最新版

Б.П. 吉米多维奇 数学分析

习题精选精析

主　编　北京大学数学科学学院　张新国
编　写　双博士数学课题组

1

题型涵盖全面
解题思路点津
方法经典独到

科学技术文献出版社

Б. П. 吉米多维奇
数学分析习题精选精析(1)

主　　编　北京大学数学科学学院　张新国
编　　写　双博士数学课题组
编写人员　胡东华　刘　茜　李菊川　刘　英　陈　丰　刘晓龙
熊国平　高永军　狄　懿　逢　伟　李　亮　刘立新
郭　娟　刘治国　杨　军　乔海玲　刘　津　刘大庆
汪　萍　胡星期　刘治佳　张　望　韩　彬　林娟娟
丁　晓　刘楣林　胡在斌　朱　傲　蔡贵娟　王绣英
李利娟　闵　伟　高　睿　李秀红　刘素枚　李　芹
韩　珍　周丽红　温　晴　包凌燕　钟崇光　韩　福
高　鑫　温桂荣　韩　琴　郭海权　史　进　温　军
王鸿发　郭洪杰　徐桂株　徐英杰　刘峥嵘　白春红
褚　峥　孙文涛　伍　鹏　刘　阳　杜　鹃　白春燕
总 策 划　胡东华

Scientific and Technical Documents Publishing House
· 北京 ·

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题精选精析.1/张新国主编.-修订本.-北京:科学技术文献出版社,2008.9

ISBN 978-7-5023-3377-5

Ⅰ.吉… Ⅱ.张… Ⅲ.数学分析-高等学校-解题 Ⅳ.017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 123772 号

出版者	科学技术文献出版社
地址	北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038
图书编务部电话	(010)51501739
图书发行部电话	(010)51501720,(010)51501722(传真)
邮购部电话	(010)51501729
网址	http://www.stdph.com
策划编辑	科 文
责任编辑	丁坤善 杜 娟
责任出版	王杰馨
发行者	科学技术文献出版社发行 全国各地新华书店经销
印刷者	北京高迪印刷有限公司
版(印)次	2008 年 9 月修订版 第 1 次印刷
开本	850×1168 32 开
字数	416 千
印张	10.75
印数	1～5000 册
定价	18.00 元

前　言

自上世纪五十年代初，Б. П. 吉米多维奇所著《数学分析习题集》中译本问世以来，该书对我国从事数学分析教学的广大师生产生了深刻的影响，很多人以解其中习题作为掌握、提高数学分析能力的手段、捷径。事实上，这本习题集也确实起到了这个作用。

同时，我们在教学实践中发现，原习题集收录了四千四百余道习题，数量过多；内容及解题方法重复率高；习题的解法过于拘泥于内容的编排；有些习题对于国内读者来说过于简单，而有些习题的解法又过于繁琐。有鉴于此，我们从中精选了二千三百余道难度适中有代表性的习题，由多年从事《数学分析》教学的作者做出力求较为简洁的解法，以适应广大国内数学分析学习者的需要。本习题集精选出原 Б. П. 吉米多维奇习题集的 4462 道中的 2340 道进行精解精析。编排遵循 Б. П. 吉米多维奇《数学分析习题集》的顺序，即函数与极限、单变量函数的微分学、不定积分、定积分、级数、多变量函数的微分学、带参变量的积分、重积分、曲线积分及曲面积分等。把它们分成三册，这也与国内同类大部分教材内容的顺序相仿。

此次我们在上一版的基础上，采纳广大读者的意见对原书多处解法进行了改进。另外为了帮助读者建立自己的知识结构，我们在每小节前加入了主要知识点的详尽概述。当然，数学分析的学习，做题仅仅是一个方面，关键是培养综合分析能力，数学逻辑思维，目的

是掌握数学分析的精髓。希望该习题集能起到抛砖引玉的效果。

限于作者水平,加之时间仓促,该习题集也许会有不妥之处,恳请热心读者批评指正,以便再版时做得更为完善。

温馨提示:

✽“双博士品牌图书”是全国最大的大学教辅图书和考研图书品牌,全国有三分之一的大学生和考研学生正在使用“双博士品牌图书”。

✽来自北京大学研究生会的感谢信摘要:双博士,您好!……,首先感谢您对北京大学的热情支持和无私帮助!双博士作为大学教学辅导和考研领域全国最大的图书品牌之一,不忘北大莘莘学子和传道授业的老师,其行为将永久被北大师生感怀和铭记!

