理科

华东师范大学第二附属中学校本课程

华东师范大学第二附属中学 主编

L I K E

中学数学探索中的合情推理

王 平 王海霞 编著

华东师范大学出版社

华东师范大学第二附属中学

1958－2008

华东师范大学
第二附属中学
校本课程

华东师范大学第二附属中学　主编

中学数学探索中的合情推理

王　平　王海霞　编著

理科

华东师范大学出版社

前言

学习数学，离不开解题，解题首要掌握的当然是基本概念、基础知识，但除了概念、知识之外，更重要的是方法；数学方法论的知识从哪里来？渠道很多，但最好的是去读波利亚的著作，但对于广大中学生来说，波利亚的书选用的例题和背景知识相当精深，不易理解和掌握. 天津的杨世明和王雪芹先生以波利亚的风格撰写了《数学发现的艺术——数学探索中的合情推理》一书，它运用从数学史、数学课本以及众多数学家的著作和手稿里采集的丰富素材，归纳、研究合情推理方法，全书 50 余万字深入浅出，可以看作是"数学与猜想"的中等数学专著，非常适合一些数学爱好者和中学教师阅读. 这些著作作为科普读物，是非常有价值的，但在日常教学中却不太适用. 那么在日常的教学中，这些方法的教和学如何进行呢？这些方法是否就隐藏在我们常见的一些基本题的解决过程中呢？笔者认为如果静观细察可以发现这些看似高深的方法，实际上一直伴随着我们的数学学习过程，只是我们没有刻意将它们整理出来而已. 教师的有意识的指引会对学生掌握这些方法提供有益的帮助，这也是数学教师在教学中应注意的重要问题.

美国数学教育家在其名著《数学与猜想》中指出数学推理可以分为论证推理与合情推理两类，我们借论证推理来肯定我们的数学知识，而借合情推理来为我们的猜想提供依据. 在数学教学中教师往往重视的是论证推理，忽视了合情推理的重要性，通常在教学中教师只注重解题的结果，而忽视了如何想出来这一关键环节，在笔者看来，合情推理就是在解决问题的过程中对问题尝试探索的过程. 正因为本书的注重点在于"解法是如何想出来的"，因此我们在探索每一个

例题时都力求将思考这个问题的途径展现在读者面前，而没有写出规范的解法，让读者和作者一起共同经历每一道题目的思维探索过程，作者认为，这样对提高读者的思维水平，掌握合情推理的一般方法是有益处的. 通过对解题过程的剖析来培养合情推理能力，并就此展开讨论如何培养学生的合情推理能力.

对于合情推理，数学教育界也愈发重视起来，有的教材已经将合情推理写入了教材，作为专门的章节予以讲解. 本书也可以作为教材的补充和辅导读物.

本书在编写中选题大多来自于教材或教辅读物或高考试题，教师可根据教学进度选择，有不当之处敬请批评指正.

目录

第 1 讲　盲人摸象 / 1
第 2 讲　曹冲称象 / 7
第 3 讲　一叶落而知天下秋 / 14
第 4 讲　试一试、猜一猜 / 21
第 5 讲　风险与利益并存——谈猜想 / 29
第 6 讲　形似与神似——谈类比思想 / 43
第 7 讲　分而治之 / 50
第 8 讲　从 Legend 到 lenovo 谈起 / 57
第 9 讲　看图说话 / 67
第 10 讲　眼观六路、耳听八方 / 75
第 11 讲　退一步海阔天空 / 80
第 12 讲　顿悟 / 88
附　录　参考书目 / 95

第1讲　盲人摸象

从前，印度有一位国王，他养了许多大象. 有一天，他正坐在大象身上游玩，忽然看见一群瞎子在路旁歇息，便命令他们走过来，问他们："你们知道大象是什么样子吗?"瞎子们同声回答道："陛下，我们不知道."国王笑道："你们亲自用手摸一摸吧，然后向我报告."

瞎子们赶紧围着大象摸起来. 过了一会儿，他们开始向国王报告.

摸到象耳朵的瞎子说："大象同簸箕一样."

摸到象腿的瞎子说："大象和柱子一样."

摸到象背的瞎子说："大象好似一张床."

摸到象尾的瞎子说："大象好似绳子."

国王听了哈哈大笑起来. 原来他们把自己摸到的某一个部分误认为是整体了.

