SB 数学本科

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

实变函数论

■ 侯友良 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

数学本科

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

实变函数论

侯友良 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实变函数论/侯友良编著．—武汉:武汉大学出版社,2008.9
21 世纪高等学校数学系列教材
ISBN 978-7-307-06528-4

Ⅰ.实…　Ⅱ.侯…　Ⅲ.实变函数论—高等学校—教材　Ⅳ.O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 143846 号

责任编辑:李汉保　　责任校对:黄添生　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:wdp4@ whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)
印刷:武汉中远印务有限公司
开本:787×1092　1/16　印张:15　字数:364 千字　插页:1
版次:2008 年 9 月第 1 版　2008 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-06528-4/O·393　定价:25.00 元

21 世纪高等学校数学系列教材

编 委 会

内容介绍

本书的主要内容是介绍欧氏空间上的 Lebesgue 测度与积分理论，同时也介绍一般空间上的测度与积分理论的基础知识. 后者作为感兴趣的读者进一步学习时的参考. 初学者可以跳过这部分内容，不影响其他部分的学习.

在本书的引言部分，对 Riemann 积分理论的局限性和建立新积分理论的必要性，Lebesgue 积分的主要思想，以及实变函数这门课程的主要内容作了简要介绍. 在内容安排上，将相关内容适当集中，便于读者对每部分的主要内容获得清晰完整的印象. 在叙述上注意尽量做到清晰明了，加强引导性的论述，以帮助读者对概念和定理的理解. 对定理的证明尽量详尽，能够简化的证明尽量简化. 在一些基础和重要的章节，给出了较多的例子，以帮助读者理解相关的概念和定理. 本书系统地使用了 σ-代数的概念和 σ-代数的证明方法. 这样做的好处是，一方面可以使得某些概念可以叙述得更简洁更清晰，可以简化某些定理的证明. 另一方面，也便于与抽象测度论相衔接.

本书配备了较多的习题. 本书的末尾对部分习题给出了提示或解答要点，供读者参考.

本书可以作为综合性大学，理工科大学和高等师范院校的数学各专业或其他学科部分专业本科生的教材或参考书，也可以供研究生或相关教师参考.

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。长期以来,人们在认识世界和改造世界的过程中,数学作为一种精确的语言和一个有力的工具,在人类文明的进步和发展中,甚至在文化的层面上,一直发挥着重要的作用。作为各门科学的重要基础,作为人类文明的重要支柱,数学科学在很多重要的领域中已起到关键性、甚至决定性的作用。数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等诸多领域中的特殊地位是不可忽视的。发展数学科学,是推进我国科学研究和技术发展,保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要。高等学校作为人才培养的摇篮和基地,对大学生的数学教育,是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面,而教材建设是课程建设的重要内容,是教学思想与教学内容的重要载体,因此显得尤为重要。

为了提高高等学校数学课程教材建设水平,由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议,策划,组建21世纪高等学校数学课程系列教材编委会,在一定范围内,联合多所高校合作编写数学课程系列教材,为高等学校从事数学教学和科研的教师,特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台。通过该平台,联合编写教材,交流教学经验,确保教材的编写质量,同时提高教材的编写与出版速度,有利于教材的不断更新,极力打造精品教材。

本着上述指导思想,我们组织编撰出版了这套21世纪高等学校数学课程系列教材。旨在提高高等学校数学课程的教育质量和教材建设水平。

参加21世纪高等学校数学课程系列教材编委会的高校有:武汉大学、华中科技大学、云南大学、云南民族大学、云南师范大学、昆明理工大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、襄樊学院、华中农业大学、福州大学、长江大学、咸宁学院、中国地质大学、孝感学院、湖北第二师范学院、武汉工业学院、武汉科技学院、武汉科技大学、仰恩大学(福建泉州)、华中师范大学、湖北工业大学等20余所院校。

高等学校数学课程系列教材涵盖面很广,为了便于区分,我们约定在封首上以汉语拼音首写字母缩写注明教材类别,如:数学类本科生教材,注明:SB;理工类本科生教材,注明:LGB;文科与经济类教材,注明:WJ;理工类硕士生教材,注明:LGS,如此等等,以便于读者区分。

