王后雄学案

教材完全解读

总策划：熊 辉

数学 九年级(上)

配沪科版

丛书主编：王后雄
本册主编：李建新

导航丛书系列

中国青年出版社

王后雄学案

教材完全解读

数学 九年级(上)

配沪科版

丛书主编：王后雄
本册主编：李建新
编 委：毕 磊 胡明高 李国文 舒中友 王 飞 陈汉波 汪早香 周 宇 胡桂安 余俊峰 龙育莲 胡红兵 余志华 龙 燕 李先枝 王德珍

X导航 丛书系列

中国青年出版社

（京）新登字083号

图书在版编目（CIP）数据

教材完全解读：沪科版. 九年级数学. 上/王后雄主编.
—北京：中国青年出版社，2008
ISBN 978-7-5006-8176-2

Ⅰ.教… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第059757号

策　　划：熊　辉
责任编辑：李　扬
封面设计：蔚　蓝

教材完全解读
数学　九年级（上）　配沪科版

中国青年出版社 出版发行
社址：北京东四12条21号　邮政编码：100708
网址：www.cyp.com.cn
编辑部电话：（010）64034328
读者服务热线：（027）61883306
咸宁市国宾印务有限公司印制　新华书店经销
889 × 1194　1/16　10印张　264千字
2008年6月北京第1版　2008年6月湖北第1次印刷
印数：1—5000册
定价：17.30元
本书如有任何印装质量问题，请与承印厂联系调换
联系电话：（027）61883355

教材完全解读

本书特点

基础教育新课标改革已如火如荼地展开，新课程教材助学助考的开发问题已成为人们关注的焦点。应广大读者的要求，我们特邀来自国家新课程改革试验区和国家级培训班的专家编写课标版《教材完全解读》丛书。该系列丛书能帮助学生掌握新的课程标准，让学生能够按照课程理念和教材学习目标要求科学、高效地学习。该书以“透析全解、双栏对照、服务学生”为宗旨，助您走向成功。

这套丛书在整体设计上有两个突出的特点：一是双栏对照，对教材全解全析，在学科层次上力求讲深、讲透、讲出特色；另一个就是注重典型案例学习，突出鲜活、典型和示范的特点。

为了让您更充分地理解本书的特点，挑战学习的极限，请您在选购和使用本书时，先阅读本书的使用方法图示。

3层完全解读

从知识、方法、思维三个方面诠释教材知识点和方法点，帮您形成答题要点、解题思维，理清解题思路、揭示考点实质和内涵。

[illegible]训练方法

针对本节重点、难点、考点及考试能力达标所设计的题目。题目难度适中，是形成能力、考试取得高分的必经阶梯。

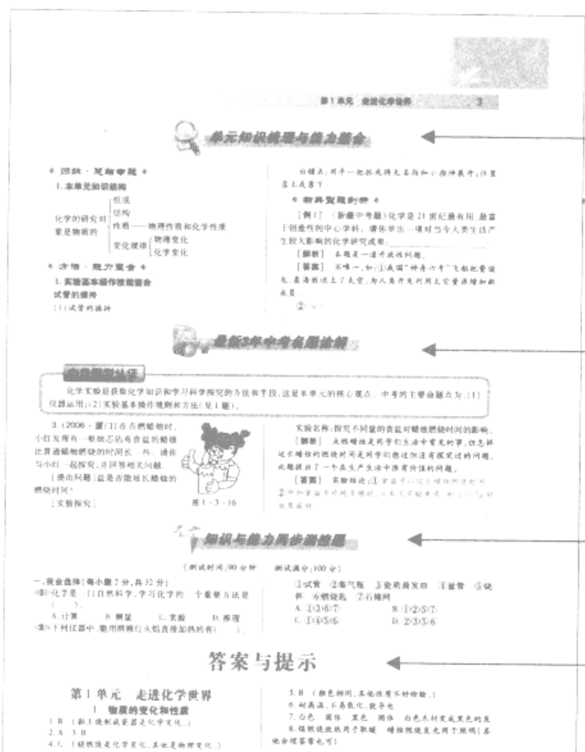
对每道题目标明能力层级，用A、B、C表示试题的难度系数，它们依次代表基础题、中难题、难题。

[illegible]错因导引

“点击考点”栏目导引每一道试题的“测试要点”。当您解题出错时，建议您通过“测试要点”的指向，弄清致错原因，形成正确答案。

教辅大师王后雄教授、特级教师科学超前的体例设置，帮您赢得了学习起点，成就您人生的夙愿。

——题记


第1单元 走进化学世界 3

单元知识梳理与能力整合

最新3年中考名题诠解

知识与能力同步测控题

答案与提示

第1单元 走进化学世界

单元知识整合

单元知识与方法网络化，帮助您将本单元所学教材内容系统化，形成对考点知识二次提炼与升华，全面提高学习效率。

最新3年中考名题诠解

汇集中考名题，讲解细致入微，教纲、考纲，双向例释；练习、考试，讲解透彻；多学、精练，效果显著。

考试高分保障

精心选编涵盖本章节或阶段性知识和能力要求的检测试题，梯度合理、层次分明，与同步考试接轨，利于您同步自我测评，查缺补漏。

点拨解题思路

试题皆提供详细的解题步骤和思路点拨，鼓励一题多解。不但知其然，且知其所以然，帮助您养成良好规范的答题习惯。

X导航丛书系列最新教辅

讲《中考完全解读》 复习讲解——紧扼中考的脉搏

练《中考完全学案》 难点突破——挑战思维的极限

《中考完全学案》

《高考完全学案》

讲《高考完全解读》 精湛解析——把握高考的方向

练《高考完全学案》 阶段测试——进入实战的演练

讲《教材完全解读》 细致讲解——汲取教材的精髓

例《课标导航基础知识手册》透析题型——掌握知识的法宝

练《教材完全学案》 夯实基础——奠定能力的基石

伴随着新的课程标准问世及新版教材的推广，经过多年的锤炼与优化，数次的修订与改版，如今的“X导航”丛书系列以精益求精的质量、独具匠心的创意，已成为备受广大读者青睐的品牌图书。今天，我们已形成了高效、实用的同步练习与应试复习丛书体系，如果您能结合自身的实际情况配套使用，一定能取得立竿见影的效果。