后来人们便用"瞎子摸象"来形容那些观察事物片面，只见局部不见整体的人. 尽管我们可以嘲笑瞎子们的以偏概全，但事实上作为明眼人的我们，在解决问题的过程中，有时也如同被蒙上了双眼，只能靠不断的探索来寻求问题的本来面目. 要避免出现以偏概全的错误，则需借助理性的思维来串接"摸"出的感性片断来恢复问题的本来面目.

问题1　已知集合 $I=\{1, 2, 3\}$，若集合 A, B 满足：$A\cup B=I$，则称 (A, B) 为 I 的一组"优集对"，问集合 I 的"优集对"有多少对?

分析　首先找几个"优集对"，观察规律.

① $A=\{1\}$, $B=\{2, 3\}$；② $A=\{1\}$, $B=\{1, 2, 3\}$；③ $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$；④ $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$；⑤ $A=\{1, 2\}$, $B=\{3\}$.

解　（枚举法）　(1) $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$，共8个；

(2) $A=\{1, 2\}$, $B=\{3\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$，共4个；

(3) $A=\{1, 3\}$, $B=\{2\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$，共4个；

(4) $A=\{2, 3\}$, $B=\{1\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$，共4个；

(5) $A=\{1\}$, $B=\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$，共2个；

(6) $A=\{2\}$, $B=\{1, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$，共2个；

(7) $A=\{3\}$, $B=\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$，共2个；

(8) $A=\varnothing$, $B=\{1, 2, 3\}$，共1个.

所以“优集对”共有 27 个.

(集合 I 的元素个数有限,是个“迷你象”,那就从头至尾摸个遍)

评述 以偏概全之一:如果只找一组如①或⑤,则很容易认为集合 A, B互补,那么“优集对”的个数与集合 I 的子集个数一样,共有 $2^3=8$ 个.

问题 2 已知集合 $I=\{1, 2, 3, \cdots, 2008\}$,若集合 A, B 满足:$A\cup B=I$,则称(A, B) 为 I 的一组“优集对”,问集合 I 的“优集对”有多少对?

分析 当 I 仅有 3 个元素时,我们可以枚举,但当集合元素的个数较大时枚举行吗?虽然元素个数变大了,但问题的本质不变(从“迷你象”到“巨象”大小在变,物种没变).回忆一下“摸”遍“迷你象”的过程,总结特征,上述枚举过程可根据集合A的情况分类,而集合B的特征是 $\complement_I A\cup C$,其中 C 为 A 的子集.

解 (理性的枚举法)

当集合 $A=\varnothing$ 时,B 为 I,只有 1 个;

当集合 A 仅有 1 个元素时,A 有 C_{2008}^1 种情况,而对每个 A, B 有 2^1 个,共计 $C_{2008}^1\cdot 2^1$ 个;

⋮

当集合 A 有 k 个元素时,A 有 C_{2008}^k 种情况,而对每个 A, B 有 2^k 个,共计 $C_{2008}^k\cdot 2^k$ 个;

⋮

当集合 A 有 2008 个元素时,A 有 C_{2008}^{2008} 种情况,而 B 有 2^{2008} 个,共计 $C_{2008}^{2008}\cdot 2^{2008}$个.

合计共有:

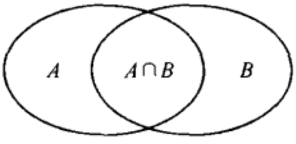
$$\begin{aligned}&1+C_{2008}^1\times 2^1+C_{2008}^2\times 2^2+\cdots\\&\quad+C_{2008}^k\times 2^k+\cdots+C_{2008}^{2008}\times 2^{2008}\\&=(1+2)^{2008}\\&=3^{2008}\text{ 个}.\end{aligned}$$

评述 以偏概全之二:至此似乎我们已经完全解决了上述问题,但遗憾的是我们仅仅是认识了“表象”而非“真象”.

问题 3 已知集合 $I=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$,若集合 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_m 满足:$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m=I$,则称$(A_1, A_2, A_3, \cdots, A_m)$ 为 I 的一组“优集对”,问集合 I 的“优集对” 有多少对?

分析 尝试一下枚举法,若 A_1 有 k 个元素,A_2, A_3, $\cdots$, A_m 分别

由哪些元素构成不确定，是另辟蹊径还是坚持枚举？不妨回到问题 1，将每种情况对应的维恩图画出，可以得到不同的解法：如图(1)，原问题相当于将 1，2，3 依次放入图中的区域，则每个元素有 3 种放法，所以共有 $3^3=27$ 种放法. 若有 2008 个元素，则有 3^{2008} 种放法.