武汉大学出版社是中共中央宣传部与国家新闻出版署联合授予的全国优秀出

版社之一。在国内有较高的知名度和社会影响力、武汉大学出版社愿尽其所能为国内高校的教学与科研服务。我们愿与各位朋友真诚合作，力争使该系列教材打造成为国内同类教材中的精品教材，为高等教育的发展贡献力量！

21 世纪高等学校数学系列教材编委会

2007 年 7 月

前 言

实变函数论的中心内容是Lebesgue测度与积分理论. 在数学分析课程中我们已经熟悉Riemann积分. Riemann积分在处理连续函数和几何、物理中的计算问题时是很成功的和有效的. 但随着数学理论的发展, Riemann积分理论的一些缺陷也逐渐暴露出来. 主要表现在对被积函数的连续性要求过高, 积分与极限交换顺序以及累次积分交换顺序不便, 可积函数空间不是完备的, 等等. 随着数学理论的不断发展和深入, 这些缺陷愈发显得严重, 阻碍了分析学的进一步发展. 因此有必要加以改进, 或者用一种新的积分代替之. 从19世纪后期开始, 不少数学家包括Jordan, Borel等为此作出了努力, 取得了部分的成功. 20世纪初, 法国数学家Lebesgue作出了关键的一步. 他成功地建立了测度理论, 并且在测度论的基础上, 建立了一种新的积分, 称之为Lebesgue积分. Lebesgue积分是Riemann积分的推广与发展. 与Riemann积分比较, Lebesgue积分在理论上更完善、更深刻, 在计算上更灵活, 从根本上克服了上述提到的Riemann积分的一些缺陷. Lebesgue积分的创立, 为近代分析学奠定了基石, 对20世纪数学的发展产生了极大的影响. 许多数学分支如泛函分析, 概率论, 调和分析等都是在Lebesgue测度与积分理论的基础上产生或发展起来的. 如今, 测度理论与积分理论已经是现代分析学必不可少的理论基础.

本书是为数学系本科高年级学生编写的实变函数论教材, 是在其前身《实变函数基础》的基础上, 经过修改而成的. 与该书比较, 本书除了在内容上作了大量修改和补充之外, 主要差别在于本书以介绍Euclid空间 $\mathbf{R}^n$ 上的Lebesgue测度与积分理论为主, 同时将一般测度与积分理论作为补充和可选内容. 现代数学的许多分支如概率论, 泛函分析, 群上调和分析等越来越多地用到一般空间上的测度理论. 对数学学科各专业的学生而言, 掌握一般空间上测度论的基础知识, 已经变得越来越重要. 因此本书除重点介绍 $\mathbf{R}^n$ 上的Lebesgue测度与积分理论外, 也介绍一般空间上测度与积分理论的基础知识. 这二者大体是平行的和相似的, 在学习了 $\mathbf{R}^n$ 上的测度与积分理论后, 一般空间上相应的概念和定理是很容易理解的. 这些内容包含在§2.4, §3.4, §4.7和第6章. 此外§7.3利用了第6章介绍的Radon – Nikodym定理. 这些内容与其他部分是相对独立的. 这部分的内容学习或讲授与否, 可以灵活选择, 不影响其他部分的学习.

实变函数这门课程一直是学生感到比较难学的课程之一. 为了减轻读者的学

习困难，本书在编写上作了一些努力．在本书的引言部分，对 Riemann 积分理论的局限性和建立新积分理论的必要性，Lebesgue 积分的主要思想，以及实变函数这门课程的主要内容作了简要介绍．这对学习本课程是有益的．在内容安排上，将相关内容适当集中，便于读者对每部分的主要内容获得清晰完整的印象．在叙述上注意尽量做到清晰明了，加强引导性的论述，以帮助读者对概念和定理的理解．对定理的证明尽量详尽，能够简化的证明尽量简化．在一些基础和重要的章节，给出了较多的例子，以帮助读者理解相关的概念和定理．本书系统地使用了 σ-代数的概念和 σ-代数的证明方法．这样做的好处是，一方面可以使得某些概念和定理可以叙述得更简洁更清晰，可以简化某些定理的证明．另一方面，也便于与抽象测度论相衔接．