目录

知识与方法
阅读索引

第23章　二次函数与反比例函数

第24章　相似形

第25章 解直角三角形

编者寄语

——怎样学好九年级数学(上)

进入了九年级,就意味着中考即将来临,那么如何学好九年级数学,走进中考?本册内容在整个初中数学中占有重要的位置,因为它是七、八年级两个学年内容的深化和总结,故在各地的中考试题中都占有十分重要的地位.对于同学们来说,关键是要做好以下几点:

1. 努力夯实基础知识

基础知识、基本技能、基本方法的考查构成了试题的主干.学习时应做到:了解知识产生及形成的过程,掌握重点知识,能灵活应用,并对课本例、习题能变式进行引申研究.要善于归纳总结各知识点之间的内在联系.《教材完全解读》详细解读了课本中的知识点,在讲解时采用了左栏归纳、升华知识点、右栏例题讲解、诠释的方式.所选的例题是非常典型的,它们对理解一些性质、结论以及做好习题有很大的帮助,所以,要深入理解、仔细研究例题,从中总结出解题方法和规律.

2. 善于构建学习模型

中考数学命题越来越注重考查学生的应用意识,这些应用试题以富有趣味、立意新颖的背景将数学知识融汇到实际生活中,成为中考的一个亮点.但这些应用试题却成为学生的学习难点,因此,你要耐心的读题、审题,准确地吸收题中的信息进行加工、提炼,转化为数学问题,从而准确求解.二次函数作为一种重要的数学模型,在解决实际问题的过程中有着重要的应用.

3. 注重探究性学习

中考试题中,跨学科综合性的题目也越来越受关注,你要进行探究性的自主学习.逐步培养自己的探索、创新能力.在平时解答数学题时,注意收集新的信息进行加工、提炼,转化为数学问题,从而准确求解.运用二次函数、反比例函数知识探索解答物理和化学中的问题,运用相似、解直角三角形的知识探究实际生活生产中的测量问题.

4. 领悟数学思想方法

数学思想和方法是数学的生命和灵魂,这也是同学们学习数学的一个重要目的.二次函数的解析式和图象之间的密切联系是数形结合思想的典型代表,二次函数和一元二次方程、一元二次不等式的联系和转化都体现了转化的思想方法.在学习二次函数的知识时,要注意与一次函数的学习相联系.相似部分的内容要注意通过生活中的实例来研究,并把实际问题转化为用三角形的相似来解决的数学问题,并注意方程思想的运用.通过对位似变换的探究,知道相似与轴对称、平移、旋转一样,也是图形之间的一种变换,学习本章时,要注意把新旧知识进行类比并及时归纳总结,锐角三角函数的知识及其应用对培养同学们的数形结合思想有很大的帮助,解直角三角形的应用题一般都要转化为在直角三角形中求解.在本章的学习中,要注意综合运用三角形的勾股定理与边角关系解决简单的实际问题.

这本《教材完全解读》在思路上与老师讲课的思路基本一致,并且记载了老师讲课时的经典内容.其次,在课本要求的基础上,还对各个内容进行提高和升华,同学们只要仔细地品味这本书的内容,加强以上四个方面能力的培养,学习时注意探究归纳与合作交流,用数学的思想方法来充实自己的头脑,并会用学过的知识解决实际问题,在以后的学习中就会取得更大的进步,你们的数学成绩一定会提高,到中考时会取得理想的成绩.不信,试试看.

第23章 二次函数与反比例函数

课标单元知识

1. 教材知识解读

(1)本章主要内容包括二次函数的概念、二次函数的图象及性质、二次函数与一元二次方程、二次函数的应用及反比例函数.

(2)要注意二次函数与一元二次方程、一元二次不等式的联系和相互转化,以便对二次函数知识有一个全面、完整的了解和认识.

(3)要注意对二次函数的顶点坐标$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$,对称轴$x=-\frac{b}{2a}$和最值公式$\frac{4ac-b^2}{4a}$的理解、记忆以及正确、灵活地运用.尤其是在求二次函数的"最值"时,不仅要考虑二次函数的性质,还要考虑自变量的取值范围,防止出现求出的"最值"对应的自变量无意义的错误.

(4)要注意对反比例函数性质的理解,由于反比例函数的自变量$x\neq0$,所以反比例函数的增减性是在各自的象限内增大或减小.

(5)本章内容的重点是二次函数和反比例函数的图象和性质,它们是学好本章的关键.难点是把实际问题抽象成二次函数和反比例函数模型问题,从而解决生产和生活中的实际问题.

2. 考试说明要求

(1)通过建立二次函数和反比例函数模型,理解二次函数和反比例函数的意义.

(2)掌握二次函数和反比例函数的图象和性质,并能准确、灵活地应用其解题.