图(1)

若能将上述做法推广，则可解决问题 3，此时问题的关键在于 m 个集合共可构成多少个区域.

解 观察图(1)，发现 3 个区域可以分为 2 类，一是仅由一个集合构成，二是由集合的公共部分构成，因此 m 个集合共可构成：$C_m^1+C_m^2+\cdots+C_m^m=(1+1)^m-1=2^m-1$ 个区域，每个元素有 2^m-1 个位置可放，将 n 个元素逐个放完，则共有 $(2^m-1)^n$ 种放法.

评述 以偏概全之三：问题 3 的解决是否表示我们已对此类问题有了全面的认识了呢？事实上对上述 3 个问题，我们还可以有下列解法：

对每个元素而言，对每个集合有属于与不属于两种可能，因此每个元素对 m 个集合共有 2^m 个状态，但不能出现都不取的情况，因此共有 2^m-1 种情况，所有的 n 个元素考虑一遍，则有 $(2^m-1)^n$ 种放法.

小结 解题有时如同盲人摸象，眼盲不可怕，只要在摸索的过程中我们用理性的眼光去观察，思考摸索的过程与结果，就能让我们做到“眼盲而心明”. 盲人摸象也意味着从多个角度来观察问题，从而达到对问题深入全面的认知.

问题 4 已知：$a, b, c\in\mathbf{R}$，求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

分析 证明不等式的常用途径是作差，但此时作差较复杂，不易判断符号，我们注意到 a, b, c 的轮换对称性，可以先降元处理.

解法一 由基本不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 可得：$2(a^2+b^2)\geqslant a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$，即 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

同理有：$\sqrt{a^2+c^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+c)$，$\sqrt{c^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(c+b)$.

上述三式相加可得

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c).$$

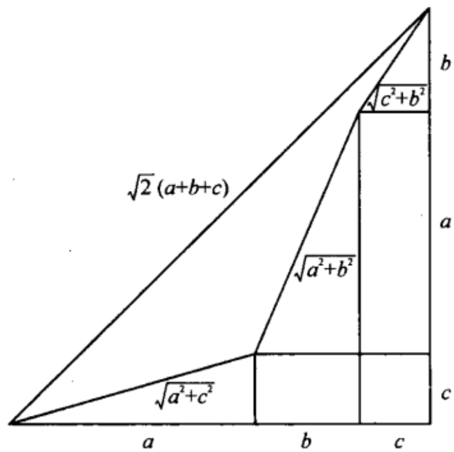
评述 a, b, c 的轮换对称性是本解法的关键,我们可以将上述解法应用于下题:

求证:$\sum_1^n a_i^2 \geqslant \frac{2}{n-1} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j$.

分析 分析式子的结构特征.

解读 $\sqrt{a^2+b^2}$ 表示以 $|a|$, $|b|$ 为直角边的三角形的斜边长,也可以表示为复数的模,因此我们可得:

解法二 不妨设 a, b, $c\in \mathbf{R}^+$,如图(2).



图(2)

解法三 构造复述 $Z_1=a+bi$, $Z_2=b+ci$, $Z_3=c+ai$.

由 $|Z_1+Z_2+Z_3|\leqslant|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|$ 得证.

评述 由于每个学生在观察问题时角度不同,因而,同一问题可能得到几种不同的解法,这就是"一题多解".通过一题多解训练,可使学生认真观察、多方联想、恰当转化,从而提高数学思维的变通性.

问题 5 已知复数 z 的模为 2,求 $|z-i|$ 的最大值.

解法一 (代数法) 设 $z=x+yi$ (x, $y\in\mathbf{R}$),则 $x^2+y^2=4$.

$|z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{5-2y}$.

由 $|y|\leqslant 2$,可知当 $y=-2$ 时,$|z-i|_{\max}=3$.

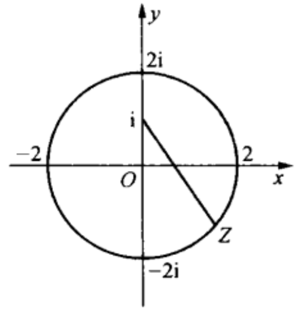
解法二 (三角法) 设 $z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$,则 $|z-i|=\sqrt{4\cos^2\theta+(2\sin\theta-1)^2}=\sqrt{5-4\sin\theta}$.

当 $\sin\theta=-1$ 时,$|z-i|_{\max}=3$.

解法三 (几何法) $|z|=2$,复数 z 对应的点在圆 $x^2+y^2=4$

上，又 $|z-\mathrm{i}|$ 表示 z 与 i 所对应的点之间的距离.

