高等学校教学用書

高等数学教程

第三卷　第三分册

В. И. 斯米尔諾夫著

商務印書館

高等学校教学用书

高等数学教程

第三卷　第三分册

商务印书馆

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико—теоретической литературы)出版的斯米爾諾夫(В. И. Смирнов)著"高等數學教程"(Курс высшей математики)第三卷1952年第十一版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲綜合大學數理系及高等工業學院需用較高深數學的各系教科書。

本書係榮獲斯大林獎金的著作。

本書(第三卷)中譯本暫分三册出版。

本册由南京大學葉彥謙翻譯,北京大學孫念增校閱。

高 等 数 学 教 程

第三卷 第三分册

叶彦謙譯

★版權所有★

商 務 印 書 館 出 版
上海河南中路二一一號
(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)
新 華 書 店 總 經 售
商 務 印 書 館 上 海 廠 印 刷
(13017·51)

1953年10月初版	開本850×1168 1/32
1956年7月第2版	字數335,000
1956年12月上海第2次印刷	印數20,001—31,000
印張11 5/16	定價(8)￥1.30

第二分册目次

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c

第四章　多變數函數和方陣函數

81. 正則多變數函數　就基本概念而論，多變數的解析函數論和單變數函數論很是相似。但是進一步發展下去，他就有了一些特異之點。在這一章裏我們祇說些基本概念，並且對多變數的冪級數作較詳細的研究。爲簡單計，我們祇看兩個自變數的情形。當自變數多於兩個時，所有的定義和證明完全有效。

假設 z_1 和 z_2 是兩個複變數，

$$f(z_1, z_2) \tag{1}$$

是這兩個變數的函數。假設變數 z_1 在一區域 B_1 中變動，變數 z_2 在一區域 B_2 中變動。如果函數(1)是 z_1 和 z_2 的單值連續函數，並且對於在上述區域中的自變數的任何值，比率

$$\frac{f(z_1+\Delta z_1, z_2)-f(z_1, z_2)}{\Delta z_1} \text{ 和 } \frac{f(z_1, z_2+\Delta z_2)-f(z_1, z_2)}{\Delta z_2}$$

當複改變量 Δz_1 和 Δz_2 趨於零時常有一定的極限，則稱函數(1)爲 z_1 和 z_2 在區域 B_1 和 B_2 中的正則函數或全純函數。這兩比率的極限即函數(1)關於 z_1 和 z_2 的偏導數：

$$\frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1} \text{ 和 } \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2}。$$

82. 二重積分和勾犀公式　假設 l_1 和 l_2 依次爲區域 B_1 和 B_2 中的兩條線路。將函數 $f(z_1, z_2)$ 先沿 l_1 作路積分，再沿 l_2 作路積分，即得二重積分

$$I_1=\int_{l_2} dz_2 \int_{l_1} f(z_1, z_2) dz_1 。$$

如果交換積分的次序,則可得另一二重積分:

$$I_2=\int_{l_1} dz_1\int_{l_2} f(z_1,z_2)dz_2 。$$

首先,我們證明 I_1 和 I_2 相等。假設曲線 l_1 的參數方程爲

$$z_1(t)=x_1(t)+iy_1(t), \qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$

曲線 l_2 的參數方程爲

$$z_2(\tau)=x_2(\tau)+iy_2(\tau)。 \qquad (c\leqslant \tau\leqslant d)$$

以 $z_1=z_1(t)$ 和 $z_2=z_2(\tau)$

代入函數 $f(z_1,z_2)$ 中,可以把積分 I_1 變成一個關於兩變數 t 和 τ 的二重積分,其中第一次關於 t 的積分以常數 a 和 b 爲積分限。第二次關於 τ 的積分以常數 c 和 d 爲積分限。

$$I_1=\int_c^d [x_2'(\tau)+iy_2'(\tau)]d\tau\int_a^b f[z_1(t),z_2(\tau)][x_1'(t)+iy_1'(t)]dt 。$$

這積分顯然就相當於在 (t,τ) 平面上的長方形

$$a\leqslant t\leqslant b;\quad c\leqslant\tau\leqslant d$$

中的二重積分。故由[II, 78]可以不變積分的極限而將次序交換,即 I_1 可改寫爲:

$$I_1=\int_a^b [x_1'(t)+iy_1'(t)]dt\int_c^d f[z_1(t),\ z_2(\tau)][x_2'(\tau)+iy_2'(\tau)]d\tau,$$

而這積分顯然就相當於積分 I_2,因此知道 I_1 和 I_2 相等。他們的共同數值稱爲函數 $f(z_1,z_2)$ 沿線路 l_1 和 l_2 的二重積分。

我們也可以直接用和的極限來定義二重積分。以分點

$$z_1^{(0)},\ z_1^{(1)},\ z_1^{(2)},\ \cdots,\ z_1^{(m)}$$

將曲線 l_1 分成 m 段,又以分點

$$z_2^{(0)},\ z_2^{(1)},\ z_2^{(2)},\ \cdots,\ z_2^{(n)}$$

將曲線 l_2 分成 n 段。再作二重和

$$\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1} f(\xi_1^{(p)},\xi_2^{(q)})(z_1^{(p+1)}-z_1^{(p)})(z_2^{(q+1)}-z_2^{(q)}),$$