(3)掌握二次函数的三种不同形式:一般式、顶点式、交点式.会利用待定系数法根据所给条件求出二次函数和反比例函数的关系式.

(4)会用配方法确定二次函数图象的顶点和对称轴,掌握求二次函数最大值和最小值的方法.

(5)理解二次函数与一元二次方程、一元二次不等式的关系,熟练掌握二次函数图象与x轴交点情况和一元二次方程根的判别式b^2-4ac之间的关系,会利用二次函数图象求一元二次方程根的近似值及解一元二次不等式.

(6)理解变量之间的依赖关系,体会建立函数模型对解决实际问题的有效性,会求实际问题的函数关系式,并利用函数关系式解决实际问题,特别是函数的"最值"问题.

3. 学习方法导航

(1)在学习本章的过程中,不要死记硬背,要运用观察、比较的方法及数形结合思想,熟练画出抛物线和双曲线的草图,结合图象来研究二次函数的性质及不同图象之间的相互关系,由简单的二次函数$y=ax^2(a\neq0)$开始,总结、归纳其性质,然后逐步扩展到$y=ax^2+k$和$y=a(x-h)^2$,直到$y=ax^2+bx+c$,最后总结出一般规律,符合从特殊到一般、从易到难的认识规律,降低了学习难度.

(2)在研究抛物线及双曲线的画法时,要特别注意抛物线及双曲线的轴对称性和中心对称性,画抛物线列表时,自变量x的选取应以对称轴为界进行对称选取,画双曲线列表时,自变量x的选取应以原点O为中心进行对称选取.要结合图象理解并掌握函数的主要特征.

(3)有关一元二次方程与一次函数的知识是学习二次函数内容的基础,通过观察、操作、思考、交流、探索,加深对教材的理解.

(4)在学习本章时,要深刻理解两种思想和两种方法,两种思想指的是函数思想和数形结合思想,两种方法指的是待定系数法和配方法,在学习过程中,对数学思想和方法要认真总结和积累经验.

中考命题趋向

近几年来,全国各省市的中考命题中,考查二次函数、反比例函数及相关内容所占比例为15%~20%,考查既有基础题,又有综合题.基础题常以填空题、选择题的形式出现,考查二次函数及反比例函数的意义、性质等知识点;综合题常与方程、一次函数、全等形、解直角三角形、相似形、圆等知识结合在一起.同时,在中考中,考查学生利用二次函数和反比例函数知识解决实际问题的考题出现的频率越来越高.在今后的中考中,利用二次函数和反比例函数的图象和性质解决实际问题将会成为中考命题热点之一.

23.1 二次函数

学习目标·考纲解读

(1)二次函数的概念(B. 理解;C. 掌握);(2)用二次函数定义判断二次函数(D. 应用);(3)二次函数与实际的关系(B. 理解);(4)求简单二次函数的表达式(D. 应用);(5)二次函数自变量的取值范围,特别是实际问题中自变量的取值范围(B. 理解).

1 知识·能力聚焦

1. 二次函数的概念

一般的,形如 $y=ax^2+bx+c$(a、b、c 是常数,$a\neq0$)的函数,叫做二次函数(quadratic function).其中,x 是自变量,a、b、c 分别是函数表达式的二次项系数、一次项系数和常数项.

这里特别应该注意:

(1)任何一个二次函数的关系式,都可以通过适当的变形转化为 $y=ax^2+bx+c$(a、b、c 是常数,$a\neq0$)的形式,因此,我们把 $y=ax^2+bx+c$(a、b、c 是常数,$a\neq0$)叫做二次函数的一般式.

(2)自变量的最高次数必须是2,也就是说 $y=ax^2+bx+c$ 中,$a\neq0$,而 b、c 可以为0.

(3)含自变量的代数式是整式,而不是分式或根式.

(4)二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 中自变量 x 的取值范围是全体实数,但在实际问题中,自变量的取值范围应使实际问题有意义.

(5)二次函数 $y=ax^2+bx+c$(a、b、c 是常数,$a\neq0$)的结构特征是:等号左边是函数 y,等号右边是关于 x 的二次多项式.

2 方法·技巧平台

2. 判断函数是否为二次函数的方法

判断一个函数是否为二次函数,关键是两点:

(1)含有1个自变量,且自变量的最高次数为2.

(2)二次项系数不等于0.

若能满足上述两个条件,这个函数就是二次函数,否则就不是二次函数.

具体操作时,可以将函数进行去分母、去括号、移项、合并同类项等变形,如能转化为一般式 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$,那么,它就是二次函数,否则,它就不是二次函数.

名师诠释

[考题1] (2007·江苏)如果函数 $y=(m-3)x^{m^2-3m+2}+mx+1$ 是二次函数,求 m 的值.

[解析] 根据二次函数的定义,需同时满足 $m^2-3m+2=2$,$m-3\neq0$ 两个条件时,$y=(m-3)x^{m^2-3m+2}+mx+1$ 才是二次函数.

[答案] 解:根据题意,得 $\begin{cases}m^2-3m+2=2,\\ m-3\neq0.\end{cases}$ 解得 $m=0$.

[点评] $y=ax^2+bx+c$ 是二次函数的条件是 $a\neq0$,自变量 x 最高指数是2.

[考题2] 指出下列函数中,哪些是二次函数,哪些不是二次函数.

(1)$y=(x+2)^2-x^2$;(2)$y=\frac{1}{2}x(x-3)$;(3)$y=3x+5$;

(4)$y=-\frac{1}{3x^2}$;(5)$y=\sqrt{3x^2-2x+1}$;(6)$y=2x-\frac{3}{4}x^2+7$.