如图(3)所示，于是当 $z=-2\mathrm{i}$ 时，$|z-\mathrm{i}|_{\max}=3$.



图(3)

解法四 （运用模的性质：$|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$）

$|z-\mathrm{i}|\leqslant|z|+|-\mathrm{i}|=2+1=3$.

当且仅当 $z=-2\mathrm{i}$ 时，$|z-\mathrm{i}|=3$. 故 $|z-\mathrm{i}|_{\max}=3$.

解法五 （运用模的性质：$|z|^2=z\cdot\overline{z}$）

$|z-\mathrm{i}|^2=(z-\mathrm{i})\overline{(z-\mathrm{i})}=z\overline{z}+(z-\overline{z})\mathrm{i}+1=5-2I(z)$ （$I(z)$ 表示 z 的虚部）.

又 $|I(z)|\leqslant 2$，可得 $|z-\mathrm{i}|_{\max}=3$.

评述 以偏概全是指思考不全面，遗漏特殊情况，致使解答不完全，不能给出问题的全部答案，从而表现出思维的不严密性，如同盲人摸象.

问题 6 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_3+S_6=2S_9$，求数列的公比 q.

错误解法 因为 $S_3+S_6=2S_9$，

即

$$\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=2\cdot\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}.$$

整理得 $$q^3(2q^6-q^3-1)=0.$$

由 $q\neq 0$ 得方程 $$2q^6-q^3-1=0.$$

所以 $$(2q^3+1)(q^3-1)=0.$$

$$q=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\text{ 或 }q=1.$$

分析 在错解中，由 $\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=2\cdot\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}$，整理得 $q^3(2q^6-q^3-1)=0$ 时，应有 $a_1\neq 0$ 和 $q\neq 1$. 在等比数列中，$a_1\neq 0$ 是显然的，但公比 q 完全可能为 1，因此，在解题时应先讨论公比 $q=1$ 的情况，再在 $q\neq 1$ 的情况下，对式子进行整理变形.

正确解法 若 $q=1$，则有 $S_3=3a_1$，$S_6=6a_1$，$S_9=9a_1$.

但 $a_1\neq 0$，即得 $S_3+S_6\neq 2S_9$，与题设矛盾，故 $q\neq 1$.

又依题意， $S_3+S_6=2S_9$，

可得 $$\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=2\cdot\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}.$$

整理得 $$q^3(2q^6-q^3-1)=0.$$

即 $$(2q^3+1)(q^3-1)=0,$$

因为 $q\neq 1$，所以 $q^3-1\neq 0$，所以 $2q^3+1=0$.

所以 $q=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

评述 在解决数学问题的最初阶段，我们大多数时候如同盲人摸象，虽然可能出现各种各样的错误和偏颇的认识，但这毕竟是走出了解题的第一步.

第2讲　曹冲称象

有一次，吴国孙权送给曹操一头大象，曹操十分高兴. 大象运到许昌那天，曹操带领文武百官和小儿子曹冲，一同去看. 曹操的人都没有见过大象. 这大象又高又大，光说腿就有大殿的柱子那么粗，人走近去比一比，还够不到它的肚子.

曹操对大家说："这只大象真是大，可是到底有多重呢？你们哪个有办法称它一称？"嘿！这么大个家伙，可怎么称呢！大臣们纷纷议论开了.

一个说："只有造一杆顶大顶大的秤来称."

另一个说："这可要造多大的一杆秤呀！再说，大象是活的，也没办法称呀！我看只有把它宰了，切成块儿称."他的话刚说完，所有的人都哈哈大笑起来. 大家说："你这个办法呀，真叫笨极啦！为了称称重量，就把大象活活地宰了，不可惜吗？"

大臣们想了许多办法，一个个都行不通，真叫人为难了.

这时，从人群里走出一个小孩，对曹操说："爸爸，我有个法儿，可以称大象."

曹操一看，正是他最心爱的儿子曹冲，就笑着说："你小小年纪，有什么法子？你倒说说，看有没有道理."

曹冲把办法说了. 曹操一听连连叫好，吩咐左右立刻准备称象，然后对大臣们说："走！咱们到河边看称象去！"

众大臣跟随曹操来到河边. 河里停着一只大船，曹冲叫人把象牵到船上，等船身稳定了，在船舷上齐水面的地方，刻了一条道道. 再叫人把象牵到岸上来，把大大小小的石头，一块一块地往船上装，船身就一点儿一点儿往下沉. 等船身沉到刚才刻的那条道道和水面一样齐了，曹冲就叫人停止装石头. 大臣们睁大了眼睛，起先还摸不清是怎么回事，看到这里不由得连声称赞："好办法！好办法！"现在谁都明白，只要把船里的石头都称一下，把重量加起来，就知道象有多重了.