其中 $\xi_1^{(p)}$ 是曲線 l_1 上弧 $z_1^{(p)}z_1^{(p+1)}$ 中的一點,$\xi_2^{(q)}$ 是曲線 l_2 上弧 $z_2^{(q)}z_2^{(q+1)}$

中的一點。當兩曲線上的分點無限增多，並且諸小段的弧長都趨於零時，上記二重和的極限卽二重積分 I_1 或 I_2。

假設 l_1 和 l_2 是兩條簡單閉線路，其所圍之區域爲 B_1 和 B_2。又設函數 $f(z_1, z_2)$在閉區域 B_1 和 B_2 中爲正則，就是說，這函數在兩個更大一些的，包含 B_1 和 B_2 以及他們的境界線在其內部的區域中爲正則。考察二重積分

$$I=\int_{l_1} dz_1'\int_{l_2} \frac{f(z_1',z_2')}{(z_1'-z_1)(z_2'-z_2)}dz_2'$$

或

$$I=\int_{l_2} dz_2'\int_{l_1} \frac{f(z_1',z_2')}{(z_1'-z_1)(z_2'-z_2)}dz_1',$$

其中 z_1 和 z_2 是 B_1 和 B_2 內部的兩個定點。

當先沿線路 l_2 積分時 z_1' 可視爲一參數，表示 l_1 上一定點。這時 $f(z_1', z_2')$是一個複變數 z_2' 的函數，他在閉區域 B_2 中爲正則。故應用通常的勾犀公式可得

$$I=2\pi i\int_{l_1} \frac{f(z_1',z_2)}{z_1'-z_1}dz_1'\text{。}$$

這時 $f(z_1',z_2)$是 z_1' 在閉區域 B_1 中的正則函數了。再用一次勾犀公式卽得

$$I=-4\pi^2 f(z_1,z_2),$$

因此得到和勾犀公式類似的公式：

$$(2)\qquad f(z_1,z_2)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{l_1} dz_1'\int_{l_2} \frac{f(z_1',z_2')}{(z_1'-z_1)(z_2'-z_2)}dz_2'\text{。}$$

變數 z_1 和 z_2 在積分符號之內以參數的形式出現。關於這些參數微分後，可知 $f(z_1,z_2)$有任何階的導數，並且這些導數可以表示爲二重積分的形式：

$$(3)\quad \frac{\partial^{p+q}f(z_1,z_2)}{\partial z_1^p\,\partial z_2^q}=-\frac{p!\,q!}{4\pi^2}\int_{l_1} dz_1'\int_{l_2} \frac{f(z_1',z_2')}{(z_1'-z_1)^{p+1}(z_2'-z_2)^{q+1}}dz_2'\text{。}$$

所有以上的論斷和結果很容易推廣到含有兩個以上的自變數的

函數去。

和單變數函數的情形一樣,由勾犀公式可以導出模數原理:若函數 $f(z_1, z_2)$ 在閉區域 B_1 和 B_2 中爲正則,又當 z_1' 在 l_1 上,z_2' 在 l_2 上時 $|f(z_1', z_2')| \leqslant M$,則對閉區域 B_1 和 B_2 中的任意兩點 z_1 和 z_2,常有 $|f(z_1, z_2)| \leqslant M$。

完全和單變數函數的情形一樣,可證維爾史特拉斯定理成立:若級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z_1, z_2)$$

的項都是閉區域 B_1 和 B_2 中的正則函數,並且級數在這兩區域中一致收斂,則其和爲兩區域內部的正則函數,且當 z_1 和 z_2 爲 B_1 和 B_2 的內點時,級數可以關於 z_1 和 z_2 逐項微分任何次之多。微分後所得到的級數在 B_1 和 B_2 內部的任意閉區域 B_1' 和 B_2' 中爲一致收斂。所有以上的論斷和結果不難推廣到含有兩個以上的自變數的函數去。我們以下專來研究冪級數。

83. 冪級數 含兩個自變數 z_1 和 z_2 且以 b_1 和 b_2 爲中心的冪級數具有如下的形式:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_{pq}(z_1 - b_1)^p (z_2 - b_2)^q, \tag{4}$$

其中 p 和 q 互相獨立各自從零開始跑過正整數的全體。級數(4)是個二重級數。這種級數我們早在 [I, 142] 中已經研究過,那時級數的項都是實數。現在假設由這級數的項的模所成的級數

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} |a_{pq}| |z_1 - b_1|^p |z_2 - b_2|^q \tag{5}$$

也收斂。那末,如[11]中一般,可知由級數(4)的項的實數部分和虛數部分所成的級數皆爲絕對收斂,並且這兩個實二重級數的和不因項的次序的變更而改變。故知當級數(5)收斂時級數(4)也收斂,並且不論項的次序如何變更,級數(4)的和常爲一定。以後我們祇看級數(5)