[解析] 紧扣二次函数的定义去判断.(1)右边整理后为一次二项式;(2)右边整理后为二次二项式;(3)右边为一次二项式;(4)$-\frac{1}{3x^2}$ 是分式;(5)$\sqrt{3x^2-2x+1}$ 是无理式;(6)右边是二次三项式.

[答案] (2)(6)是二次函数;(1)(3)(4)(5)不是二次函数.

[考题3] 如图23-1-1所示,有长为24m的篱笆,一边利用墙(墙的最大可用长度 a 为10m),围成中间隔有一道篱笆的长方形花圃.设花圃的宽 AB 为 xm,面积为 Sm^2.

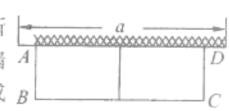


图 23-1-1

(1)求 S 与 x 的函数关系式;

(2)如果要围成面积为 45m^2 的花圃,AB 的长应是多少米?

[解析] 第(1)问由图形可知花圃的宽为 $AB=x$m,长 BC 为 $(24-3x)$m,则 S 与 x 的函数关系式不难求解出;第(2)问可利用 S 与 x 的函数关系式来解答.

3. 实际问题中建立二次函数关系式的步骤

在实际问题中，建立二次函数关系式，一般分为三步：

（1）认真审题，弄清题意，找出实际问题中的已知量和未知量，并分析它们之间的关系；

（2）根据实际问题中的等量关系，建立二次函数关系式；

（3）联系实际，确定自变量的取值范围.

4. 利用二次函数的关系式进行简单的计算

根据二次函数的关系式 $y=ax^2+bx+c$（a、b、c 为常数，$a\neq0$），当 a、b、c 一定时，可以根据自变量 x 的值求出函数 y 的值，也可以根据 y 的值列一元二次方程求出 x 的值，还可根据定义求字母取值.

3 创新·思维拓展

5. 二次函数的分类与特征

二次函数 $y=ax^2+bx+c$（a、b、c 是常数，$a\neq0$）中，x、y 是变量，a、b、c 是常量. 自变量 x 的取值范围是全体实数，b 和 c 可以是任意实数，但 a 必须是不等于 0 的数. 因为 $a=0$ 时，$y=ax^2+bx+c$ 就变成 $y=bx+c$. 若 $b\neq0$ 时，则 $y=bx+c$ 是一次函数；若 $b=0$ 时，则有 $y=c$. 这是一个常量函数.

$y=ax^2(a\neq0)$，$y=ax^2+bx(a\neq0)$ 和 $y=ax^2+c(a\neq0)$ 都是二次函数. 其中 $y=ax^2(a\neq0)$ 是最简单的二次函数.

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有密切关系，如果将变量 y 换成一个常数，那么这个二次函数就变成 1 个一元二次方程了.

［答案］ 解：（1）设宽 $AB=x$m，则 $BC=(24-3x)$m，此时面积 $S=x\cdot(24-3x)=-3x^2+24x$.

（2）由条件得 $-3x^2+24x=45$，

化为 $x^2-8x+15=0$，解得 $x_1=5$，$x_2=3$.

$\because 0<24-3x\leqslant10$，得 $\frac{14}{3}\leqslant x<8$，

$\therefore x_2=3$ 不符合题意，故 $AB=5$，即花圃的宽为 5m.

［点评］ 在二次函数的实际应用问题中，一定要考虑自变量 x 的取值范围，以免发生错误.

［考题 4］ 已知函数 $y=(m^2-m)x^2+mx+(m+1)$（m 是常数）. 当 m 为何值时，

（1）函数是一次函数；（2）函数是二次函数.

［解析］ 此函数是一次函数还是二次函数，由 $(m^2-m)x^2+mx+(m+1)$ 的一次项系数和二次项系数决定，$m^2-m=0$ 且 $m\neq0$ 时，它是一次函数；$m^2-m\neq0$ 时，它是二次函数.

［答案］ 解：（1）$\begin{cases}m^2-m=0,\\ m\neq0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m_1=0, m_2=1,\\ m\neq0.\end{cases}$

$\therefore m=1$.

即当 $m=1$ 时，函数 $y=(m^2-m)x^2+mx+(m+1)$ 是一次函数.

（2）$m^2-m\neq0$，即 $m\neq0$ 且 $m\neq1$.

$\therefore$ 当 $m\neq0$ 且 $m\neq1$ 时，函数 $y=(m^2-m)x^2+mx+(m+1)$ 是二次函数.

［点评］ 确定函数的类型，不能只看自变量的次数，还应看一看自变量的系数. 如：二次项系数 $m^2-m=0$ 时，若一次项系数 $m=0$，则此函数既不是二次函数也不是一次函数.

