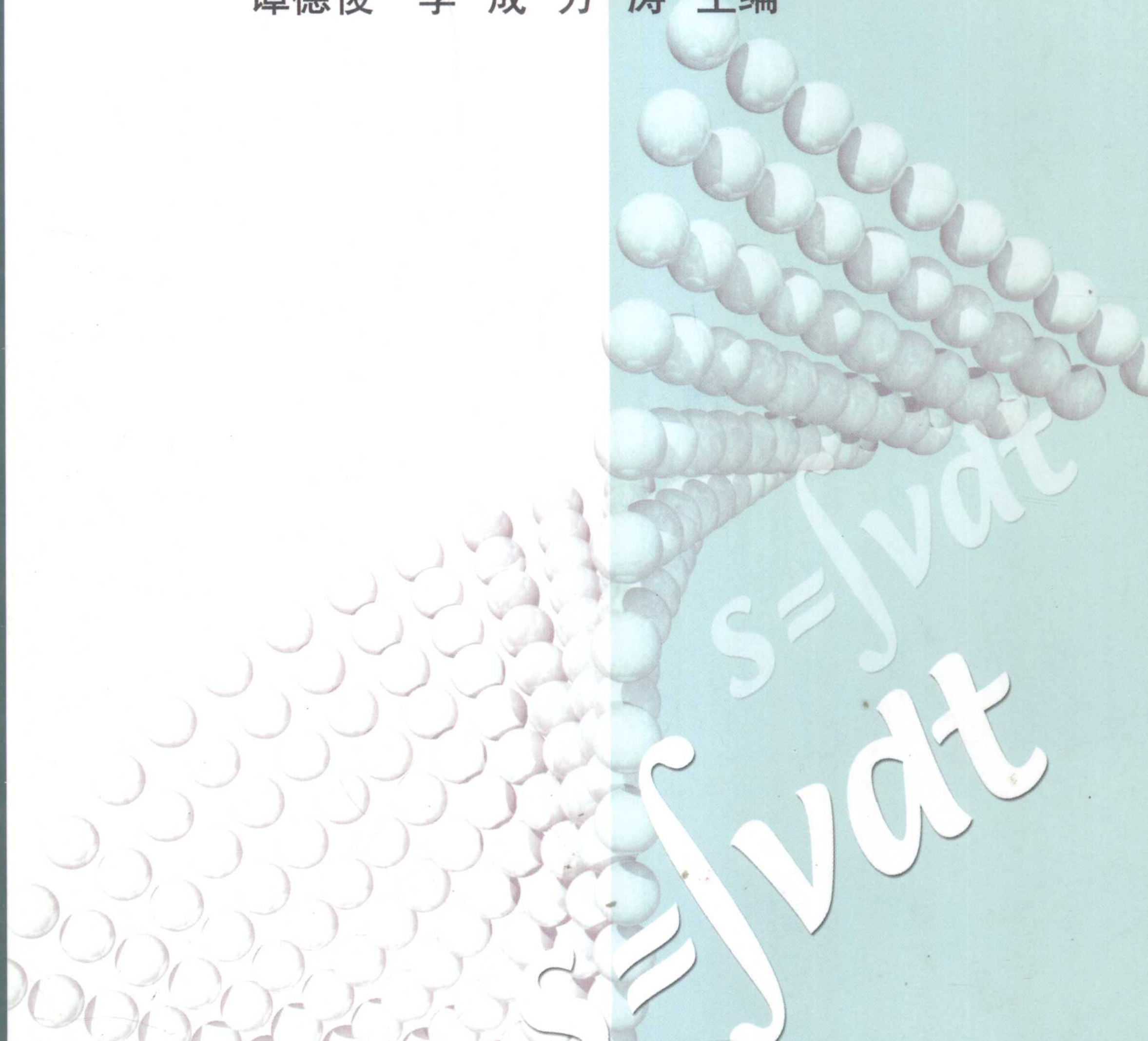
高等院校面向21世纪系列教材

微积分

谭德俊　李　成　方　涛　主编



中国科学技术出版社

高等院校面向21世纪系列教材

微 积 分

谭德俊 李 成 方 涛 主编

中国科学技术出版社
·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

微积分/谭德俊,李成,方涛主编. —北京:中国科学技术出版社,2005.8
高等院校面向21世纪系列教材
ISBN 7—5046—4122—7

Ⅰ.微… Ⅱ.①李…②罗… Ⅲ.微积分—高等学校—教材 Ⅳ.0172

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第083176号

主编 谭德俊 李 成 方 涛
编委 晏木荣 蔡晓春 刘再华
方 涛 李 成 谭德俊

中国科学技术出版社出版
北京市海淀区中关村南大街16号 邮政编码:100081
电话:010－62103210 传真:010－62183872
http://www.kjpbooks.com.cn
科学普及出版社发行部发行
北京迪鑫印刷厂印刷
*
开本:787毫米×1092毫米 1/16 印张:20.75 字数:320千字
2005年7月第1版 2005年7月第1次印刷
定价:32.00元