北京大学研究生会

✽现在市场上有人冒用我们的书名,企图以假乱真,因此,读者在购买时,请认准双博士品牌。

编者

2008年于北京大学

目　录

第一章　分析引论

§1　实数

1. 数学归纳法:

(1) 验证第1项成立

(2) 假设第 K 项成立,查看第 $K+1$ 项也成立,得出结论,即原命题成立

2. 上、下确界:

上确界:设 $X=\{x\}$ 为实数的有界集合. 若:(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式 $x \leqslant M$;

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$,存在有 $x' \in X$,使 $x' > M+\varepsilon$

则数 $M=\sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界

下确界:设 $X=\{x\}$ 为实数的有界集合. 若:(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式 $x \geqslant m$;

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$,存在有 $x'' \in X$,使 $x'' < m+\varepsilon$

则数 $m=\inf\{x\}$ 称为集合 X 的下确界.

3. 绝对值不等式: $||a|-|b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b|$

4. 绝对误差与相对误差

绝对误差 =| 测量值 - 真实值 |

相对误差 =| 绝对误差/真实值 |

利用数学归纳法求证下列等式对任何自然数 n 皆成立:

【1】 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

【思路】 数学归纳法

【证明】 当 $n=1$ 时,左边 = 右边 = 1 故等式成立.

假设当 $n=k$ 时等式成立,即

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2},$$

则当 $n=k+1$ 时,

左边 $=1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=$ 右边,

故当 $n=k+1$ 时等式也成立.

因此,由数学归纳法知,

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\text{ 对于任何自然数 } n \text{ 均成立.}$$

【2】 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

【思路】 数学归纳法

【证明】 当 $n=1$ 时,左边 = 右边 = 1,故等式成立.

假设当 $n=k$ 时等式成立,即

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

则当 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned}\text{左边}&=1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]\\&=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}=\text{右边},\end{aligned}$$

故当 $n=k+1$ 时等式也成立.

因此,由数学归纳法知,

$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 对于任何自然数 n 均成立.

【3】 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

【思路】 数学归纳法

【证明】 当 $n=1$ 时,左边 = 右边 = 1,故等式成立.

假设当 $n=k$ 时等式成立,即

$$1^3+2^3+\cdots+k^3=(1+2+\cdots k)^2,$$

则当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
左边 &= 1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=(1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^3\\
&=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}\\
&=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}\\
&=\left\{\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right\}^2=[1+2+\cdots+(k+1)]^2,
\end{aligned}$$

故当 $n=k+1$ 时等式也成立.

因此,由数学归纳法知,

$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$ 对于任何自然数 n 均成立.

【6】　证明贝努里不等式

$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$,

式中 $x_1,x_2\cdots,x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

【思路】　数学归纳法

【证明】　当 $n=1$ 时,左边 = 右边 = $1+x_1$,故此式等号成立.

假设当 $n=k$ 时不等式成立,即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则当 $n=k+1$ 时,由于 $x_i>-1(i=1,2,\cdots,n)$,所以,$1+x_i>0$. 因而,有

$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})$

$=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1})$

由于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 符号相同,所以,

$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1})\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}$,

故当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

因此,由数学归纳法知,

$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$ 对于任何自然数均成立.

【8】　证明不等式

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\quad 当 n>1.$$

【思路】　数学归纳法

【证明】　当 $n=2$ 时,左边 $=2!=2$

右边 $=\left(\frac{2+1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$. 又 $\frac{9}{4}>2$

故不等式成立.

假设当 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k.$$

则当 $n=k+1$ 时,

$$(k+1)!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k\cdot(k+1)=2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}$$

又 $$\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}=2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}\cdot\frac{(k+2)^{k+1}}{2(k+1)^{k+1}}$$

又 $$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}\cdot\frac{1}{2}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot\frac{1}{2}>1$$

故 $$2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}<\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}$$

所以 $$(k+1)!<\left(\frac{k+1+1}{2}\right)^{k+1}$$

即当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

因此,由数学归纳法知,当 $n>1$ 时不等式

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \text{ 成立.}$$

【10】 证明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

【思路】 数学归纳法

【证明】 当 $n=1$ 时,因为左边 $=\frac{1}{2}$,右边 $=\frac{1}{\sqrt{3}}$,又$\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$,故不等式成立.

假设当 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

则当 $n=k+1$ 时,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

下面证不等式

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}} \text{成立,}$$

即证 $(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2$,

展开得

$$4k^2+8k+3<4k^2+8k+4,$$

因而是成立的. 故可得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即对于 $n=k+1$ 时,不等式也成立.
因此,由数学归纳法知,原不等式成立.