4 能力·题型设计

点击考点

1A 二次函数 $y=-2x^2-x+3$ 中，二次项的系数为______，一次项的系数为______，常数项为______. （测试要点 1）

2A 把函数 $y=(1-x)(2+x)$ 化成一般式是______. （测试要点 3）

3A 下列函数是二次函数的为（　　）. （测试要点 1）

A. $y=2x^2+9$　　B. $y=mx^2+2x-1$

C. $y=2x^2+\frac{1}{x}+1$　　D. $y=\frac{1}{x^2}$

4A 在二次函数 $y=(a-1)x^2+x-2$ 中，a 的取值范围为______. （测试要点 1,2）

5A 如图 23－1－2 所示，在直径为 20cm 的圆形铁片中，挖去了四个半径都为 $x$cm 的圆，剩余部分的面积为 $y$cm²，则 y 与 x 间的函数关系式为（　　）. （测试要点 4,5）

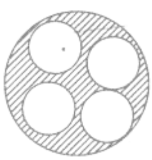


图 23－1－2

A. $y=400\pi-4\pi x^2$　　B. $y=100\pi-2\pi x^2$

C. $y=100\pi-4\pi x^2$　　D. $y=200\pi-2\pi x^2$

6A 一台机器原价 60 万元，每次降价的百分率均为 x，那么连续两次降价后的价格 y（万元）为（　　）. （测试要点 1）

A. $y=60(1-x)$　　B. $y=60(1+x)$

C. $y=60(1-x)^2$　　D. $y=60(1+x)^2$

7A 在一定条件下，若物体运动的路程 s（米）与时间 t（秒）的关系式为 $s=5t^2+2t$，则当 $t=4$ 秒时，该物体所经过的路程为（　　）. （测试要点 4,5）

A. 28 米　B. 48 米　C. 68 米　D. 88 米

8B 生产季节性产品的企业，当它的产品无利润时就会及时停产. 现有一生产季节性产品的企业，其一年中获得的利润 y 和月份 n 之间的函数关系式为 $y=-n^2+14n-24$，则该企业一年中应停产的月份是（　　）. （测试要点 3）

A. 1 月、2 月、3 月　　B. 2 月、3 月、4 月

C. 1 月、2 月、12 月　　D. 1 月、11 月、12 月

9A 如果函数 $y=(k-3)x^{k^2-3k+2}+kx+1$ 是二次函数，则 k 的值为(　　).

A. 0　　B. 0 或 3　　C. 3　　D. 不能确定

10B 用一根长为 40cm 的铁丝围成一个半径为 r 的扇形，则扇形的面积 S 与它的半径 r 之间的函数关系式为________，半径 r 的取值范围为________.

11A 农村常需要搭建截面为半圆形的全封闭蔬菜塑料暖房(如图 23－1－3)，则需塑料布 $y(\mathrm{m})^2$ 与半径 $R(\mathrm{m})$ 的函数关系式是______(不考虑塑料埋在土里的部分).

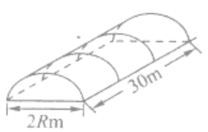


图 23－1－3

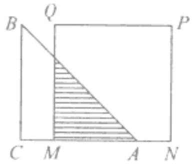


图 23－1－4

12B 如图 23－1－4，已知等腰直角 $\triangle ABC$ 的直角边长与正方形 $MNPQ$ 的边长均为 20 厘米，AC 与 MN 在同一直线上，开始时点 A 与点 N 重合，让 $\triangle ABC$ 以每秒 2 厘米的速度向左运动，最终点 A 与点 M 重合，则重叠部分面积 y(厘米^2)与时间 t(秒)之间的函数关系式为________.

13B 用一根 6m 长的铝合金材料，做一个可分成上下两部分的矩形窗框(如图 23－1－5)，设其面积为 y(m^2)，宽为 x(m).

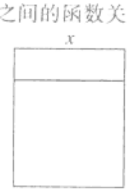


图 23－1－5

(1)求 y 与 x 之间的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围；

(2)求当宽为 1m 时，这个窗框的面积.

14B 如图 23－1－6，已知正方形的边长为 $\sqrt{2}$，在 BO 上有一动点 K(不与 B、O 重合)，过 K 作 $PQ\parallel AC$，分别交正方形的 AB、BC 两边于点 P、Q，设 $BK=x$，$S_{\triangle BPQ}=y$.

(1)求 y 与 x 的函数关系式；

(2)当 $\triangle PBQ$ 的面积为 $\frac{1}{4}$ 时，求 AP 的长.

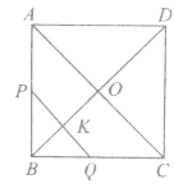


图 23－1－6

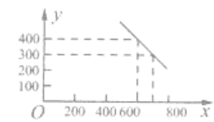


图 23－1－7

15C 某公司试销一种成本单价为 500 元/件的新产品，规定试销时的销售单价不低于成本单价，又不高于 800 元/件. 经试销发现：销售量 y(件)与销售单价 x(元/件)之间的关系可近似看作一次函数 $y=kx+b$(如图 23－1－7 所示).

(1)根据图象，求一次函数的解析式；

(2)设公司获得的毛利润(毛利润＝销售总价－成本总价)为 S 元，试写出 S 与 x 之间的函数关系式.

16C 一家用电器开发公司研制出一种新型电子产品，每件的生产成本为 18 元，按定价 40 元出售，每月可销售 20 万件. 为了增加销售量，公司决定采取降价的办法，经市场调研，每降价 1 元，月销售量可增加 2 万件.

(1)求出月销售量 y(万件)与销售单价 x(元)之间的函数关系式(不必写 x 的取值范围)；

(2)求出月销售利润 z(万元)(利润＝售价－成本价)与销售单价 x(元)之间的函数关系式(不必写 x 的取值范围).

17C 已知关于 x 的函数 $y=(m+1)x^{m^2-m}-3x+2$，当 m 为何值时函数满足下列关系

(1)一次函数；

(2)二次函数.

点击考点

测试要点 1

测试要点 3

测试要点 3

测试要点 3

测试要点 3
2007·四川眉山

测试要点 3
2006·山东聊城

测试要点 3

测试要点 5

测试要点 3

教材课后习题解答

[第 5 页练习]

1. (1) $2\pi r$　正比例　(2) πr^2　二次

2. 解：(2)(3)(4)是二次函数.

