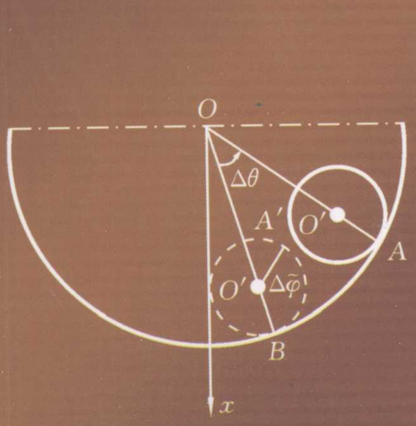
普通高等教育“十一五”规划教材

普通高等院校数学精品教材

常微分方程

肖淑贤



華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育“十一五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

常微分方程

肖淑贤

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/肖淑贤 —武汉:华中科技大学出版社,2008年10月
ISBN 978-7-5609-4686-3

Ⅰ.常… Ⅱ.肖… Ⅲ.常微分方程-高等学校-教材 Ⅳ.O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第102048号

常微分方程 肖淑贤

策划编辑:周芬娜
责任编辑:王汉江 封面设计:潘 群
责任校对:刘 竣 责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司
印 刷:湖北恒泰印务有限公司

开本:710mm×1000mm 1/16 印张:9.25 字数:173 000
版次:2008年10月第1版 印次:2008年10月第1次印刷 定价:16.80元
ISBN 978-7-5609-4686-3/O·456

内容提要

本书是常微分方程基础课教材，内容涉及分离变量法、常系数线性微分方程和方程组、变系数线性微分方程和方程组、非线性微分方程，以及定性和稳定性理论初步等.

本书理论严谨，叙述清楚且深入浅出，特别是对常系数线性微分方程这一部分的讲解有独到之处，其中待定系数法的证法非常新颖，而且相当简洁，胜过了传统教材的证法.

本书适合于综合性大学、理工科大学及师范类院校的数学专业学生使用或作为参考书籍.

前　　言

本书是参照教育部的常微分方程的教学大纲编写而成的，经过了数次教学实践.

本书是常微分方程基础课教材，以初等积分法为主. 书中也简单地介绍了一点常微分方程定性和稳定性的知识，但只限于一些最基本的概念.

常微分方程中有许多知识是很有用的. 比如当学生学习了常系数线性微分方程的解法后，就可以体会到欧拉(Euler)复指数公式的精妙之处，这个公式将会在复变函数论中有重要的用途. 又比如学了初值问题解的存在唯一性定理之后，会接触到函数迭代的思想方法. 迭代法在现代数学中的作用众所周知，但学生在本书中却是第一次认识它. 另外，线性微分方程的解空间是 n 维线性空间的十分生动的例子，可让学生温故而知新.

在常微分方程中出现的算子方法，已有很长久的历史了，大概可以追溯到 19 世纪的中后期. 但该法常常会失效，而且弄不清原因. 这使得它会遭到一些严谨的常微分方程著作的排斥. 本书针对这一情况作了深入的分析，总的说来，问题已得到了解决. 这是本书的创新.

如果不讲打星号的内容，本书可作为 50 学时的教材.

本书的写作方法是由浅入深，由具体到抽象，因此特别适合那些初次登上常微分方程教学岗位的青年教师使用，也期待他们能成熟起来，并对本书提出意见，以便使得这门课的教材能越编越好.

承蒙梁肇军教授、周笠教授以及陈祖诰教授提出修改意见，并指出了许多错漏，谨此致谢！作者还要对叶彦谦教授、张芷芬教授和俞玉森教授关心本书的出版，以及高克强教授对作者的关心表示感谢！华中科技大学出版社的编辑们认真负责地编校书稿，对他们付出的辛勤劳动，作者一并致谢！

作　者

2008 年 5 月于华中科技大学

目　　录

第 1 章　绪　　论

1.1　实际问题中的常微分方程

按照习惯说法，含有未知函数的导数或微分的等式，称为微分方程.

尽管这种说法现在看来有些缺点，但本书认为它还是有可取之处. 因为这非常自然，符合人们认识事物由浅入深、由低级向高级的发展规律，更重要的是，这个定义不会妨碍我们学习这门基础课程.