内容提要

本书是为经济类专业“微积分”课程编写的教材。内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微积分学、微分方程初步、差分方程初步等。每节均配有例题，章末有习题，书末附有习题参考答案。

本书结合经济类专业实际教学需要，理论与实践密切结合，选材适中，体系严谨，论述恰当，条理清晰，适合教学与学生自学，可作为高等院校经济类本、专科师生使用。

目　　次

第一章　函数

§1.1　预备知识 …… (1)
§1.2　函数的概念 …… (4)
§1.3　反函数 …… (8)
§1.4　函数的几何特性 …… (9)
§1.5　复合函数 …… (13)
§1.6　初等函数 …… (14)
§1.7　经济学中常见的几种函数 …… (18)
习题 1 …… (21)

第二章　极限与连续

§2.1　数列的极限 …… (24)
§2.2　函数的极限 …… (31)
§2.3　函数极限的性质与运算法则 …… (35)
§2.4　无穷小量与无穷大量 …… (38)
§2.5　初等函数的极限与极限存在性定理 …… (41)
§2.6　函数的连续性 …… (47)
习题 2 …… (51)

第三章　导数与微分

§3.1　导数的概念 …… (55)
§3.2　求导法则与导数公式 …… (61)
§3.3　高阶导数 …… (72)
§3.4　微分 …… (75)
§3.5　导数在经济分析中的应用 …… (80)
习题 3 …… (85)

第四章　中值定理与导数的应用
§4.1　中值定理…………(91)
§4.2　罗必达(L'Hospital)法则…………(95)
§4.3　函数的单调性与极值…………(100)
§4.4　曲线的凹凸性与拐点…………(107)
§4.5　曲线的渐近线　函数作图…………(109)
§4.6　极值在经济管理中的应用举例…………(112)
习题4…………(116)

第五章　不定积分
§5.1　不定积分的概念与性质…………(122)
§5.2　基本积分公式…………(125)
§5.3　换元积分法…………(127)
§5.4　分部积分法…………(136)
§5.5　几类特殊函数的积分…………(141)
习题5…………(147)

第六章　定积分
§6.1　定积分的概念与性质…………(150)
§6.2　微积分基本定理…………(157)
§6.3　定积分的换元法与分部积分法…………(161)
§6.4　定积分的应用…………(168)
§6.5　广义积分初步…………(176)
习题6…………(181)

第七章　多元函数微积分学
§7.1　预备知识…………(185)
§7.2　多元函数的基本概念…………(188)
§7.3　偏导数与全微分…………(193)
§7.4　多元复合函数与隐函数微分法…………(200)
§7.5　多元函数的极值及其应用…………(208)
§7.6　重积分…………(216)
习题7…………(233)

第八章　无穷级数
§8.1　常数项级数的概念与性质…………(237)
§8.2　正项级数及其敛散性…………(241)
§8.3　任意项级数及其敛散性…………(248)

§8.4 幂级数的概念与性质 …… (253)
§8.5 函数的幂级数展开 …… (260)
习题 8 …… (267)

第九章 微分方程初步
§9.1 微分方程的基本概念 …… (270)
§9.2 一阶微分方程 …… (272)
§9.3 二阶常系数线性微分方程 …… (280)
§9.4 微分方程在经济学中的应用举例 …… (285)
习题 9 …… (288)

第十章 差分方程初步
§10.1 差分方程的基本概念 …… (291)
§10.2 一阶常系数线性差分方程 …… (293)
§10.3 二阶常系数线性差分方程 …… (298)
§10.4 差分方程在经济学中的应用举例 …… (302)
习题 10 …… (305)

参考答案 …… (308)

第一章　函　　数

函数是微积分的重要的基本概念之一，也是微积分学的主要研究对象. 本章将介绍函数的相关概念及性质.

§1.1　预备知识

一、集合

1. 集合的基本概念

具有某种共同属性的具体对象组成的整体称为**集合**. 例如：某班级所有同学构成一个集合；全体正整数构成一个集合；等等. 构成集合的每一个具体对象称为**集合的元素**. 习惯上，我们用英文大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用英文小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素.