从这个小故事中我们可以得到一个解决问题的方法，即将问题做适当的转换、分解，使之成为可以解决的部分，数学上我们将这个方法称为等价转化. 我们通过几个例子来说明一下等价转化在解决问题的过程中的作用.

一、算两次

“算两次”这个提法，笔者印象最深的是单墫先生的一本奥林匹克辅导丛书《算两次》，其中举了很多例子来说明形形色色的“算两次”. 通观各种“算两次”，我们可以发现其核心在于等价转化，我们以几个高中范围内的问题予以说明.

问题 1 求证：$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$（2006 年复旦大学自主招生题）.

分析 2006 年复旦大学在其自主招生中考察了此题，虽然不是一个新题（在很多参考资料中有此题），但考生中能够顺利解答此题的不多，究其原因在于：大多数考生都从组合数的计算入手，复杂且没有明显的规律. 如果注意到 $C_n^k=C_n^{n-k}$，则可以做一个等价转化.

只需证明：

$$C_n^0\cdot C_n^n+C_n^1\cdot C_n^{n-1}+\cdots+C_n^k\cdot C_n^{n-k}+\cdots+C_n^n\cdot C_n^0=C_{2n}^n.$$

观察上式的结构特征，我们可以进一步转换问题，得到如下解法.

解 由 $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$，考虑展开式 x^n 的系数，右边展开后 x^n 的系数为 C_{2n}^n，下面考虑左边.

$$\begin{aligned}(1+x)^n(1+x)^n=&(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^kx^k+\cdots+C_n^nx^n)\cdot\\&(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^kx^k+\cdots+C_n^nx^n).\end{aligned}$$

则其 x^n 的系数为 $C_n^0\cdot C_n^n+C_n^1\cdot C_n^{n-1}+\cdots+C_n^k\cdot C_n^{n-k}+\cdots+C_n^n\cdot C_n^0$.

因为 $C_n^k=C_n^{n-k}$，所以

$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n.$$

评述 在组合问题中，算两次是一个非常重要的方法，对高中生来说也不陌生，组合数计算公式 $C_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ 的建立本身就是一个算两次方法的应用. 这样的例子还有很多.

问题 2 （范德蒙恒等式） 设 $0<k\leqslant m\leqslant n$，求证：

$$C_m^0\cdot C_n^k+C_m^1\cdot C_n^{k-1}+\cdots+C_m^k\cdot C_n^0=C_{m+n}^k.$$

证明 不妨设要从 m 个男人、n 个女人中选出 k 名代表，那么选取的方法总数为 C_{m+n}^k.

而将选取的最终结果又可以分成如下 $k+1$ 种情况：

从 m 个男人中选出 0 个人，从 n 个女人中选出 k 个人，则有 $C_m^0\cdot C_n^k$ 种选法；

从 m 个男人中选出 1 个人，从 n 个女人中选出 $k-1$ 个人，则有 $C_m^1 \cdot C_n^{k-1}$ 种选法；

……

从 m 个男人中选出 i 个人，从 n 个女人中选出 $k-i$ 个人，则有 $C_m^i \cdot C_n^{k-i}$ 种选法；

……

从 m 个男人中选出 k 个人，从 n 个女人中选出 0 个人，则有 $C_m^k \cdot C_n^0$ 种选法.

这 $k+1$ 种选法总和等于 C_{m+n}^k，即

$$C_m^0 \cdot C_n^k + C_m^1 \cdot C_n^{k-1} + \cdots + C_m^k \cdot C_n^0 = C_{m+n}^k.$$

评述 注意观察问题 1 实际上是问题 2 中当 $m=n=k$ 的一个特例.

二、等价变形，将“大象”分解

等价变形就是将问题进行转化，化归为熟悉的、已知的问题，通过一次次的转化将难称的“大象”分解为可以操作的部分.

问题 3 试证：对任意自然数 n，分数 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 不可约分.

解 分数 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 不可约分等价于 $21n+4$ 与 $14n+3$ 没有除了 1 以外的公因数.

因为 $$21n+4=14n+3+7n+1,$$

所以 $21n+4$ 与 $14n+3$ 的最大公因数即为 $14n+3$ 与 $7n+1$ 的最大公因数.

