ax + b| > c \Leftrightarrow$ _____, $|ax + b| < c \Leftrightarrow$ _____.

(2) 零点分段法

对于含有多个绝对值的不等式, 如 $|ax + b| + |cx + d| > e (< e)$, 可令 _____ = 0, _____ = 0, 解得 $x_1 = -\frac{b}{a}, x_2 = -\frac{d}{c}$, 从而分成几段将绝对值符号

4. 一元二次不等式与二次函数、一元二次方程

去掉, 这是最基本也是最常用的方法.

(3) 利用绝对值的几何意义

① $|x|$ 是数轴上的点 x 到原点 O 的距离, 故 $|x| < a$ 是数轴上所有到原点 O 的距离小于 a 的点 x 组成.

② $|x - a| \pm |x - b|$ 是数轴上的点 x 到点 a, b 的距离之和(差).

2. 一次不等式与一次不等式组

$ax + b > 0 (a \neq 0)$ 与 $ax + b < 0 (a \neq 0)$ 的解要分 _____ 讨论, 由多个一次不等式组成的不等式组的解集要注意在数轴上标出各个解集, 取其 _____.

3. 分式不等式的解法

(1) 解分式不等式时, 先移项使等号右边为零.

(2) $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$ 转化为 $(ax+b)(cx+d) > 0$, 也可转化为 ① $\begin{cases} ax+b > 0 \\ cx+d > 0 \end{cases}$ 或 ② $\begin{cases} ax+b < 0 \\ cx+d < 0 \end{cases}$, 这时原不等式的解集为不等式组 ① 及不等式组 ② 解集的 _____.



图象与解				
二次函数	$y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)			
Δ 的情况	$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
一元二次方程	$ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$)	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_1 = x_2 = x_0 = -\frac{b}{2a}$	方程无解
一元二次不等式	$ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$)	不等式解集为 _____	不等式解集为 _____	不等式解集为 _____
	$ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$)	不等式解集为 _____	不等式解集为 _____	不等式解集为 _____

5. 一元二次方程的实根分布问题:

研究一元二次方程在指定区间上的实根问题有以下三种常见解法:

(1) 求根 $\rightarrow$ 列出不等式组 $\rightarrow$ 解不等式组, 此方法用于能用十字相乘法求解的方程;

(2) 利用韦达定理及符号法则列出等价的不等式组, 此法用于两根在区间 $(a, +\infty)$ 上或区间 $(-\infty, a)$ 上的情况;

(3) 用判别式、对称轴与区间端点的关系、区间端点的函数值符号列出不等式组, 如下表: ($a > 0$)

根的分布	$x_1 < x_2 < m$	$m < x_1 < x_2$	$x_1 < m < x_2$	$x_1, x_2 \in (m, n)$	x_1, x_2 有且仅有一个在 (m, n) 内
充要条件	_____	_____	_____	_____	_____
图象					

[答案] 1. (1) ① $x > a$ 或 $x < -a$ ② $-a < x < a$

③ $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 0\} \quad \emptyset$

④ $\mathbf{R} \quad \emptyset$

⑤ $ax + b > c$ 或 $ax + b < -c \quad -c < ax + b < c$

(2) $ax + b \leq cx + d$

2. $a > 0$ 与 $a < 0$ 交集

3. 并集

4. $> = < \{x \mid x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\} \quad \{x \mid x \neq x_0, x \in \mathbf{R}\} \quad \mathbf{R} \quad \{x \mid x_1 < x < x_2\} \quad \emptyset \quad \emptyset$

5. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(m) > 0 \\ -\frac{b}{2a} < m \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(m) > 0 \\ -\frac{b}{2a} > m \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(m) < 0 \end{cases}$

① $f(m) \cdot f(n) < 0$

$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ f(m) > 0 \\ f(n) > 0 \end{cases} \quad \text{或 } \begin{cases} f(m) = 0 \\ m < -\frac{b}{2a} < \frac{m+n}{2} \end{cases}$
 $\begin{cases} m < -\frac{b}{2a} < n \end{cases} \quad \text{或 } \begin{cases} f(n) = 0 \\ \frac{m+n}{2} < -\frac{b}{2a} < n \end{cases}$

温故知新

1. (2006 · 高考四川卷) 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$, 集合 $B = \{x \mid |2x - 1| > 3\}$, 则集合 $A \cap B =$