若 a 是集合 A 的元素，则记为 $a\in A$，读作"a 属于 A"；若 a 不是集合 A 的元素，则记为 $a\notin A$，读作"a 不属于 A".

称有限个元素组成的集合为**有限集**，可用列举法表示，即把集合中的所有元素均列出来. 例如：由数字 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 这十个数组成的集合 A，可表示为 $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

称无限多个元素组成的集合为**无限集**. 通常用描述法表示，即把集合中元素所具有的共同属性描述出来. 例如，由全体正整数 x 组成的集合 B，可表示为

$$B=\{x \mid x\text{ 为正整数}\}$$

又如，坐标平面上过点 $(0,0)$，$(1,1)$ 的直线上所有点组成的集合 C，可表示为

$$C=\{(x,y) \mid x,y\text{ 为实数}, y=x\}$$

若集合 A 的元素都属于集合 B，则称**集合 A 为集合 B 的子集**. 记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作"A 包含于 B"或"B 包含 A".

例如，$A=\{x|x\text{ 为整数}\}$，$B=\{x|x\text{ 为有理数}\}$，则 $A\subset B$.

若集合 A 是集合 B 的子集，且集合 B 也是集合 A 的子集，则称**集合 A 与集合 B 相等**，记作 $A=B$.

例如，$A=\{x|x\text{ 为实数}, 1<x<2\}$，$B=\{x|x\text{ 为实数}, x^2-3x+2<0\}$，则 $A=B$.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 ϕ. 规定空集是任一集合的子集.

2. 集合的运算

正如数之间有四则运算一样，集合之间也有其运算.

由集合 A 与集合 B 的所有元素组成的集合称为**集合 A 与 B 的并**，记为 $A\cup B$ 或 AB，可知

$$A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合称为**集合 A 与 B 的交**，记为 $A \cap B$ 或 AB，可知

$$A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

由属于集合 A 但不属于集合 B 的所有元素组成的集合称为**集合 A 与 B 的差**，记为 $A-B$ 或 $A \backslash B$

例如，设 $A=\{x \mid -2<x \leqslant 3\}$，$B=\{x \mid 1 \leqslant x<4\}$，则 $A \cup B=\{x \mid -2<x<4\}$，$A \cap B=\{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$，$A-B=\{x \mid -2<x<1\}$.

二、实数集与数轴

1. 实数集与数轴

有理数与无理数统称为**实数**. 全体实数组成的集合称为**实数集**，常用 $\boldsymbol{R}$ 表示. 本教材中，以后如无特别说明，所提到的数都是实数，数集均为实数集 $\boldsymbol{R}$ 的子集.

数轴是一条规定了原点、正方向和单位长度的直线. 如图 1-1.

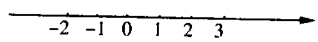


图 1-1

实数和数轴上的点之间具有一一对应的关系，即每一个实数 x 对应数轴上的惟一一点 P，同时，数轴上的任意一点 P 都对应一个实数 x. 为方便起见，把点 P 与其对应的数 x 视为等同，二者可用同一个字母表示. 例如，数 x 也称为点 x，点 P 也称为数 P.

2. 常见的数集及其表示

全体自然数组成的集合称为**自然数集**. 用 $\boldsymbol{N}$ **表示**. 全体整数组成的集合称为**整数集**，用 $\boldsymbol{Z}$ 表示. 此外，常用的实数集还有区间和邻域. 其定义分别如下：

定义 1.1　设 $a, b \in \boldsymbol{R}$，且 $a<b$. 则称数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 为**以 a, b 为左、右端点的开区间**，记为 (a, b)；

数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 为**以 a, b 为左、右端点的闭区间**. 记为 $[a, b]$；

数集 $\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 和 $\{x \mid a \leqslant x<b\}$ 为**以 a, b 为左、右端点的半开半闭区间**. 前者记为 $(a, b]$，后者记为 $[a, b)$，如图 1-2.

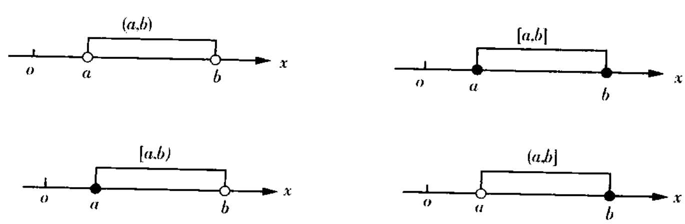


图 1-2

数集 $\{x \mid -\infty<x \leqslant b\}$、$\{x \mid -\infty<x<b\}$、$\{x \mid a \leqslant x<+\infty\}$、$\{x \mid a<x<+\infty\}$、$\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$ 称为**无穷区间**，分别记为 $(-\infty, b]$、$(-\infty, b)$、$[a,+\infty)$、$(a,+\infty)$、$(-\infty,+\infty)$，其中 ∞ 读作“无穷大”. 无穷区间在数轴上的表示如图 1-3.