[第 6 页习题 23.1]

1. 解：$y=3x^2-1$，$y=5x^2-2x$，$y=-2x^2+x-1$ 是二次函数.

2. 解：$S=\pi R^2-\pi r^2=-\pi r^2+\pi R^2(0<r<R)$.

3. 解：$S=2(x^2+8x+8x)=2x^2+32x(x>0)$.

4. 解：$y=(5+x)^2-5^2=x^2+10x(x\geqslant 0)$.

5. 解：$y=(35-2x)(20-2x)=4x^2-110x+700$，由小路的宽度以及花坛的长、宽均为正数可得 $\begin{cases}x>0,\\35-2x>0,\\20-2x>0.\end{cases}$ 解得 $0<x<10$.

23.2 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

学习目标·考纲解读

(1)用描点法画函数 $y=ax^2$ 的图象(C.掌握);(2)抛物线的有关概念(B.理解);(3)二次函数 $y=ax^2$ 的图象及其性质(C.掌握);(4)认识用函数图象来研究函数性质的优越性(B.理解);(5)数形结合的作用和意义(B.理解).

1 知识·能力聚焦

1. 抛物线的有关概念

一次函数的图象是一条直线,二次函数的图象是抛物线.

二次函数 $y=ax^2$ 的图象是一条关于 y 轴对称的曲线,这条曲线叫做抛物线.对称轴与抛物线的交点叫做抛物线的顶点.

特征:(1)该抛物线是轴对称图形,其对称轴是 y 轴.例如:平行于 x 轴的直线 l 交抛物线于 A、B,由对称性可知:A、B 两点关于 y 轴对称,即线段 AB 的垂直平分线就是 y 轴.如图 23-2-1 所示.

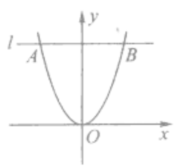


图 23-2-1

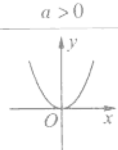
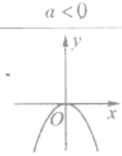
(2)由于二次函数 $y=ax^2$ 的图象是抛物线,故也叙述为抛物线 $y=ax^2$.

(3)二次函数 $y=ax^2$ 中隐含了一个重要条件 $a\neq0$.

(4)由于抛物线 $y=ax^2$ 与对称轴的交点,有且只有1个,故抛物线的顶点只有1个,因为 y 轴上点的横坐标为0,故 $y=ax^2$ 的顶点横坐标为0.当 $x=0$ 时,$y=a\cdot0^2=0$,所以抛物线 $y=ax^2$ 的顶点坐标为(0,0),即坐标原点.

(5)抛物线的主要特征:开口方向、对称轴、顶点.

2. 抛物线 $y=ax^2$ 的图象及性质

$y=ax^2(a\neq0)$	$a>0$	$a<0$
图象		
开口方向	向上	向下
顶点坐标	(0,0)	(0,0)
对称轴	y 轴	y 轴
增减性	当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而增大;当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而减小	当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而减小;当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而增大
最大(小)值	$x=0$ 时,$y_{最小}=0$	$x=0$ 时,$y_{最大}=0$

名师诠释

[考题1] 用描点法作出二次函数 $y=2x^2$ 的图象,并利用已有图象作出二次函数 $y=-2x^2$ 的图象.结合图象说明它们各自的性质及相互关系.

[解析] 通过列表、描点、连线画出其图象,再结合图象回答有关问题.

[答案] (1)在自变量 x 的取值范围内取一些值,并算出对应的 y 值,列表如下:

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=2x^2$	…	18	8	2	0	2	8	18	…

根据上表中 x,y 的数值在坐标系中描点(x,y)

(2)用平滑的曲线顺次连接各点,即得到二次函数 $y=2x^2$ 的图象,如图 23-2-2所示.

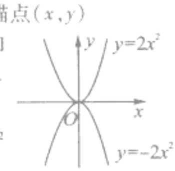


图 23-2-2

二次函数 $y=-2x^2$ 的图象与 $y=2x^2$ 的图象关于 x 轴对称,由对称性知 $y=-2x^2$的图象.抛物线 $y=2x^2$ 开口向上,关于 y 轴对称.当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而增大;当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而减小;当 $x=0$ 时,y 有最小值0,图象有最低点(0,0);抛物线 $y=-2x^2$ 开口向下,关于 y 轴对称.当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而减小;当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而增大;当 $x=0$时,y 有最大值0.抛物线 $y=-2x^2$ 与抛物线 $y=2x^2$ 形状相同,仅开口方向不同,它们关于 x 轴对称.

[点评] 画抛物线一定要注意图象的对称性,x 在对称轴左、右两边对称地取值.

[考题2] 已知函数 $y=(m+2)x^{m^2+2m-6}$是关于 x 的二次函数.

(1)求 m 的值;

(2)当 m 为何值时,此函数图象的顶点为最低点;

(3)当 m 为何值时,此函数图象的顶点为最高点.

[解析] 抓住二次函数的特征:$a=(m+2)\neq0$,$m^2+2m-6=2$,可求 m 的值,再由 a 的性质决定抛物线的最高点和最低点时 m 的值.

[答案] 解:(1)$\begin{cases}m+2\neq0,\\m^2+2m-6=2,\end{cases}$解得 $m_1=2$,$m_2=-4$.