本书着重介绍常微分方程的基本概念和基本解法，适当增加一些联系实际的例子和习题.

下面是微分方程的例子.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=a(x)y+b(x)$；　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=P(x)y^2+1$；

(3) $t^2\dfrac{d^2x}{dt^2}+t\dfrac{dx}{dt}+(t^2-n^2)x=0$；　　(4) $\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$；

(5) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$；　　(6) $\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$.

前三个方程称为常微分方程，它们的未知函数只含有一个自变量；后三个方程称为偏微分方程，它们的未知函数含有两个(或两个以上)的自变量. 本书研究常微分方程.

和代数方程一样，常微分方程来源于实际问题. 下面通过一些例子，说明如何从问题中归纳数学模型，从而提出解常微分方程的问题.

1. 正交轨线模型

平面上一族曲线可以表示为

$$f(x,y,c)=0. \tag{1.1.1}$$

要找出这样的曲线 Γ，要求它与曲线族(1.1.1)中的每根曲线相交，并且在交点处，它的切线与曲线族(1.1.1)中的曲线的切线互相垂直，这称为正交. 这样的曲线 Γ 称为曲线族(1.1.1)的正交轨线，如图 1.1.1 所示.

正交轨线问题的来源很多，例如，带电体表面附近的等势线，就是电力线的正交轨线，如图 1.1.2 所示.

现在推导正交轨线的方程. 为了便于看清问题的实质，这里不用曲线族的一般表示式，仅考虑椭圆族方程

$$x^2+4y^2=cx. \tag{1.1.2}$$

对式(1.1.2)的两边求导，得到

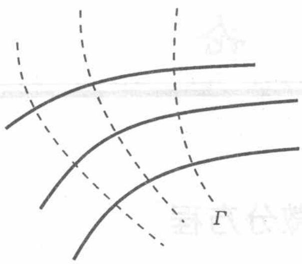


图 1.1.1　曲线族的正交轨线

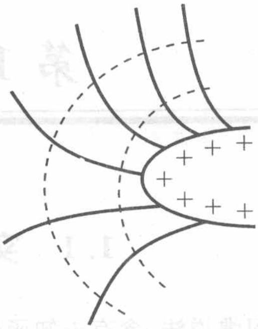


图 1.1.2　电力线的正交轨线

$$2x+8yy'=c. \tag{1.1.3}$$

将式(1.1.3)代入式(1.1.2)，消去 c，得到

$$y'=\frac{4y^2-x^2}{8xy}. \tag{1.1.4}$$

式(1.1.4)就是通过点(x,y)的曲线(1.1.2)的切线斜率. 那么，过点(x,y)的正交轨线 Γ 的切线斜率为式(1.1.4)右端的负倒数，即

$$y'=-\frac{8xy}{4y^2-x}. \tag{1.1.5}$$

式(1.1.5)就是正交轨线方程.

2. 细菌繁殖的数学模型

细菌繁殖很快，在短时期内可以认为不受外界的影响，这时它的增殖率与本身的数量密度(称基数)成正比.

设用 $N(t)$表示 t 时刻细菌的密度，于是有

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda N(t), \tag{1.1.6}$$

将式(1.1.6)两边除以 $N(t)$，得到

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=\lambda\mathrm{d}t, \tag{1.1.7}$$

式(1.1.7)两边积分后，得到 $\ln N=\lambda t+\widetilde{C}$，或写成

$$N=ce^{\lambda t}. \tag{1.1.8}$$

这表明在短时间内，细菌数量将以指数级增长.

3. 人口增长模型

人口的自然增长率仍然与基数成正比. 但是这个模型并不能反映实际情况，因为人口增长还会受到生存环境的影响，食物、疾病、战争、气候变化等都会直接影响到人口的增长.

严格说来，人口增长模型是个很复杂的问题.

下面是个简化了的模型，认为制约人口增长的因素，仅仅是人口密度本身. 它在很

大程度上确实反映了实际情况，因为随着人口数量的增多，食物问题、健康问题也会随之而来，从而限制了人口本身的增长. 此人口增长模型的前提是认为增长系数是人口的线性函数.