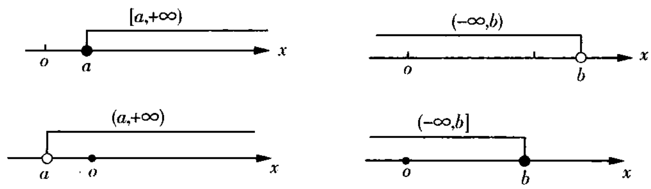


图 1-3

闭区间、开区间、半开半闭区间和无穷区间统称为**区间**.

定义 1.2　设 δ 是正数，对任意的 $x_0\in\boldsymbol{R}$，记 $O_\delta(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$，称 $O_\delta(x_0)$ 为**点 x_0 的 δ 邻域**，x_0 为**该邻域的中心**，δ 为**该邻域的半径**. 数轴上表示如图 1-4.

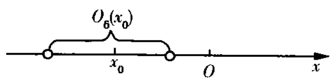


图 1-4

记 $O_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，则称 $O_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ 为 **x_0 的 δ 去心邻域**. 称开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 为 **x_0 的左 δ 邻域**. $(x_0,x_0+\delta)$ 为 **x_0 的右 δ 邻域**. 它们在数轴上的表示分别如图 1-5.

图 1-5

对于无穷大∞的邻域，它的表示及含意为：设 $M>0$，我们称 $O_M(\infty)$ 为**∞点的 M 邻域**，其中

$$O_M(\infty)=\{x\mid |x|>M\}=(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$$

$(-\infty,-M)$ 是**∞的左邻域**，$(M,+\infty)$ 是**∞的右邻域**.

邻域 $O_M(\infty)$ 用数轴形象地表示如图 1-6.

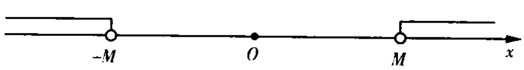


图 1-6

三、实数的绝对值及其性质

1. 绝对值

定义 1.3　若 x 是一个实数. 则 x 的绝对值（记为 $|x|$）定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & 当\ x\geqslant 0\ 时\\ -x, & 当\ x<0\ 时\end{cases}$$

由绝对值的定义可知，当 x,y 均为实数时

$$|x-y|=\begin{cases}x-y, & 当\ x\geqslant y\ 时\\ y-x, & 当\ x<y\ 时\end{cases}$$

x 的绝对值的几何意义为：点 x 到数轴原点 0 的距离. $|x-y|$ 表示点 x 与点 y 之间

的距离.

例 解不等式$|x+3|<|x-1|$,并用区间表示其解集.

解 由绝对值的几何意义可知,待解的不等式的点x到点-3的距离小于x到1的距离.而到点-3和点1距离相等的点为-1,因此,可知原不等式的解集为$\{x|x<-1\}$.用区间表示为$(-\infty,-1)$.

2. 绝对值的性质

由实数的绝对值的定义,不难推出绝对值的性质.

(1)$|x|=|-x|\geqslant 0$

(2)$-|x|\leqslant x\leqslant |x|$

(3)对于正实数k,$|x|\leqslant k$与$-k\leqslant x\leqslant k$等价.

(4)$||x|-|y||\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$

(5)$|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$

(6)$\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}(|y|\neq 0)$

这里只给出(4)的证明,其余性质的证明可由绝对值的定义导出,请读者自己完成.

性质(4)的证明:

先证 $|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$

由性质(3)有 $-|x|\leqslant x\leqslant|x|,-|y|\leqslant y\leqslant|y|$

因此 $-(|x|+|y|)\leqslant x\pm y\leqslant|x|+|y|$

即 $|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$

下面证明 $||x|-|y||\leqslant|x+y|$

由 $|x|=|x+y-y|\leqslant|x+y|+|y|$

因此 $|x|-|y|\leqslant|x+y|$

上式交换x与y的位置可得 $|y|-|x|\leqslant|y+x|$

从而得到 $-|x+y|\leqslant|x|-|y|\leqslant|x+y|$

即有 $||x|-|y||\leqslant|x+y|$

故有 $||x|-|y||\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$

§1.2 函数的概念

一、映射

定义 1.4 设X、Y为两个非空集合,如果存在一个从X到Y的对应法则f,使得对X中的每一个元素x,在Y中有惟一确定的元素y与之对应,则称这个对应法则f为**从X到Y的映射**,记为

$$f:x\to y \quad 或\ y=f(x)$$

按此对应法则f,与X中的x对应的元素是Y中的y,我们称**y是x的象**,**x为y的原象**.原象组成的集合为X,称为**映射f的定义域**,记为D_f,象组成的集合称为**f的值域**,

记为 R_f. 可知, $D_f=X, R_f\subset Y$.