本书除了抽象测度论这部分内容外，还有部分内容也不是初学者必须掌握的基础内容，而是供有余力的读者参考．这些内容一般都打上了 * 号，放在每节的末尾．

本书配备了较多的习题．这些习题的大部分是比较基础的，读者应该努力完成其中的大部分．也有少部分习题具有一定的难度，有余力的读者可以研习这部分习题．本书的末尾对部分习题给出了提示或解答要点，供读者参考．

实变函数论是现代分析数学必不可少的理论基础．因此这门课程成为数学各专业的必修课．学好这门课程对于数学各专业的学生十分重要．在实变函数中，充满了许多新的思想，新的方法与技巧和深邃的结论．这一方面增加了这门课程的魅力，另一方面又使得初学者难以适应，对于概念和定理的理解，对于一些习题的完成，都感到一些困难．但只要付出了努力，就能学好这门课程并且获益良多，为今后进一步的学习奠定坚实的基础．

本书在编写过程中，参考了国内外部分同类教材，其主要书目列入参考文献中．在此，对这些文献的作者表示感谢！

作　者
2008 年 7 月

目 录

引　言

在开始学习实变函数的内容之前，我们先要对 Riemann 积分理论的局限性和建立新的积分理论的必要性有所认识，大致了解一下新的积分的主要思想，以及实变函数这门课程的主要内容. 这对学习这门课程是有益的.

1. Riemann 积分理论的局限性

在数学分析课程中我们已经熟悉 Riemann 积分. Riemann 积分在处理连续函数和几何、物理中的计算问题时是很成功的和有效的. 但随着数学理论的发展，Riemann 积分理论的不足之处也逐渐暴露出来. 下面在几个主要方面作一简要分析.

(1) 可积函数对连续性的要求

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的有界实值函数. 又设

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

是区间 $[a,b]$ 的一个分划. 对每个 $i=1,2,\cdots,n$，令

$$m_i=\inf\{f(x): x\in[x_{i-1},x_i]\},$$

$$M_i=\sup\{f(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}.$$

并且令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-x_{i-1}|$. 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})=0. \tag{1}$$

其几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 的下方图形（曲边梯形）的外接阶梯形与内接阶梯形的面积之差趋于零，如图 1 所示. 由于在包含 $f(x)$ 的间断点的区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上，当 $\lambda\to 0$ 时函数的振幅 M_i-m_i 不趋于零，为使得式(1)成立，包含间断点的小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的总长必须可以任意小. 因此为保证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$f(x)$ 必须有较好的连续性. 简单地说，就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点不能太多. 这样就使得很多连续性不好的函数不可积了. 单从这一点看，这已经是 Riemann 积分的不够完美之处. 而且由于 Riemann 积分的可积函数类过于狭小，这导致了下面提到的 Riemann 积分的进一步的缺陷.

(2) 积分与极限顺序的交换

在数学分析中，经常会遇到积分运算与极限运算交换顺序的问题. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数列，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\,(x\in[a,b])$. 一般情况下，$f(x)$ 未必在 $[a,b]$ 上可积. 即使 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，也未必成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

为使$f(x)$在$[a,b]$上可积并且式(2)成立，一个充分条件是每个f_n在$[a,b]$上连续，并且$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$（这不是必要条件，例如考虑区间$[0,1]$上的函数列$f_n(x)=x^n(n=1,2,\cdots)$）. 这个条件太强并且不易验证. 另外，在累次积分交换积分顺序方面存在类似的情况.