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=[M-aN]N. \tag{1.1.9}$$

式(1.1.9)表明，当密度 $N>M/a$ 时，增长率为负数，从而人口下降；而当 $N<M/a$ 并接近 M/a 时，人口将缓慢增长.

可以看出，这个人口模型已经能初步反映出人口增长的实际情况.

4. L-R-C 电路模型

如图 1.1.3 所示，L-R-C 电路是由电源(S)、电阻(R)、电感线圈(L)、电容器(C)和开关(K)组成的电路.

设电源的电动势为 $\varepsilon(t)$，电阻大小为 R，电容大小为 C，电感系数为 L.

当关闭开关 K 时，就形成了 L-R-C 电路.

根据克希霍夫(Kirchhoff)定律，闭合回路的电压降为零，得到

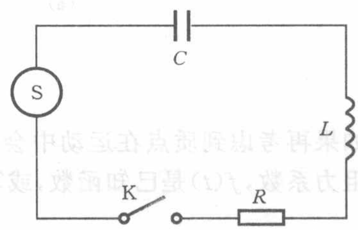


图 1.1.3 L-R-C 电路

$$\frac{Q}{C}+RI+L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-\varepsilon(t)=0. \tag{1.1.10}$$

其中 $Q,I,\varepsilon(t)$ 都是时间 t 的函数. 将式(1.1.10)两边对 t 求导，得到

$$\frac{I}{C}+R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+L\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}=\varepsilon'(t). \tag{1.1.11}$$

式(1.1.11)就是电路的微分方程，即电路方程.

5. 单摆模型

如图 1.1.4(a)所示，将一质量为 m 的质点悬挂在横梁下，线长为 l，当质点偏离平衡点位置时，就会左右摆动.

以悬挂点为原点，垂直向下的线为 x 轴，反时针旋转为正向，试用向量方法推导质点的运动方程.

从原点到质点的向量为运动向量，记为 $\boldsymbol{r}$，如图 1.1.4(b)所示，质点所受的力有重力 $\boldsymbol{F}$ 和细线的反作用力 $\widetilde{\boldsymbol{F}}$，$\widetilde{\boldsymbol{F}}$ 产生的力矩为零，$\boldsymbol{F}$ 产生的力矩设为 $\boldsymbol{M}$，则

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}. \tag{1.1.12}$$

将式(1.1.12)投影在旋转轴 z 上，就得到 $M_z=-mgl\sin\theta$. 但是

$$M_z=I\ddot{\theta}\ (I=ml^2\ \text{为转动惯量},\ddot{\theta}\text{为角加速度}). \tag{1.1.13}$$

因此，得到微分方程 $ml^2\ddot{\theta}=-mgl\sin\theta$，或写成

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0. \tag{1.1.14}$$

式(1.1.14)称为数学摆方程. 如果考虑 θ 的变化比较小，近似地有 $\sin\theta\approx\theta$，那么就得到

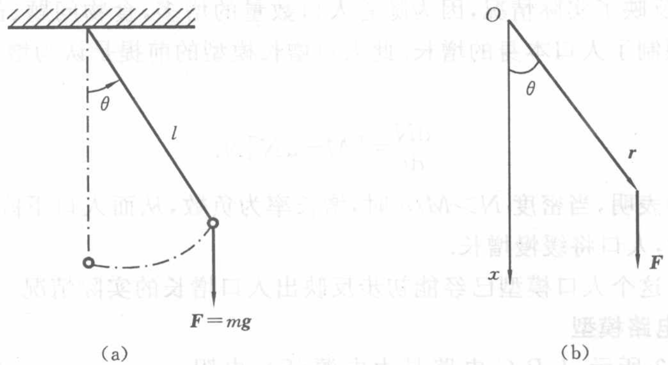


图 1.1.4 单摆

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0. \tag{1.1.15}$$

如果再考虑到质点在运动中会有阻力和外力，则有 $ml\ddot{\theta}+\mu\dot{\theta}+mg\theta=f(t)$，其中 μ 是阻力系数，$f(t)$是已知函数，或写成

$$\ddot{\theta}+2\zeta\dot{\theta}+\omega^2\theta=\tilde{f}(t), \tag{1.1.16}$$

其中 $\zeta=\frac{\mu}{2ml}$，$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$，$\tilde{f}(t)=\frac{1}{m}f(t)$，角速度$\dot{\theta}$是 θ 的一阶导数，$\ddot{\theta}$是 θ 的二阶导数，这是科技文献中的习惯用法.