【11】　设 c 为正整数,而不为整数的平方,且 A/B 为确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割,其中 B 类包含所有合于 $b^2>c$ 的正有理数 b,而 A 类包含所有其余的有理数.求证在 A 类中无最大数,而在 B 类中也无最小数.

【思路】　分割的定义.

【证明】　下面只证明在 A 类中无最大数,同法可证在 B 类中无最小数.设 $a\in A$,若 $a\leqslant 0$,则 $\exists a'>0$,使 $a'>a$ 且 $a'\in A$.
若 $a>0$,则 $a^2\leqslant c$,但是假设 $a^2=c$,可设 $a=\dfrac{n}{m}$(m,n 为互质的正整数),则 $c=\dfrac{n^2}{m^2}$,因为 c 是正整数,且 m^2 与 n^2 互质,所以 $m=1$,即 $c=n^2$,这与假设的 $c=a^2$ 矛盾,故 $a^2<c$.

下面证明 $\exists b\in A$,且 $b>a$.

可令 $b=a+\dfrac{1}{n}$,则当 $n>\dfrac{2a+1}{c-a^2}$ 时,

$\dfrac{2a}{n}+\dfrac{1}{n^2}<c-a^2$ 即 $(a+\dfrac{1}{n})^2<c$

故当 $n>\dfrac{2a+1}{c-a^2}$ 时,不论 a 在 A 类取怎样的数,

总存在 $b=a+\dfrac{1}{n}\in A$.且 $b>a$,因此,在 A 类中无最大数.

证毕.

【19】　设 $\{x+y\}$ 为所有 $x+y$ 这些和的集合,其中 $x\in\{x\}$ 及 $y\in\{y\}$.证明等式:

(1) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$;

(2) $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$.

【思路】　上、下确界的定义.

【证明】　(1) 设 $\inf\{x\}=m_1,\inf\{y\}=m_2$,则

$x\geqslant m_1,y\geqslant m_2$ 且 $\forall\varepsilon>0,\exists x'\in\{x\},y'\in\{y\}$,使

$$x'<m_1+\frac{\varepsilon}{2},y'<m_2+\frac{\varepsilon}{2}$$

因此,当 $x+y\in\{x+y\}$ 时,

$x+y\geqslant m_1+m_2$ 且 $\forall\varepsilon>0,\exists x'+y'\in\{x+y\}$,

使

$$x'+y'<(m_1+m_2)+\varepsilon$$

即得　$\inf\{x+y\}=m_1+m_2$

故　$\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$.

(2) 同理可证

$$\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}.$$

【20】　设$\{xy\}$为所有xy乘积的集合,其中$x\in\{x\}$及$y\in\{y\}$,且$x\geqslant 0$及$y\geqslant 0$. 证明等式:

(1) $\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}$;

(2) $\sup\{xy\}=\sup\{x\}\sup\{y\}$.

【思路】　上、下确界的定义

【证明】　设$\inf\{x\}=m_1$,$\inf\{y\}=m_2$,由$x\geqslant 0,y\geqslant 0$知$m_1\geqslant 0,m_2\geqslant 0$,故得

$$x\geqslant m_1\geqslant 0,y\geqslant m_2\geqslant 0\text{且}\forall\varepsilon>0,\exists x'\in\{x\},y'\in\{y\},\text{使}$$
$$0\leqslant x'<m_1+\varepsilon,0\leqslant y'<m_2+\varepsilon$$

因此,当$xy\in\{xy\}$时,

$$xy\geqslant m_1m_2,\text{且}\forall\varepsilon>0,\exists x'y'\in\{xy\},\text{使}$$
$$0\leqslant x'y'<(m_1+\varepsilon)(m_2+\varepsilon)=m_1m_2+(m_1+m_2)\varepsilon+\varepsilon^2$$

即知　$\inf\{xy\}=m_1m_2$,

故证得　$\inf\{x,y\}=\inf\{x\}\cdot\inf\{y\}$.

(2) 同理可证

$$\sup\{xy\}=\sup\{x\}\sup\{y\}.$$

【21】　求证不等式:

(1) $|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$;

(2) $|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$.

【思路】　利用绝对值不等式公式证明.