而 $$14n+3=2(7n+1)+1,$$

于是转化为 $7n+1$ 与 1 的最大公因数，显然最大公因数为 1.

所以 $21n+4$ 与 $14n+3$ 没有除了 1 以外的公因数.

评述 辗转相除法是求最大公因数与最大公因式的做法，其实质是不断地做等价转化，往简单的情形转化.

问题 4 解方程

$$\frac{x}{x^2-2x+6}+\frac{x}{x^2-11x+6}+\frac{x}{x^2+13x+6}=0.$$

分析 解分式方程的一般做法是，去分母转化为整式方程，如果按此方法处理，则得到一个5次方程. 解高次方程难度较大，我们注意观察上式的特征，寻求做等价变形的途径.

解 显然 $x=0$ 是方程的一个解.

当 $x\neq 0$ 时，方程等价于：

$$\frac{1}{\frac{x^2+6}{x}-2}+\frac{1}{\frac{x^2+6}{x}-11}+\frac{1}{\frac{x^2+6}{x}+13}=0.$$

令 $t=\frac{x^2+6}{x}$，则方程可转化为：$\frac{1}{t-2}+\frac{1}{t-11}+\frac{1}{t+13}=0$.

去分母，化简得 $t^2=49$.

所以 $t=\pm 7$.

即 $\frac{x^2+6}{x}=\pm 7$.

解得 $x=\pm 1,\ \pm 6$.

评述 解方程从本质上来讲都是在做等价变形，往低阶、简单的情形转化.

问题5 已知$x, y\in\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$，$a\in\mathbf{R}$，且$\begin{cases}x^3+\sin x-2a=0,\\4y^3+\sin y\cos y+a=0,\end{cases}$求 $\cos(x+2y)$ 的值.

解 $\begin{cases}x^3+\sin x-2a=0,\\4y^3+\sin y\cos y+a=0\end{cases}$ 等价于 $x^3+\sin x=-8y^3-2\sin y\cos y=2a$.

令 $f(x)=x^3+\sin x$，则 $f(x)$ 在 $x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时为单调递增函数.

原问题等价于已知 $f(x)=f(-2y)=2a$.

所以 $x=-2y$，$x+2y=0$，于是 $\cos(x+2y)=\cos 0=1$.

评述 看似是一个超越方程问题，实际可转化为函数的单调性问题.

三、向容易的地方转化

问题6 已知 $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$，求证：$a$、$b$、$c$ 中至少有一个等于1.

分析 结论没有用数学式子表示，很难直接证明. 首先将结论用数学式子表示，转化成我们熟悉的形式. a、b、c 中至少有一个为 1，也就是说 $a-1$、$b-1$、$c-1$ 中至少有一个为零，这样，问题就容易解决了.

证明 因为 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$，所以 $bc+ac+ab=abc$.

于是 $(a-1)(b-1)(c-1)=abc-(ab+ac+bc)-1+(a+b+c)=0$.

所以 $a-1$、$b-1$、$c-1$ 中至少有一个为零，即 a、b、c 中至少有一个为 1.

评述 很多学生只在已知条件上下功夫，左变右变，还是不知如何证明三者中至少有一个为 1，其原因是不能把要证的结论"翻译"成数学式子，把陌生问题变为熟悉问题. 因此，多练习这种"翻译"，是提高转化能力的一种有效手段.

问题 7 直线 L 的方程为 $x=-\frac{p}{2}$，其中 $p>0$. 椭圆 E 的中心为 $O'\left(2+\frac{p}{2},\ 0\right)$，焦点在 x 轴上，长半轴为 2，短半轴为 1，它的一个顶点为 $A\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$，问 p 在什么范围内取值时，椭圆上有四个不同的点，它们中的每一点到点 A 的距离等于该点到直线 L 的距离.

分析 从题目的要求及解析几何的知识可知，四个不同的点应在抛物线

$$y^2=2px \qquad ①$$

上. 又从已知条件可得椭圆 E 的方程为

$$\frac{\left[x-\left(2+\frac{p}{2}\right)\right]^2}{4}+y^2=1. \qquad ②$$

因此，问题转化为当方程组①、②有四个不同的实数解时，求 p 的取值范围. 将②代入①得：

$$x^2+(7p-4)x+\frac{p^2}{4}+2p=0. \qquad ③$$

确定 p 的范围，实际上就是求③有两个不等正根的充要条件，解不等式组：