式(1.1.16)称为单摆方程.

1.2 基本概念

1. 常微分方程和微分方程的阶

通常把

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \tag{1.2.1}$$

称为 n 阶常微分方程.

有时 n 阶常微分方程并没有式(1.2.1)那样的形式，而是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0. \tag{1.2.2}$$

这时把式(1.2.2)称为隐式 n 阶常微分方程.

在常微分方程课程中，常常省略掉“常微分”三 个字，而是称方程或 n 阶方程，一般不会产生误解。

2. 解、通解、隐式通解、特解

若有 n 次可微函数 $y=y(x)$适合 $y^{(n)}(x)\equiv f(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n-1)}(x))$，则称 $y=y(x)$为 n 阶方程(1.2.1)的解.

例如，$y''=6x$ 的解为

$$y=\int\left(\int 6x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x=x^3+c_1x+c_2, \tag{1.2.3}$$

式(1.2.3)中 c_1 和 c_2 为任意常数.

一般来说,n 阶方程的带有 n 个任意常数的解称为 n 阶微分方程的通解.

要给通解下一个准确的定义不那么简单.例如式(1.2.3)可以写为

$$y=x^3+c_1x+c_2+c_3, \tag{1.2.4}$$

但是不能认为式(1.2.4)带有3个任意常数,因为 c_2 和 c_3 不是独立的,它们只相当于一个任意常数.

函数族 $\varphi(x;c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 中 n 个常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 被称为是独立的,如果存在$(x;c_1,c_2,\cdots,c_n)$的某个邻域 U,使得

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial c_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi}{\partial c_n} \\ \dfrac{\partial\varphi'}{\partial c_1} & \dfrac{\partial\varphi'}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi'}{\partial c_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{pmatrix}_U \neq 0,$$

其中 $\varphi'=\dfrac{\partial\varphi}{\partial t},\cdots,\varphi^{(n-1)}=\dfrac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial t^{n-1}}$.

现在可以给通解下这样一个定义.

若$(c_{10},c_{20},\cdots,c_{n0})$的某个领域中的每一组常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$,都使得

$$y=y(x;c_1,c_2,\cdots,c_n) \tag{1.2.5}$$

是方程(1.2.1)的解,并且 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是 n 个独立的任意常数,则称式(1.2.5)是方程(1.2.1)的通解.

现在要找出方程(1.2.1)的一个解,使它满足条件 $y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_1,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$,其中 $y_0,y_1,\cdots,y_{n-1}$ 是事先给定的值.这叫常微分方程的初值问题.

如果已知方程(1.2.1)的通解(1.2.5),那么可列出方程组

$$\begin{cases} y(x_0;c_1,c_2,\cdots,c_n)=y_0, \\ y'(x_0;c_1,c_2,\cdots,c_n)=y_1, \\ \qquad\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0;c_1,c_2,\cdots,c_n)=y_{n-1}. \end{cases} \tag{1.2.6}$$

一般来说,方程组(1.2.6)并不一定有解,但是如果它有解,则根据通解常数独立的定义,由隐函数定理知,当$(y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})$在一个邻域内变动,代数方程组(1.2.6)都有关于 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的相应的一组解,而且在连续变动的意义下,这样的解是唯一的.

有时候通解并没有式(1.2.5)的形式,而是形如

$$\varphi(x;y,c_1,c_2,\cdots,c_n)=0, \tag{1.2.7}$$

则称式(1.2.7)为隐式通解,又称为通积分.

通解往往容易被认为是方程的全部解，其实这是不对的，在下面的章节中将会了解到，有些方程的有些解不能包含在通解里面，这样的解称为特解. 通解中的每个解也称为特解.

习 题 1

1. 说明下列方程的阶，自变量和未知函数：

(1) $\dfrac{dx}{dt}=P(t)x+Q(t)x^n$；　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+a(x)\dfrac{dy}{dx}+b(x)y=f(x)$；

(3) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3+8xy^5=0$；　(4) $\varphi\varphi''+(\sin\varphi)\varphi'=t^2+1$.