A. $\{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$

B. $\{x \mid 2 \leq x < 3\}$



- C. $\{x \mid 2 < x \leq 3\}$ D. $\{x \mid -1 < x < 3\}$
2. (2006 · 高考江西卷) 若不等式 $x^2 + ax + 1 \geq 0$ 对一切 $x \in (0, \frac{1}{2}]$ 成立, 则 a 的最小值为 ()
- A. 0 B. -2
C. $-\frac{5}{2}$ D. -3
3. (2006 · 高考上海卷) 若关于 x 的不等式 $(1+k^2)x \leq k^4 + 4$ 的解集是 M , 则对任意实常数 k , 总有 ()
- A. $2 \in M, 0 \in M$ B. $2 \notin M, 0 \notin M$
C. $2 \in M, 0 \notin M$ D. $2 \notin M, 0 \in M$
4. (1) 不等式 $2 < |2x-5| \leq 7$ 的解集是 _____.
(2) 不等式 $x^2 - 2|x| - 15 \geq 0$ 的解集是 _____.
5. (2005 · 高考全国卷文) 已知二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为 a , 且不等式 $f(x) > -2x$ 的解集为 $(1, 3)$.
- (1) 若方程 $f(x) + 6a = 0$ 有两个相等的根, 求 $f(x)$ 的解析式;
(2) 若 $f(x)$ 的最大值为正数, 求 a 的取值范围.

3. (2007 · 湖南卷) 不等式 $\frac{x-2}{x+1} \leq 0$ 的解集是 ()

- A. $(-\infty, -1] \cup (-1, 2]$
B. $[-1, 2]$
C. $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$
D. $(-1, 2]$

【答案】 D

【解析】 $\frac{x-2}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) \leq 0$ 且 $x+1 \neq 0$, 解得: $-1 < x \leq 2$, 故选 D.

4. (2007 · 安徽文) 解不等式 $(|3x-1|-1)(\sin x - 2) > 0$.

【解】 因为对任意 $x \in \mathbf{R}$, $\sin x - 2 < 0$, 所以原不等式等价于 $|3x-1|-1 < 0$.

即 $|3x-1| < 1, -1 < 3x-1 < 1, 0 < 3x < 2$, 故解为 $0 < x < \frac{2}{3}$.

所以原不等式的解集为 $\{x \mid 0 < x < \frac{2}{3}\}$.

5. (2007 · 北京文) 记关于 x 的不等式 $\frac{x-a}{x+1} < 0$ 的解集为

P , 不等式 $|x-1| \leq 1$ 的解集为 Q .

(I) 若 $a = 3$, 求 P ;

(II) 若 $Q \subseteq P$, 求正数 a 的取值范围.

【解】 (I) 由 $\frac{x-3}{x+1} < 0$, 得 $P = \{x \mid -1 < x < 3\}$.

(II) $Q = \{x \mid |x-1| \leq 1\} = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$.

由 $a > 0$, 得 $P = \{x \mid -1 < x < a\}$, 又 $Q \subseteq P$, 所以 $a > 2$, 即 a 的取值范围是 $(2, +\infty)$.

体验高考

1. (2007 · 湖南文) 不等式 $x^2 > x$ 的解集是 ()
- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, 1)$
C. $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

【答案】 D

【解析】 $x^2 - x > 0 \Rightarrow x(x-1) > 0$,
 $\therefore x^2 > x$ 的解集为 $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

2. (2007 · 全国 II) 不等式 $\frac{x-1}{x^2-4} > 0$ 的解集是 ()
- A. $(-2, 1)$ B. $(2, +\infty)$
C. $(-2, 1) \cup (2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

【答案】 C

【解法一】 将数“0”“2”“3”代入四个选项, 易得选项 C 正确, 故选 C.

【解法二】 $\frac{x-1}{x^2-4} > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+2) > 0$

$\therefore$ 原不等式解集为 $\{x \mid -2 < x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$, 故选 C.

学习探究

! 题型一 绝对值不等式的解法

【例】 解下列绝对值不等式

(1) $1 < |x-2| \leq 3$

(2) $|x| < |x+1|$

(3) $|x+2| > |x-1| - 3$

(1)【分析】 含有绝对值的连不等式, 实质上是一个不等式组, 故可以转化成不等式组解之; 含有绝对值的连不等式, 仍然属于含有绝对值的不等式范畴, 故可以根据绝对值的概念去绝对值解之; 由于连不等式的两端是确定的正数 1, 3, 故可转化成一元二次不等式组解之.

【解法一】 原不等式就是不等式组

$$\begin{cases} |x-2| > 1 \\ |x-2| \leq 3 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x < 1 \text{ 或 } x > 3 \\ -1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

得, $-1 \leq x < 1$ 或 $3 < x \leq 5$

所以原不等式的解集为 $\{x \mid -1 \leq x < 1 \text{ 或 } 3 < x \leq 5\}$





5}.