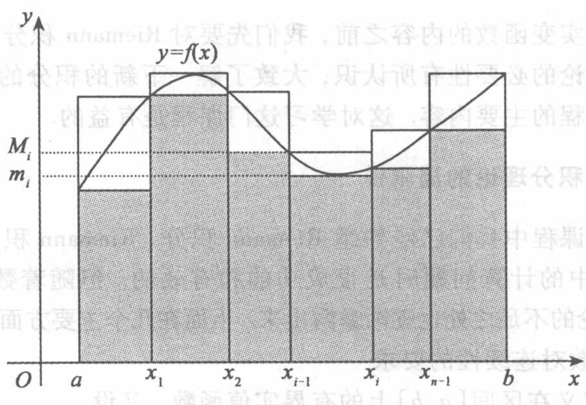


图 1

(3) 可积函数空间的完备性.

我们知道实数集$\mathbf{R}^1$有一个很重要的性质，就是每个Cauchy数列都是收敛的，这个性质称为实数集的完备性. 这个性质在数学分析中具有基本的重要性. 空间的完备性也可以引入到更一般的距离空间中来. 设$R[a,b]$是区间$[a,b]$上Riemann可积函数的全体. 在$R[a,b]$上定义距离

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x,\quad f,g\in R[a,b].$$

称$R[a,b]$为一个距离空间. 与在$\mathbf{R}^1$上一样，在距离空间上可以讨论一些与距离有关的内容，如极限理论. 设$\{f_n\}$是$R[a,b]$中的序列，$f\in R[a,b]$. 若$\lim\limits_{n\to\infty}d(f_n,f)=0$，则称$\{f_n\}$按距离收敛于$f$. $R[a,b]$中序列$\{f_n\}$称为Cauchy序列，若对任意$\varepsilon>0$，存在$N>0$，使得当$m,n>N$时，$d(f_m,f_n)<\varepsilon$. 有例子表明，在$R[a,b]$中并非每个Cauchy序列都是收敛的，即$R[a,b]$不是完备的. 因此$R[a,b]$不是作为研究分析理论的理想空间.

以上几点表明，Riemann积分理论存在一些不够完善的地方. 随着数学理论的不断发展和深入，这些不足之处甚至成了致命的缺陷. 因此有必要加以改进，或用一种新的积分代替之. 许多数学家为此作出了努力. 20世纪初，法国数学家H. L. Lebesgue(1875 ~ 1941)成功地建立了测度理论，并且在此基础上，建立了

一种新的积分，称之为 Lebesgue 积分. Lebesgue 积分消除了上述提到的 Riemann 积分的那些缺陷. Lebesgue 积分的创立，对 20 世纪数学的发展产生了极大的影响. 许多数学分支如泛函分析，概率论，调和分析等都是在 Lebesgue 积分理论的基础上产生或发展起来的. Lebesgue 测度与积分理论已经成为现代分析学必不可少的理论基础.

2. Lebesgue 积分思想的大体描述

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的有界实值函数. 为简单计，这里只考虑 $f(x) \geqslant 0$ 的情况. 注意到此时 Riemann 积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的几何意义就是曲线 $y = f(x)$ 的下方图形

$$\underline{G}(f) = \{(x,y): a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

的面积. 除了可以用 Riemann 积分计算 $\underline{G}(f)$ 的面积外，我们还可以用下面的方式计算 $\underline{G}(f)$ 面积. 令