2. 验证下列函数分别是给定方程的解：

(1) $x=ce^{kt}$，方程$\dfrac{dx}{dt}-kx=0$；

(2) $x=ce^{\int p(t)dt}$，方程$\dfrac{dx}{dt}=p(t)x$；

(3) $x=c_1e^{kt}+c_2e^{-kt}$，方程$\dfrac{d^2x}{dt^2}-k^2x=0$；

(4) $x=c_1\cos kt+c_2\sin kt$，方程 $x''+k^2x=0$.

3. 试分别求出方程$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{t^2+1}$过点(0,1)及过点(2,1)的积分曲线.

4. 已知曲线的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标，求这曲线所适合的微分方程.

5. 写出曲线族 $y=c+x^2$ 的正交轨线所满足的方程，并求出这些正交轨线.

6. 写出下面各曲线族所满足的微分方程.

(1) $x^2-y^2=cy$；　(2) $2\ln y=\dfrac{y^2}{x}+c$；　(3) $y=x+\dfrac{1}{x-c}-c$；

(4) $y^2=c_1x+c_2$；　(5) $y=c_1x+c_2\sin x+c_3\cos x$；　(6) $y=c_1x, xy=t+c_2$.

7. 已知曲线族 $y=cx^2$，求曲线 Γ，假设它与该曲线族中每条曲线相交，交点处夹角为定值.（写出 Γ 应满足的微分方程即可，Γ 称为等角轨线.）

8. 菌种在 3 天内增大了一倍，问多少天后会增大到原先的 6 倍.

9. 竖直放置的圆柱形水槽，底部有一小孔，在 5 分钟内可流出全水槽水的一半，问多长时间内流尽所有的水.

提示：根据水力学有关的定律，小孔水流速度 v 与水面距小孔高度 h 的关系式为 $v(h)=0.62\sqrt{2gh}$，g 是重力加速度.

第2章 分离变量法

常微分方程初等解法是指用初等函数把一个常微分方程的解表示出来，这里面包括用初等函数的积分形式和用代数方程的隐形式表示常微分方程的解，初等解法又称初等积分法.

本章将介绍解微分方程的一个重要方法——分离变量法，及其在一阶线性微分方程中的应用.

2.1 变量分离方程与变量代换

2.1.1 变量分离方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \tag{2.1.1}$$

的方程，称为变量分离方程，这里的 $f(x)$ 和 $g(y)$ 分别是 x,y 的连续函数.

方程(2.1.1)的解法如下.

(1) 若 $g(y_0)\neq 0$，则在包含点 y_0 的一个区间上 $g(y)\neq 0$. 于是可将方程(2.1.1)写为

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx, \tag{2.1.2}$$

这就把变量"分离"了.

方程(2.1.2)的意义可以这样理解：设它有一解 $y=y(x)$，则

$$\frac{y'(x)dx}{g(y(x))}=f(x)dx.$$

上式可写为积分等式 $\int_{x_0}^{x}\frac{y'(s)}{g(y(s))}ds=\int_{x_0}^{x}f(s)ds$. 利用凑微分的变量代换 $y=y(x)$，得到

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{g(y)}=\int_{x_0}^{x}f(x)dx. \tag{2.1.3}$$

式(2.1.3)可等价于

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+c. \tag{2.1.4}$$

于是将式(2.1.4)中两个积分求出，即可得到方程(2.1.1)的解满足的代数关系式.

反过来设 y 与 x 由代数关系式(2.1.4)决定的函数为 $y=y(x)$，则也容易验证它就

是微分方程(2.1.1)的解.

今后如果不特别声明,约定$\int f(x)\mathrm{d}x$只表示一个原函数,这样做是为了突出方程(2.1.1)只有一个任意常数c,其他场合也是如此.

(2) 如果存在y_0使得$g(y_0)=0$,则$y=y_0$也是方程(2.1.1)的解,可能它不包含在式(2.1.4)中,称为特解,而式(2.1.4)的解为通解.

满足初始条件$y(x_0)=y_0$而$g(y_0)\neq 0$的解由关系式(2.1.3)解出.

例 1 解方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x}{y}$.