定义 1.5　设 f 是从 X 到 Y 的映射，对 X 中的任意两个不同元素 x_1, x_2，若在 Y 中都有不同的象 y_1, y_2，则称映射 f 为 **X 到 Y 的单射**.

定义 1.6　设 f 是从 X 到 Y 的映射，若 Y 中的任一元素 y 在 X 中都有原象 x，则称 f 为 **X 到 Y 的满射**.

定义 1.7　设 f 是从 X 到 Y 的映射，若 f 既是单射又是满射，则称 f 是 **X 到 Y 的一一映射**.

定义 1.8　设 f 是从 X 到 Y 的一一映射，则在对应法则 f 下，对于任意 $y\in Y$，都有惟一的原象 $x\in X$ 与 y 对应，这个由对应法则 f 隐含的对应法则也是一个映射，称为 **f 的逆映射**，记为 f^{-1}.

可知，当 f 是从 X 到 Y 为一一映射时，若 $f: X\to Y, y=f(x)$，则 f^{-1} 是从 Y 到 X 的一一映射，即 $f^{-1}: Y\to X$，且 $x=f^{-1}(y)$.

例 1　设 A 是某小组的 8 个同学组成的集合，B 是实数集(单位:cm)，将每个学生与其身高建立对应关系，由于每个学生在同一时刻均有惟一的身高，这一对应关系便构成了从 A 到 B 的映射 $f: A\to B$.

例 2　设 $X=\boldsymbol{R}, Y=\{y\mid y$ 为非负实数$\}$，对应法则 f 为将 $\boldsymbol{R}$ 中的 x 对应于 Y 中的 x^2. 则 f 是 X 到 Y 的映射. 且由于对任意的 $y\in Y$，在 X 中有数 $\sqrt{y}\in X$ 和 $-\sqrt{y}\in X$，它们的象为 y，因此，f 是 X 到 Y 的满射.

例 3　设 $X=\boldsymbol{R}, Y=\boldsymbol{R}$，对应法则 f 为将 X 中的 x 对应于 Y 中的 x^3，则 f 是从 X 到 Y 的映射. 且 X 中的任两个不同元素 x_1, x_2 它们在 Y 中的象分别为 x_1^3, x_2^3 也不相同；另一方面，Y 中的任一元素 y，在 X 中有原象 $\sqrt[3]{y}$；因此 f 是 X 到 Y 的单射和满射；因而 f 是 X 到 Y 的一一映射. 其逆映射为 $x=f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$.

二、函数

人们在生产实践和社会活动中，常常遇到许多不同的量，其中有的量在一定的条件下随着过程的进行一直保持一定的数值，这样的量称为**常量**，而另一些量则不同，它的数值在一定的条件下随着过程的进行而不断变化，这样的量称为**变量**.

我们常用字母 $a, b, c, \cdots$ 表示常量，用字母 $x, y, z, \cdots$ 表示变量.

在研究同一现象所遇到的各种变量中，通常各个变量并不都是独立变化的，它们之间存在着某种依赖关系．例如，物理学中的自由落体运动中物体的下降距离 S 与落下时间 t 之间有关系 $S=\frac{1}{2}gt^2$，其中 g 为重力加速度，它是一个常数. 而 S 和 t 都是变量. 又如，用一块边长为 a 的正方形铁皮作成一个高为 x 的无盖小盒(如图 1-7). 则这个盒的容积 V 和高 x 之间的关系为: $V=x(a-2x)^2$. 其中 a 为常量，x, V 为变量.

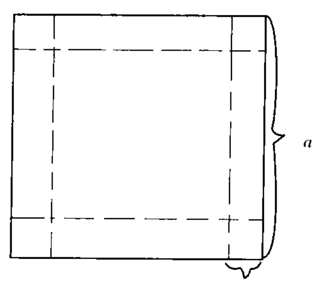


图 1-7

在上面的关系式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 以及 $V=x(a-2x)^2$ 中，可以

看出，在同一问题中所涉及的变量间以一定的规律相联系，其中一个变量的变化将引起另一个变量的变化. 当前者(又称为**自变量**)的值确定后，后者(又称**因变量**)的值按它们间的关系随之确定. 变量间的这种依赖关系抽象出来，可引入如下定义.