3. 抛物线 $y=ax^2$ 中常数 a 的地位和作用

(1)抛物线 $y=ax^2$ 的开口的大小由$|a|$决定，$|a|$越大，抛物线的开口越窄；$|a|$越小，抛物线的开口越宽.

(2)在几条抛物线的函数式中，若$|a|$相等，则其形状相同，即若 a 相等，则开口方向及形状相同；若 a 互为相反数，则形状相同，开口方向相反.

2 方法·技巧平台

4. 二次函数 $y=ax^2$ 的图象的画法

(1)列表：为了便于计算和描点，一般以 O 为中心选取自变量 x 的整数值，y 也相应的是整数(至少为五组数).

(2)描点：把自变量 x 与函数 y 的每组对应值分别作为点的横坐标与纵坐标，在平面直角坐标系内找出对应的点.

(3)连线：用平滑的曲线(按自变量由小到大的顺序)连接各点.

注意：①画图时图象应越过端点，表示向上或向下无限延伸；②作图象时应注意在两个象限内画出的曲线是对称的；③顶点不能画成尖形，而应平滑；④"顺序"是指自变量从小到大的顺序(或从左到右).

5. 确定抛物线 $y=ax^2$ 的表达式的方法

(1)用待定系数法，列方程求 $y=ax^2$ 的表达式.

在抛物线 $y=ax^2$ 中只有一个待定系数 a，因此，只要已知抛物线上的一个点的坐标，将这个点的坐标代入 $y=ax^2$ 中就可以求出 a 的值，从而得到抛物线 $y=ax^2$ 的表达式.

(2)在实际问题中，应根据题设条件中的等量关系建立二次函数的表达式.

3 创新·思维拓展

6. 直线与抛物线的交点

两函数图象相交，就是说两图象都经过某一点，也就意味着该点的横、纵坐标代入两函数的表达式中都成立，所以，两表达式组成的方程组的解就是其图象的交点的横、纵坐标. 求直线与抛物线的交点，解直线与抛物线两表达式组成的方程组就可得到.

例如，求函数 $y=x-2$ 与函数 $y=-x^2$ 的图象的交点坐标.

解：由两个函数组成的方程组 $\begin{cases}y=x-2,\\y=-x^2.\end{cases}$

(2)若函数图象有最低点，则 $y=ax^2$ 中 $a>0$.

即 $\begin{cases}m+2>0,\\m^2+2m-6=2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m>-2,\\m_1=2,m_2=-4.\end{cases}$ $\therefore m=2$.

(3)若函数图象有最高点，则 $y=ax^2$ 中 $a<0$.

即 $\begin{cases}m+2<0,\\m^2+2m-6=2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m<-2,\\m_1=2,m_2=-4.\end{cases}$ $\therefore m=-4$.

[点评]　在抛物线 $y=ax^2$ 中，若开口向上，则 $a>0$，图象有最低点；若开口向下，则 $a<0$，图象有最高点. 反之，若图象有最低点，则开口向上，$a>0$；若图象有最高点，则开口向下，$a<0$.

[考题3]　如图23-2-3所示为三条抛物线 $c_1: y=3x^2$，$c_2: y=(1-k)x^2$，$c_3: y=(k-2)x^2$ 的图象，则 k 的取值范围是________.

[解析]　此题涉及开口向上和开口向下的两类抛物线，首先应将它们转化成同一类(即开口都向上或都向下). 这样便于比较. 易求出 c_1 关于 x 轴对称的抛物线为 $y=-3x^2$，它的开口最小. 当 $a<0$时，抛物线的开口越大，a 值越大. 从而可建立关于 k 的不等式组，求出不等式组的解集.

依题意知：

$$\begin{cases}-3<k-2<1-k,\\1-k<0,\\k-2<0.\end{cases}$$

由 $k-2<1-k$ 得，$k<\frac{3}{2}$，　①

由 $-3<k-2$ 得，$k>-1$，　②

由 $-3<1-k$ 得，$k<4$，　③

由 $1-k<0$ 得，$k>1$，　④

由 $k-2<0$ 得，$k<2$，　⑤

综合①②③④⑤得，$1<k<\frac{3}{2}$，

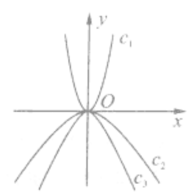


图 23-2-3

[答案]　$1<k<\frac{3}{2}$

[考题4]　已知抛物线 $y=ax^2$ 经过点$(1,-1)$，求 $y=-4$ 时，x 的值.

[解析]　把点$(1,-1)$的坐标代入 $y=ax^2$，求得 a 值，得到二次函数表达式，再把 $y=-4$ 代入已求得的表达式中，即可求得 x 的值.

[答案]　解：$\because$ 点$(1,-1)$在抛物线 $y=ax^2$ 上，$\therefore -1=a\cdot 1^2$，$\therefore a=-1$. $\therefore$ 抛物线为 $y=-x^2$. 当 $y=-4$ 时，有 $-4=-x^2$，$\therefore x=\pm 2$.

[点评]　若图象经过某点，则将点的坐标代入函数表达式中左右两边相等.

[考题5]　已知 $y=-2x+3$ 的图象与 $y=x^2$的图象交于 A、B 两点，O 为坐标原点，求 $S_{\triangle AOB}$.

[解析]　先求出 A、B 两点的坐标，再由点的坐标来求面积.