解 将变量分离,得到

$$y\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x, \tag{2.1.5}$$

两边积分,得到$\dfrac{1}{2}y^2=-\dfrac{1}{2}x^2+c_1$. 因而通解为

$$x^2+y^2=c\quad (c=2c_1). \tag{2.1.6}$$

这里要求任意常数$c>0$,如果$c<0$,则代数方程(2.1.6)无解;若$c=0$,则$x=y=0$并不表示是原方程的解.

从式(2.1.6)得出显式解$y=\pm\sqrt{c-x^2}$.

例 2 解方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2\cos x$,并求满足初始条件$x=0,y=1$的特解.

解 将变量分离,得到$\dfrac{\mathrm{d}y}{y^2}=\cos x\mathrm{d}x$,两边积分,得到$-\dfrac{1}{y}=\sin x+c$. 因此,通解为$y=-\dfrac{1}{\sin x+c}$,这里$c$是任意常数.

此外,方程还有特解$y=0$.

为了确定所要找的特解,以$x=0,y=1$代入通解中,得到$c=-1$. 因而所求特解为$y=\dfrac{1}{1-\sin x}$.

这个特解也可以用下面的方法求解,以避免定任意常数c的麻烦.

$$\int_1^y \frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\int_0^x \cos x\mathrm{d}x, \tag{2.1.7}$$

其中,设积分$\displaystyle\int_1^y \frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\int_1^y \frac{\mathrm{d}s}{s^2}$,对积分$\displaystyle\int_0^x \cos x\mathrm{d}x$也是如此,以后不再一一重复.

将式(2.1.7)积分,便得$-1/y+1=\sin x$,因此得到$y=1/(1-\sin x)$.

例 3 求曲线族$x^2=2py$的正交轨线.

解 对曲线族$2py-x^2=0$两边对x求导,得到$2py'-2x=0$. 联立两个等式,得到

$$\begin{cases}2py-x^2=0,\\ 2py'-2x=0.\end{cases} \tag{2.1.8}$$

消去式(2.1.8)中的p,得到$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2y}{x}$,因此,正交轨线方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{2y},\tag{2.1.9}$$

分离变量，得到 $2y\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x$，积分后得到 $y^2=-x^2/2+c_1$，即

$$x^2+2y^2=2c_1.$$

令 $c=2c_1$，即知正交轨线是椭圆族方程 $x^2+2y^2=c$，如图 2.1.1 所示.

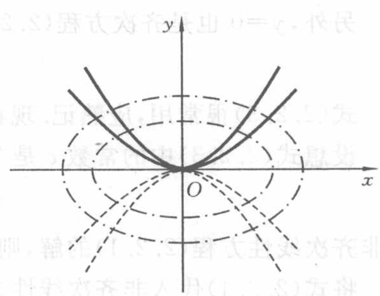


图 2.1.1　抛物线族的正交轨线是椭圆

2.1.2　齐次方程

设 $f(x,y)=\varphi(y/x)$，则称形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)\tag{2.1.10}$$

的方程为齐次方程. 这里的 $f(x,y)$ 称为零次齐次函数.

齐次方程可以通过变量代换化为变量分离方程.

作变量代换

$$u=\frac{y}{x},\tag{2.1.11}$$

即 $y=ux$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u,\tag{2.1.12}$$

将式(2.1.11)和式(2.1.12)代回原方程(2.1.10)，得到 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\varphi(u)$. 因此

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)-u,$$

再分离变量，得到 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，两边积分，再把变量 $u=\dfrac{y}{x}$ 代回即可求得通解.

2.2　线性方程与常数变易公式

一阶线性方程的一般形式是

$$y'=a(x)y+f(x),\tag{2.2.1}$$

其中 $f(x)$ 为非齐次项，而方程

$$y'=a(x)y\tag{2.2.2}$$

称为齐次线性方程，式(2.2.1)称为非齐次线性方程，这里假定 $a(x)$，$f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续.

对于齐次线性方程，可以用分离变量法解出. 例如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=a(x)\mathrm{d}x$，两边积分，得到 $\ln|y|=\int a(x)\mathrm{d}x+c_1$，即 $y=\pm\mathrm{e}^{c_1}\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}$.