定义 1.9 在一个过程中有两个变量 x 和 y，如果对于 x 在数集 D 中的每一个确定的值，按照某个确定的对应法则 f，都有惟一一个实数 y 与之对应，则称这个对应法则 f **为定义在数集 D 上的一个函数**，简称为**函数 f**. x 称为**自变量**，其取值范围 D 称为**函数 f 的定义域**. 为清楚起见，今后将函数 f 的定义域记为 D_f 或 D.

当 $x\in D_f$ 时，称 f 在 x 处有定义；否则称 f 在 x 处无定义.

对于每个 $x\in D_f$，由对应法则 f 确定的数 y 称为**函数 f 在 x 处的函数值**，记为 $f(x)$，即 $y=f(x)$. 由于 y 由自变量 x 及对应法则 f 确定，因此，y 又称为**因变量**. 全体函数值组成的集合称为**函数 f 的值域**，记为 R_f 或 R_y，有

$$R_f=\{y\mid y=f(x),x\in D_f\}$$

可见，函数是一类特殊的映射. 当 X 和 Y 都是非空数集，映射 $f:X\to Y,Y=\{y|y=f(x),x\in X\}$ 就是一个函数. 因此，确定一个函数只需要两个要素，一个是定义域 D_f，另一个是对应法则 f. 因而，定义域和对应法则都相同的函数是相同的函数.

为清楚起见，以后我们称

$$y=f(x),x\in D_f$$

为**函数 f 的表达式或解析式**. 并以其表示函数 f.

对于函数 $y=f(x)$，当自变量 x 取某定值 $x_0\in D_f$ 时，对应的因变量 y 的值称为**函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值**，记为 y_0 或 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 如果建立以 x 轴为横轴，y 轴为纵轴的平面直角坐标系，那么，数对 (x_0,y_0) 就为平面直角坐标系 xoy 上的一点；当 x 取遍 D_f 中的各个值时. 所有这样的数对相应于平面 xoy 上的点的集合便形成了一个图形，这个图形叫做**函数 $y=f(x)$ 的图形**.

至于函数的定义域，分两种情形，一种是这样的，其定义域是事先已明确给定或由问题的实际意义所确定；另一种是只给出了表达式(解析法)而不考虑其实际意义的函数. 对于后一种函数，规定：函数的定义域即为使函数表达式(解析式)有意义的自变量值的集合.

例 4 设 Q 是某种商品的需求量，p 为该商品的价格，且 $Q=30-6p$，求此函数的定义域.

解 因为商品的价格与需求均为非负的，即 $p\geqslant 0$ 且 $Q=30-6p\geqslant 0$，故有 $0\leqslant p\leqslant 5$ 即函数 $Q=30-6p$ 的定义域为 $[0,5]$.

例 5 求函数 $f(x)=\ln(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域.

解 要使函数 $f(x)$ 有意义，必须有

$$\begin{cases}x-1>0\\x^2-1>0\end{cases},\quad 即\begin{cases}x>1\\x>1 或 x<-1\end{cases}.$$

故函数的定义域为 $D_f=(1,+\infty)$.

例 6 求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}-\lg(4-x)$ 的定义域.

解 要使函数有意义,必须

$$\begin{cases}-1\leqslant \dfrac{x-3}{2}\leqslant 1\\ 4-x>0\end{cases},\text{即}\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 5\\ x<4\end{cases}.$$

故函数的定义域 $D=[1,4)$.

例 7 函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 称为**符号函数**,求其定义域并作出其图形.

解 函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 有定义的点的集合为

$$\{x\mid x>0\}\cup\{x\mid x=0\}\cup\{x\mid x<0\}=\boldsymbol{R}$$

故其定义域为 $D=\boldsymbol{R}$

由函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 在 x 的不同范围的表达式,可作出其图形(见图 1-8).

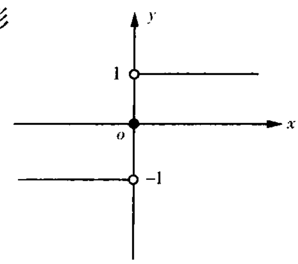


图 1-8

例 8 求函数

$$y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ x^2-1, & 1<|x|\leqslant 2\end{cases}$$

的定义域,并作出其图形.

解 函数 $f(x)$有定义的点的集合为$\{x\mid|x|\leqslant1\}\cup\{x\mid1<|x|\leqslant2\}=\{x\mid|x|\leqslant2\}$,故函数 $f(x)$的定义域 $D=[-2,2]$.