$$m = \inf\{f(x): x \in [a,b]\},$$

$$M = \sup\{f(x): x \in [a,b]\}.$$

对 $f(x)$ 的值域 $[m,M]$ 的任意一个分划

$$m = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = M$$

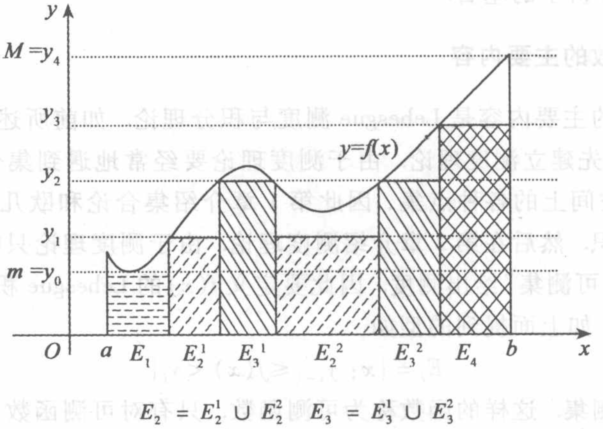
和每个 $i = 1,2,\cdots,n$，令

$$E_i = \{x \in [a,b]: y_{i-1} \leqslant f(x) < y_i\}.$$

则每个 E_i 是区间 $[a,b]$ 的子集. 用 $|E_i|$ 表示 E_i 的"长度"(注意这里我们并没有给出 $|E_i|$ 的确切涵义). 作和式

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\,|E_i| \tag{3}$$

式(3) 相当于 $\underline{G}(f)$ 的一个近似值，如图 2 所示. 令



$$E_2 = E_2^1 \cup E_2^2 \quad E_3 = E_3^1 \cup E_3^2$$

图2

$$\lambda = \max\{y_i - y_{i-1} : 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

定义$f(x)$ 在区间$[a,b]$上的 Lebesgue 积分为

$$(\mathrm{L})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\,|E_i|. \tag{4}$$

如果上述极限存在，这样定义的积分$(\mathrm{L})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 同样是曲线 $y = f(x)$ 的下方图形$\underline{G}(f)$ 的面积. 这样定义积分的好处在于，不管$f(x)$的连续性如何，在每个E_i上$f(x)$的振幅都小于λ，这使得很多连续性不好的函数(例如 Dirichlet 函数)也可积了.

Lebesgue 本人打了一个很形象的比喻，说明两种不同的积分之间的区别. 假如我现在要数一笔钱，我可以有两种不同的方法. 第一种方法是一张一张地将各种面额不同的钞票的币值加起来，得到钱的总数. 第二种方法是先数出每种面额的钞票各有多少张，用每种钞票的面值乘以该种钞票的张数，再求和就得到钱的总数. Riemann 积分的定义方式相当于第一种数钱的方法，而 Lebesgue 积分的定义方式相当于第二种数钱的方法.

但是，按照 Lebesgue 的方式定义积分有一个很大的困难，就是要给出$|E_i|$的意义. $|E_i|$应该是一种类似区间长度的东西. 但是一般情况下E_i不是区间，甚至也不是有限个或一列互不相交区间的并. 因此必须对直线上比区间更一般的集，给出一种类似于区间长度的度量. 为此 Lebesgue 建立了测度理论. 测度理论对直线上相当广泛的一类集，给出一种类似于区间长度的度量. 这样，在式(4)中$|E_i|$就可以用E的测度代替，从而在测度理论的基础上建立了 Lebesgue 积分理论.

事实表明，Lebesgue 积分远比 Riemann 积分更深刻、更强有力. Lebesgue 测度理论以及在此基础上建立的 Lebesgue 积分理论，极大地促进了分析数学的发展，成为现代分析学的基石.

3. 实变函数的主要内容

实变函数的主要内容是 Lebesgue 测度与积分理论. 如前所述，为定义 Lebesgue 积分，必须先建立测度理论. 由于测度理论要经常地遇到集合的运算和欧几里得(Euclid)空间上的各种点集，因此第 1 章介绍集合论和欧几里得(Euclid)空间上点集的知识. 然后在第 2 章介绍测度理论. 由于测度理论只能对直线上一部分集合即所谓“可测集”给出测度. 因此要定义$f(x)$的 Lebesgue 积分，$f(x)$必须满足如下的条件：如上面提到的型如

$$E_i = \{x :\ y_{i-1} \leqslant f(x) < y_i\}$$

的集合都是可测集. 这样的函数称为可测函数. 只有对可测函数才能定义新的积分. 因此在第 3 章我们要讨论可测函数的性质. 作了这些准备后，第 4 章就可以

定义 Lebesgue 积分了．并讨论 Lebesgue 积分的性质及其应用．总之，实变函数的内容就是围绕建立 Lebesgue 积分理论而展开的．

上述简单介绍了实变函数论的主要思想和大致内容．学习了本课程后，将会对这里所述内容有更好的理解．