[答案]　解：$\because y=-2x+3$ 的图象与 $y=x^2$ 的图象相交，$\therefore$ 方程组 $\begin{cases}y=-2x+3,\\y=x^2.\end{cases}$ 有解，

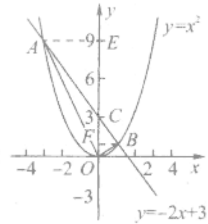


图 23-2-4

解得 $\begin{cases}x_1=-3,\\y_1=9.\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1,\\y_2=1.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_1=-2,\\y_1=-4.\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1,\\y_2=-1.\end{cases}$

∴ 函数 $y=x-2$ 与函数 $y=-x^2$ 的图象有两个交点,它们的坐标分别是$(-2,-4)$、$(1,-1)$.

在解决直线与抛物线的交点问题时,通常将它化为方程组的问题.

∴ $A(-3,9)$,$B(1,1)$.

如图23-2-4所示,设直线 $y=-2x+3$ 与 y 轴交于点 C,则 $C(0,3)$. 过 A 作 $AE\perp y$ 轴于 E,过 B 作 $BF\perp y$ 轴于 F,∴ $AE=3$,$BF=1$,∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}OC\cdot AE+\frac{1}{2}OC\cdot BF=\frac{1}{2}\times3\times3+\frac{1}{2}\times3\times1=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=6$.

4 能力·题型设计

1A 二次函数 $y=2x^2$ 具有下列性质中的( ).

①开口向下;②顶点在原点;③对称轴是 x 轴;④有最高点.

A. ② B. ③ C. ②③ D. ①④

2A 在同一坐标系中,图象与 $y=2x^2$ 的图象关于 x 轴对称的函数为( ).

A. $y=\frac{1}{2}x^2$ B. $y=-\frac{1}{2}x^2$

C. $y=-2x^2$ D. $y=-x^2$

3A 若 $y=(2-m)x^{m^2-3}$ 是二次函数,且图象的开口向上,则 $m=$________;此时当 $x=$________时,y 有最________值.

4A 二次函数的图象如图23-2-5所示,则二次函数的解析式为________. 另一个二次函数的图象与其关于 x 轴对称,则这个二次函数的解析式为________.

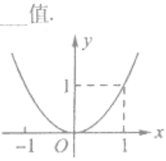


图 23-2-5

5A 若 $A(m,m)$ 在抛物线 $y=x^2$ 上,则 A 点关于抛物线的对称轴对称的 B 点的坐标为________.

6B 若二次函数 $y=ax^2$,当 x 取 x_1、x_2($x_1\neq x_2$)时,函数值相等,则当 x 取 x_1+x_2 时,函数值 $y=$________.

7A 若经过抛物线 $y=ax^2(a\neq0)$ 上一点 $M(-1,a)$ 作平行于 x 轴的一条直线,交抛物线于另一点 N,则点 N 的坐标为________.

8A 如图23-2-6,点 P 是抛物线 $y=x^2$ 上第一象限内的一点,点 A 的坐标为$(4,0)$,设点 P 的坐标为(a,b),则△OPA 的面积 S 与 a 的关系式是________.

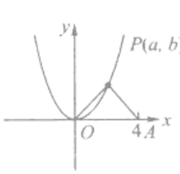


图 23-2-6

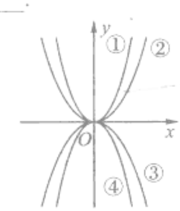


图 23-2-7

点击考点

- 测试要点1,2
- 测试要点3
- 测试要点3
- 测试要点2
- 测试要点1,2
- 测试要点3,5
- 测试要点1
- 测试要点1,2
- 测试要点6
- 测试要点1
- 测试要点4,5
- 测试要点5

9B 如图23-2-7,四个二次函数的图象中,分别对应的是:①$y=ax^2$;②$y=bx^2$;③$y=cx^2$;④$y=dx^2$. 则 a,b,c,d 的大小关系是( ).

A. $a>b>c>d$ B. $a>b>d>c$

C. $b>a>c>d$ D. $b>a>d>c$

10B 函数 $y=ax^2$ 与 $y=ax-3(a\neq0)$ 在同一坐标系内的大致图象(如图23-2-8)是( ).

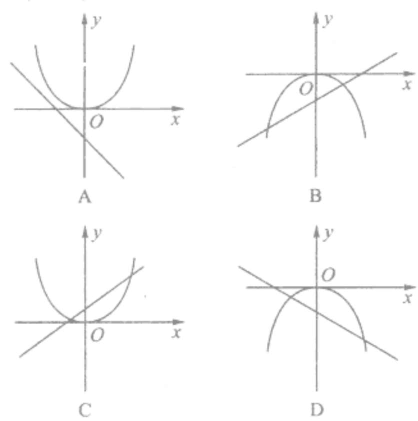


图 23-2-8

11A 在抛物线 $y=x^2$ 上的两点 A 和 B 的横坐标分别是 -1 和 2,则 A、B 两点必在直线( ).

A. $y=2x+2$ B. $y=x+4$

C. $y=-x+2$ D. $y=x+2$

12B 如图23-2-9所示,点 $A(m,n)$ 是一次函数 $y=2x$ 的图象上的任意一点,AB 垂直于 x 轴,垂足为 B,那么△ABO 的面积 S 与 m 的函数关系的图象(如图23-2-10)大致为( ).

图 23-2-9

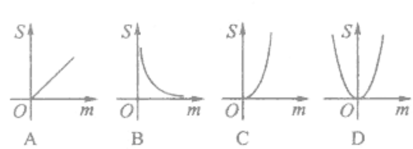


图 23-2-10