【解法二】 原不等式的解集就是下面两个不等式组解集的并集:

$$(I) \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 1 < x-2 \leq 3 \end{cases} \text{ 或 } (II) \begin{cases} x-2 < 0 \\ 1 < -(x-2) \leq 3 \end{cases}$$

由(I)得 $3 < x \leq 5$ 或由(II)得 $-1 \leq x < 1$

所以原不等式的解集是 $\{x | -1 \leq x < 1 \text{ 或 } 3 < x \leq 5\}$.

5}.

【解法三】 原不等式的解集就是 $1 < (x-2)^2 \leq 9$ 的解集.

$$\text{即 } \begin{cases} (x-2)^2 \leq 9 \\ (x-2)^2 > 1 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -1 \leq x \leq 5 \\ x < 1 \text{ 或 } x > 3 \end{cases}$$

$$\therefore -1 \leq x < 1 \text{ 或 } 3 < x \leq 5$$

所以原不等式的解集是 $\{x | -1 \leq x < 1 \text{ 或 } 3 < x \leq 5\}$.

5}.

【解法四】 原不等式等价于

$$1 < x-2 \leq 3 \text{ 或 } -3 \leq x-2 < -1$$

$$\text{解得 } 3 < x \leq 5 \text{ 或 } -1 \leq x < 1$$

所以原不等式的解集是 $\{x | -1 \leq x < 1 \text{ 或 } 3 < x \leq 5\}$.

5}.

(2)【分析】 在不等式中,若含有两个及其以上绝对值符号的代数式,则一般采用的“零点分段法”是解决这类绝对值不等式的基本思想方法.

$$\text{【解】 } |x| < |x+1|$$

$$\therefore x^2 < (x+1)^2$$

$$\therefore 2x+1 > 0$$

$$\therefore x > -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{不等式的解集是 } \{x | x > -\frac{1}{2}\}.$$

(3)【解】 分别令 $x+2=0, x-1=0$, 得原不等式的零点为 $-2, 1$.

$\therefore$ 原不等式等价于

$$\textcircled{1} \begin{cases} x < -2 \\ -(x+2) > -(x-1) - 3 \end{cases}$$

$$\text{或 } \textcircled{2} \begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ x+2 > -(x-1) - 3 \end{cases}$$

$$\text{或 } \textcircled{3} \begin{cases} x \geq 1 \\ x+2 > x-1-3 \end{cases}$$

解不等式组①得: $x \in \emptyset$; ④

解不等式组②得: $-2 < x < 1$; ⑤

解不等式组③得: $x \geq 1$. ⑥

故原不等式的解集是④、⑤、⑥的并集,即 $\{x | x > -2\}$.

【评析】 在不等式(2)中,由于两边均为非负,因此也可以采用两边平方法去掉绝对值符号,即:原不等式等价于 $x^2 < (x+1)^2$, 整理得 $2x+1 > 0, \therefore x > -\frac{1}{2}$. 故原

不等式的解集为 $\{x | x > -\frac{1}{2}\}$.

变式训练

1. 解不等式 $|x-1| \cdot |2x+1| > 1$.

【例】 不等式 $|x-a| < b$ 的解集为 $\{x | -3 < x < 9\}$, 则 a, b 的值分别为

A. $a=3, b=6$

B. $a=-3, b=9$

C. $a=6, b=3$

D. $a=-3, b=6$

【答案】 A

【命题意图】 本题考查含参变量的绝对值不等式的解法.

【分析一】 应先去绝对值解不等式再求 a, b .

【解法一】 $\because |x-a| < b$ 的解集为 $\{x | a-b < x < a+b\}$,

$$\therefore \begin{cases} a-b=-3, \\ a+b=9 \end{cases} \therefore a=3, b=6.$$

【分析二】 利用方程的思想,求 a, b 值.

【解法二】 不等式 $|x-a| < b$ 的解集为 $\{x | -3 < x < 9\}$. 等价于方程 $|x-a|=b$ 有两个实根, $x_1=-3, x_2=9$.

$$\therefore \begin{cases} |-3-a|=b, \\ |9-a|=b, \end{cases} \therefore a=3, b=6.$$

【分析三】 两边平方去绝对值转化为一元二次不等式.

【解法三】 两边平方得:

$$x^2 - 2ax + a^2 - b^2 < 0 (b > 0)$$

因此 $-3, 9$ 为方程 $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ 的两根

$$\therefore \begin{cases} 2a = -3+9 \\ a^2 - b^2 = -3 \times 9 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a=3 \\ b=6 \end{cases} \therefore \text{选 A.}$$

变式训练

2. 已知不等式 $|ax+b| < 2 (a \neq 0, b > 0)$ 的解集为 $\{x | 1 < x < 5\}$, 则 $a+b =$ _____.