【证明】　(1) 因为

$$|x-y|\geqslant|x|-|y|,$$

且

$$|x-y|=|y-x|\geqslant|y|-|x|=-(|x|-|y|),$$

所以

$$|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$$

(2) 因为

$$|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-|x_1+\cdots+x_n|,$$

且

$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\geqslant|x_1+x_2+\cdots+x_n|$$

所以

$$|x+x_1+\cdots x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|).$$

解不等式：

【25】 $|2x-1|<|x-1|$.

【思路】 两边平方

【解析】 原不等式可转化为

$$(2x-1)^2<(x-1)^2 \quad 即 \quad 3x^2-2x<0,$$

解得

$$0<x<\frac{2}{3}.$$

【26】 解不等式$|x+2|+|x-2|\leqslant 12$.

【思路】 两边平方

【解析】 对不等式两边平方得

$$2x^2+8+2|x^2-4|\leqslant 144.$$

(1) 当$x^2-4\geqslant 0$时，即$x\geqslant 2$或$x\leqslant -2$时

有　$4x^2\leqslant 144$，得$-6\leqslant x\leqslant 6$.

故$-6\leqslant x\leqslant -2$或$2\leqslant x\leqslant 6$

(2) 当$x^2-4<0$时，即$-2<x<2$.

此时不等式变为$16\leqslant 144$，恒成立.

故此时不等式的解为$-2<x<2$

综上所述原不等式的解为$-6\leqslant x\leqslant 6$.

【27】 $|x+2|-|x|>1$.

【思路】 移项，两边平方

【解析】 $1+|x|<|x+2|$，两端平方并化简得

$$2|x|<4x+3.$$

再平方化简得

$$4x^2+8x+3>0.$$

解得

$$x>-\frac{1}{2} \quad 或 \quad x<-\frac{3}{2}(舍去).$$

故原不等式的解为

$$x>-\frac{1}{2}.$$

【28】 $||x+1|-|x-1||<1$.

【思路】 两边平方

【解析】 两端平方并化简得

$$x^2+\frac{1}{2}<|x^2-1|,$$

即

$$x^2-1>x^2+\frac{1}{2}(\text{舍去})\quad \text{或}\quad x^2-1<-\left(x^2+\frac{1}{2}\right).$$

故由 $x^2-1<-\left(x^2+\frac{1}{2}\right)$解得

$$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}.$$

【30】 证明恒等式

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2.$$

【思路】 计算左端式子

【证明】 $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2$

$$=\frac{1}{4}\{[(x+|x|)+(x-|x|)]^2-2(x+|x|)(x-|x|)\}$$

$$=\frac{1}{4}[4x^2-2(x^2-|x|^2)]$$

$$=x^2.$$

【31】 当测量长度10cm时,绝对误差为0.5mm;当测量距离500km时,绝对误差等于200m.哪种测量较为精确?

【思路】 利用相对误差

$$\delta=\frac{\Delta}{|a|}\text{进行比较.}$$

【解析】 设a为被测量的精确值,Δ是绝对误差,则相对误差为$\delta=\frac{\Delta}{|a|}$,

代入数据得,$\delta_1=\frac{0.5\times0.1}{10}=0.5\%$,

$$\delta_2=\frac{200\times0.001}{500}=0.04\%,$$

因此,第二个测量较为精确.

【34】 矩形的边等于:

$$x=2.50\text{cm}\pm0.01\text{cm},$$

$$y=4.00\text{cm}\pm0.02\text{cm}.$$

这个矩形的面积S界于什么范围内?设其边长取平均值时,矩形面积的绝对误差Δ和相对误差δ为何?

【思路】 绝对误差和相对误差的计算公式

【解析】 矩形面积S的取值范围为$S_1\leqslant S\leqslant S_2$,其中

$S_1 = (2.50 - 0.01)(4.00 - 0.02) = 9.9102(\text{cm}^2)$,

$S_2 = (2.50 + 0.01)(4.00 + 0.02) = 10.0902(\text{cm}^2)$,

边长取平均值时矩形面积 $\bar{S} = 2.50 \times 4.00 = 10(\text{cm}^2)$,

故绝对误差

$\Delta \leqslant \max(\Delta_1, \Delta_2) = \max(10.0902 - 10, 10 - 9.9102) = \max(0.0902, 0.0898) = 0.0902(\text{cm}^2)$,

相对误差 $\delta = \frac{\Delta}{10} \leqslant \frac{0.0902}{10} < 0.91\%$.

【35】　物体的重量 $P = 12.59\text{g} \pm 0.01\text{g}$,其体积 $V = 3.2\text{cm}^3 \pm 0.2\text{cm}^3$. 若对物体的重量和体积都取其平均值,试求物体的比重,并估计比重的绝对误差和相对误差.