由 $f(x)$的表达式,可作出其图形(见图 1-9).

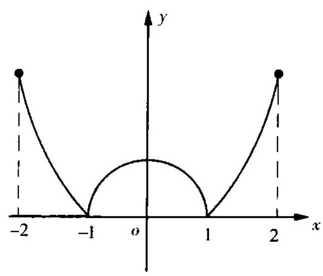


图 1-9

例 7、例 8 这类函数,其表达式是按 x 的不同范围分别列出的. 像这类在自变量的不同变化范围,对应法则用不同的表达式给出的函数,称为**分段函数**. 分段函数的定义域为各个不同表达式的定义域的并集. 另外,分段函数在其定义域上是一个函数,而不是几个函数.

例 9 $y=[x]$称为**取整函数**. x 为任意实数,$[x]$为不超过 x 的最大整数. 如$\left[\dfrac{4}{7}\right]=0$,$[\sqrt{3}]=1$,$[-1.5]=-2$,$[\pi]=3$. 该函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 R_y 为整数集. 其图形如图 1-10.

上面例子所求的函数中变量 y 与 x 的对应关系可以用一个公式表示. 在函数的定义中,并没有表明变量间的函数关系非得用一个公式表达不可. 例如火车时刻表,出站和进站的车次都是时间的函数,但它一般不用公式来表示,而是用列表的方法来表示这种函数关系. 气象站中的温度记录器,记录了空气、温度与时间的一种函数关系,这种关系既不能用公式表示,也不用列表法表达. 而是借助仪器自动描绘在纸带上的一条连续曲线来表达. 再如一个常用的函数关系"y 是不超过 x 的最大整数"即 $y=[x]$. 它是用一句话表示 y 与 x 间的依赖关系的. 前面所列各类函数均已明确表明了变量 y 与 x 间的依赖关系,以后称这种函数为**显函数**.

还有一类函数，变量 y 与 x 间的依赖关系没有明确表达出来，而是通过形如

$$F(x,y)=0$$

的方程确定，这类函数称为**由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数**. 例如 $y-x-\varepsilon\sin y=0$（这里 ε 为常数，$0<\varepsilon<1$）确定一个隐函数.

需注意的是：并不是任意一个方程 $F(x,y)=0$ 都可确定一个隐函数. 一个方程能够确定隐函数的条件将在第七章给出. 以后所说的函数，如无特别说明，均是指显函数.

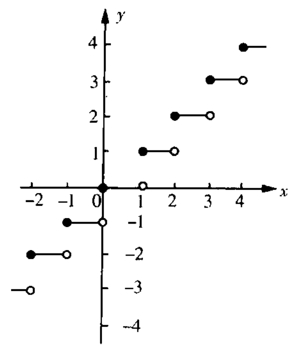


图 1-10

§1.3　反函数

定义 1.10　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 R_f，如果对应法则 f 是 D_f 到 R_f 的一一映射，则 f^{-1} 是从 R_f 到 D_f 的一一映射，即对于任意的 $y\in R_f$，通过对应法则 f^{-1}，都有惟一确定的数 $x\in D_f$ 与之对应. 因而 f^{-1} 是从 R_f 到 D_f 的函数. 记此函数为 $x=f^{-1}(y)$，$y\in R_f$ 并称其为**函数 $y=f(x)$ 的反函数**.

由定义可知：$x=f^{-1}(y)$ 和 $y=f(x)$ 互为反函数. 且 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别为 $y=f(x)$ 的值域和定义域.

由于人们习惯于用 x 表示自变量，y 表示因变量，于是把 $x=f^{-1}(y)$ 中的 y 换成 x，x 换成 y 便成为 $y=f^{-1}(x)$. 因此，习惯上把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$. 今后，除特别声明外，函数 $y=f(x)$ 的反函数便写为 $y=f^{-1}(x)$.

在同一平面直角坐标系下，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图象为同一曲线. 只是将两个变量 x、y 的依赖关系改变了而已. 但是，由于 $y=f^{-1}(x)$ 是由 $x=f^{-1}(y)$ 中. x 与 y 的位置交换得到的，故 $y=f^{-1}(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图象是关于直线 $y=x$ 对称的. 由此可得出：在同一平面直角坐标系中，$y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

可以证明：严格单调增加（减少）的函数 $y=f(x)$ 必存在反函数 $y=f^{-1}(x)$. 且反函数在其定义域上也是严格单调增加（减少）的.

例 1　求函数 $y=1+\ln x$ 的反函数.