! 题型二 一元二次不等式的解法

【例】 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集

是 $\{x | x < -2, \text{或 } x > -\frac{1}{2}\}$, 求 $ax^2 - bx + c > 0$ 的解集.

【分析】由已知不等式的解集逆向思考, 构造出已知不等式, 然后对比要求的不等式.

【解】 $\because \{x | x < -2, \text{或 } x > -\frac{1}{2}\}$

$$= \{x | (x+2)(x+\frac{1}{2}) > 0\}$$

$$= \{x | 2x^2 + 5x + 2 > 0\}$$

$$= \{x | -2x^2 - 5x - 2 < 0\}$$

由此可得 $a:b:c = (-2):(-5):(-2)$, 且 $a < 0$.

于是所求解的不等式为 $-2x^2 + 5x - 2 > 0$,

$$\text{即 } (x-2)(2x-1) < 0, \text{ 解得 } \frac{1}{2} < x < 2.$$

$\therefore$ 不等式 $ax^2 - bx + c > 0$ 的解集为

$$\{x | \frac{1}{2} < x < 2\}.$$

【评析】本题也可用以下方法来解: 由题意知 $-2, -\frac{1}{2}$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根, 且 $a < 0$, 故

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + c = 0 \end{cases}$$

解得 $a = c, b = -\frac{5}{2}c$, 所以, 不等式 $ax^2 - bx + c > 0$, 即为 $2x^2 - 5x + 2 < 0$.

变式训练

3. 已知不等式 $ax^2 + bx + 2 > 0$ 的解集为 $\{x | -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\}$, 试求实数 a, b 的值.

! 题型三 含参数不等式的解法

【例 4】(2006 · 北京西城) 解关于 x 的不等式: $ax^2 - 2 \geq 2x - ax (a \in \mathbf{R})$.

【分析】由于最高次项的系数含有字母 a , 不等式可以是二次不等式, 也可以是一次不等式, 且影响两根的大小. 所以首先要确定让我们解的是几次不等式, 其次判定根的大小. 常会有人不考虑字母 a 对不等式次数的影响, 看成了二次不等式, 解集的范围将要变小. 有人考虑不周密, 分类不全, 造成遗漏.

【解】原不等式变形为 $ax^2 + (a-2)x - 2 \geq 0$,

① $a = 0$ 时, $x \leq -1$;

② $a \neq 0$ 时, 不等式即为 $(ax-2)(x+1) \geq 0$.

当 $a > 0$ 时, $x \geq \frac{2}{a}$ 或 $x \leq -1$,

$$\text{由于 } \frac{2}{a} - (-1) = \frac{a+2}{a}.$$

于是, 当 $-2 < a < 0$ 时, $\frac{2}{a} \leq x \leq -1$.

当 $a = -2$ 时, $x = -1$, 当 $a < -2$ 时, $-1 \leq x \leq \frac{2}{a}$.

综上所述, $a = 0$ 时, $\{x | x \leq -1\}$;

$a > 0$ 时, $\{x | x \geq \frac{2}{a} \text{ 或 } x \leq -1\}$;

$-2 < a < 0$ 时, $\{x | \frac{2}{a} \leq x \leq -1\}$;

$a = -2$ 时, $\{x | x = -1\}$;

$a < -2$ 时, $\{x | -1 \leq x \leq \frac{2}{a}\}$.

变式训练

4. 解关于 x 的不等式 $(x-2)(ax-2) > 0$.

! 题型四 不等式解法在集合、函数、几何等中的应用 (重点是二次不等式的应用)

【例 5】已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$, $B = \{x | x^2 - 2ax + a \leq 0, a \in \mathbf{R}\}$, 且 $B \subseteq A$, 求 a 的取值范围.

【解】易知 $A = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$, 设 $f(x) = x^2 - 2ax + a$.

(1) 当 $\Delta = (-2a)^2 - 4a < 0$, 即 $0 < a < 1$ 时, $B = \emptyset$, 满足 $B \subseteq A$.

(2) 当 $\Delta \geq 0$ 时, 要使 $B \subseteq A$, 由“三个二次”之间的关系知, $f(x)$ 的图象满足如右图所示,

$$\begin{cases} 1 \leq a \leq 2, \\ \Delta = 4a^2 - 4a \geq 0, \\ f(1) \geq 0, \\ f(2) \geq 0, \end{cases}$$

解得 $a = 1$,

综上, 得 $a \in (0, 1]$.

【评析】不要忽视 $B = \emptyset$ 的情况.