【思路】　绝对误差和相对误差的计算公式

【解析】　当物体重量和体积都取平均值时,比重 $C = \frac{12.59}{3.2} = 3.93(\text{g/cm}^3)$.

且比重 C 的取值范围为 $C_1 \leqslant C \leqslant C_2$,其中

$C_1 = \frac{12.60}{3.0} = 4.20(\text{g/cm}^3)$,

$C_2 = \frac{12.58}{3.4} = 3.70(\text{g/cm}^3)$,

故绝对误差 $\Delta \leqslant \max(\Delta_1 \Delta_2) = \max(4.20 - 3.93, 3.93 - 3.70) = \max(0.27, 0.23) = 0.27\text{g/cm}^3$

相对误差 $\delta = \frac{\Delta}{3.93} \leqslant \frac{0.27}{3.93} < 7.3\%$

故物体的比重一般为 $(3.93 \pm 0.27)\text{g/cm}^3$.

【36】　圆半径

$$r = 7.2\text{m} \pm 0.1\text{m}.$$

若取 $\pi = 3.14$,则求出的圆面积和最小相对误差为何?

【思路】　绝对误差和相对误差的计算公式

【解析】　圆面积 $S = \pi r^2 = \pi \times 7.2^2 \approx 51.84\pi(\text{m}^2)$

$$\Delta_1 = \pi r_1^2 - \pi r^2 = \pi(7.2 + 0.1)^2 - \pi \cdot 7.2^2 = 1.45\pi.$$

$$\Delta_2 = |\pi r_2^2 - \pi r^2| = |\pi(7.2 - 0.1)^2 - \pi \cdot 7.2^2| = 1.43\pi.$$

$$\Delta \leqslant \max(\Delta_1, \Delta_2) = \max(1.45\pi, 1.43\pi) = 1.45\pi(\text{m}^2)$$

即圆面积 S 一般为 $(51.84 \pm 1.45)\pi(\text{m}^2)$,故相对误差

$$\delta = \frac{\Delta}{51.84\pi} \leqslant \frac{1.45\pi}{51.84\pi} < 2.80\%.$$

【38】　测量正方形的边 x,此处 $2\text{m} < x < 3\text{m}$,应有多小的绝对误差,才能使此

正方形面积有可能精确到 0.001m^2?

【思路】 绝对误差和相对误差的计算公式

【解析】 由已知 $0 < x^2 - 4 < 0.001$ 或 $0 < 9 - x^2 < 0.001$,

解得

$$2.99983 < x < 3 \quad \text{或} \quad 2 < x < 2.00024.$$

记
$$\Delta_1 = 3 - 2.99983 = 0.00017(\text{m})$$
$$\Delta_2 = 2.00024 - 2 = 0.00024(\text{m})$$

故绝对误差 $\Delta \leqslant \min(\Delta_1, \Delta_2) = 0.00017(m) = 0.17(mm)$,

即当边长 x 的绝对误差不超过 0.17mm 时,就能使此正方形的面积精确到 0.001m^2.

【40】 设 $\delta(x)$ 及 $\delta(y)$ 为数 x 和 y 的相对误差,$\delta(x,y)$ 为数 xy 的相对误差. 求证:

$$\delta(xy) \leqslant \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y).$$

【思路】 绝对误差和相对误差的计算公式

【证明】 设 a 及 b 分别是 x 及 y 的精确值,Δ_1 和 Δ_2 是绝对误差,则 $x = a + \Delta_1$, $y = b + \Delta_2$

故 xy 的绝对误差

$$\Delta = |xy - ab| = |(a + \Delta_1)(b + \Delta_2) - ab|$$
$$= |b\Delta_1 + a\Delta_2 + \Delta_1\Delta_2| \leqslant |b| \cdot \Delta_1 + |a| \cdot \Delta_2 + \Delta_1 \cdot \Delta_2$$

则 xy 的相对误差

$$\delta(xy) = \frac{\Delta}{|ab|} \leqslant \frac{\Delta_1}{|a|} + \frac{\Delta_1}{|b|} + \frac{\Delta_2}{|a|} \cdot \frac{\Delta_2}{|b|},$$

即

$$\delta(xy) \leqslant \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y).$$

§2 序列的理论

1. 数列极限的概念:一般地,对于数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 来说,若存在任意给定的正数 ε(不论其多么小),总存在正整数 N,使得对于 $n > N$ 时的一切 x_n 不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立,那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限,或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

记作:$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a(n \to \infty)$