解　由 $y=1+\ln x$ 得：$\ln x=y-1$　且 $-\infty<y<+\infty$.

于是　　$x=e^{y-1}$

因此，原函数的反函数为 $y=e^{x-1}$，$x\in\boldsymbol{R}$.

例 2　求函数 $y=1+\sqrt{x-1}$ 的反函数.

解　由 $y=1+\sqrt{x-1}$ 得 $y\geqslant1$，且　$\sqrt{x-1}=y-1$，即　$x=(y-1)^2+1$，$y\geqslant1$.

因此，所求的反函数为　$y=(x-1)^2+1$，$x\geqslant1$.

例 3　求下列函数的反函数

(1) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$　　　(2) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

解(1)　由 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ 得 $yx+y=2x-1$，于是　$x=\dfrac{y+1}{2-y}$，$y\neq2$，

故所求的反函数为 $y=\frac{x+1}{2-x}(x\neq 2)$.

(2)由 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$得

$$-y=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$$

由此可得

$$\begin{cases}x+\sqrt{x^2+1}=e^y\\ \sqrt{x^2+1}-x=e^{-y}\end{cases}$$

于是有 $x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$

因此 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的反函数为

$$y=\frac{e^x-e^{-x}}{2},x\in(-\infty,+\infty).$$

例 4 求函数 $f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$.

解 当 $-\infty<x<1$ 时,由 $y=x$ 得 $x=y,y<1$;

当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时,由 $y=x^2$ 得 $x=\sqrt{y},1\leqslant y\leqslant 16$;

当 $4<x<+\infty$时,由 $y=2^x$ 得 $x=\log_2 y,y>16$;

于是

$$f^{-1}(y)=\begin{cases}y, & y<1\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 16\\ \log_2 y, & y>16\end{cases}$$

故原函数的反函数为

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16\\ \log_2 x & x>16\end{cases}$$

§1.4 函数的几何特性

三、函数的奇偶性

定义 1.11 设函数 $y=f(x)$定义在 D 上,对任意的 $x\in D$,有 $-x\in D$,且 $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$,则称 $y=f(x)$为偶函数(奇函数).

由定义可知:奇函数的图形关于原点对称,见图 1-11,偶函数的图形关于 y 轴对称,见图 1-11.

例 1 判断函数 $y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}(a>1)$的奇偶性.

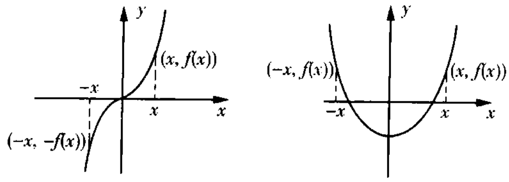


图 1-11

解 由于 $y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

且

$$f(-x)=\frac{a^{-x}-a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^{-x}-a^{x}}{2}=-\frac{a^{x}-a^{-x}}{2}=-f(x),$$

所以 $y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}(a>1)$ 是奇函数.

例 2 判断函数 $f(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\leqslant 0\\ e^x-1, & x>0\end{cases}$ 的奇偶性.

解 因为 $g(x)$ 的定义域 $D=\boldsymbol{R}$

$$\begin{aligned}g(-x)&=\begin{cases}1-e^{-(-x)}, & -x\leqslant 0\\ e^{-x}-1, & -x>0\end{cases}\\ &=\begin{cases}1-e^{x}, & x\geqslant 0\\ e^{-x}-1, & x<0\end{cases}\\ &=-g(x)\end{aligned}$$

所以 $g(x)$ 是奇函数.

二、函数的单调性

定义 1.12 设函数 $f(x)$ 在区间 D 内有定义，且对于 D 内的任意两点 $x_1,x_2,x_1<x_2$，

(1)若 $f(x_1)<f(x_2)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 在 D 内**严格单调递增**（简称**严格单增**）；见图 1-12.

(2)若 $f(x_1)>f(x_2)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 在 D 内**严格单调递减**（简称**严格单减**）. 见图 1-13.

严格单调递增函数和严格单调递减函数统称为**单调函数**. 函数单调的区间称为**函数的单调区间**.

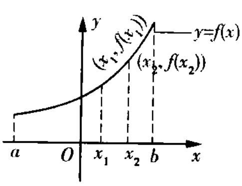


图 1-12

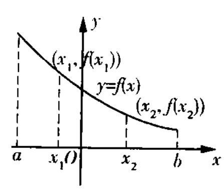


图 1-13

例 1 讨论 $f(x)=x^3$ 的单调性。

解 $f(x)=x^3$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，对于任意的 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，$x_1<x_2$，