爲收斂，卽級數(4)爲絕對收斂的情形。

和[13]中完全一樣，不難寫出與亞貝爾定理類似的定理來。假設級數(4)當 $z_1=\alpha_1$，$z_2=\alpha_2$ 時爲絕對收斂。由此可知當 $z_1=\alpha_1$，$z_2=\alpha_2$ 時級數(4)的一般項的模爲有界，就是說，存在一數 M，使對任意的 p 和 q 不等式

$$|a_{pq}|\,|\alpha_1-b_1|^p\,|\alpha_2-b_2|^q<M$$

常常成立。上式卽

$$|a_{pq}|<\frac{M}{|\alpha_1-b_1|^p|\alpha_2-b_2|^q}。\tag{6}$$

現在來看兩個圓 K_1 和 K_2：

$$|z_1-b_1|<|\alpha_1-b_1|;\quad |z_2-b_2|<|\alpha_2-b_2|。\tag{7}$$

第一個圓包含所有和 b_1 相距較 α_1 和 b_1 相距爲近的點 z_1，第二個圓包含所有和 b_2 相距較 α_2 和 b_2 相距爲近的點 z_2。

今於 K_1 中任取一點 z_1，K_2 中任取一點 z_2，卽

$$|z_1-b_1|=q_1|\alpha_1-b_1|,\quad |z_2-b_2|=q_2|\alpha_2-b_2|,$$

其中 $0<q_1$，$q_2<1$。應用(6)可以估計級數(4)的一般項：

$$|a_{pq}|\,|z_1-b_1|^p\,|z_2-b_2|^q<Mq_1^p\,q_2^q。\tag{8}$$

但是易見正項二重級數

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}Mq_1^p\,q_2^q$$

爲收斂。實際上，這級數可由兩個正項級數

$$M(1+q_1+q_1^2+\cdots)\ \text{和}\ (1+q_2+q_2^2+\cdots)$$

相乘而得[I, 138]，故顯知其和爲：

$$\frac{M}{(1-q_1)(1-q_2)}。$$

因此這時級數(5)收斂，從而級數(4)爲絕對收斂。由(8)式還可以知道在任何以 b_1 和 b_2 爲中心，半徑 ρ_1 和 ρ_2 依次小於 K_1 和 K_2 的半徑的圓 K_1' 和 K_2' 中，級數(4)爲一致收斂。在以上的證明中我們並沒

有用到級數(4)在 $z_1=\alpha_1$ 和 $z_2=\alpha_2$ 的絕對收斂性,而祇用到不等式

$$|a_{pq}(\alpha_1-b_1)^p(\alpha_2-b_2)^q|\leqslant M,$$

卽這級數的一般項當 $z_1=\alpha_1$ 和 $z_2=\alpha_2$ 時爲有界。

總括起來,可得下面的結果:若當 $z_1=\alpha_1$, $z_2=\alpha_2$ 時級數(4)的項的模都小於同一數 M,則此級數在圓(7)的內部爲絕對收斂,在圓

$$|z_1-b_1|\leqslant(1-\varepsilon)|\alpha_1-b_1|;\quad |z_2-b_2|\leqslant(1-\varepsilon)|\alpha_2-b_2|$$

中爲一致收斂,其中 ε 是任何一個小的固定正數。

注意:祇要當 $z_1=\alpha_1$ 和 $z_2=\alpha_2$ 時級數(4)在某種順序之下相加爲收斂(不必絕對收斂),他的一般項就按與原點距離的遠近而趨於零,因此他們的絕對值必皆小於同一數 M。從而級數就在圓(7)內部絕對收斂。

由以上的結果,和[13]中完全一樣,可以導入級數(4)的收斂半徑這個概念

不過現在我們有了兩個正數 R_1 和 R_2,使當 $|z_1-b_1|<R_1$ 和 $|z_2-b_2|<R_2$ 時級數(4)絕對收斂,當 $|z_1-b_1|>R_1$ 和 $|z_2-b_2|>R_2$ 時級數(4)發散。注意:現在級數(4)的絕對收斂區域必須由兩個收斂半徑 R_1 和 R_2 同時決定,而這兩半徑的大小一般不能各自獨立地決定,因爲一半徑的值常要受另一半徑的值的影響。當 R_1 減小時,R_2 有時可以增大。換句話說,現在我們祇能說聯合收斂半徑 R_1 和 R_2,或聯合收斂圓。試以下之冪級數爲例:

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(p+q)!}{p!q!}z_1^p z_2^q。\tag{9}$$

級數(5)現在成爲

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(p+q)!}{p!q!}|z_1|^p|z_2|^q。\tag{10}$$

在這級數中先把那些 $p+q$ 等於同一數 s 的項分別加在一起。由牛頓二項式公式知道這種項的和是

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.c

$$(|z_1|+|z_2|)^s,$$

從而(10)式可以改寫為

$$\sum_{s=0}^{\infty}(|z_1|+|z_2|)^s,$$

由此立刻可知當且僅當 $|z_1|+|z_2|<1$ 時這級數為收斂。這樣，級數(9)的聯合收斂半徑 R_1 和 R_2 就由等式 $R_1+R_2=1$ 來決定。若取 $R_1=\theta$, $0<\theta<1$，則有 $R_2=1-\theta$。再看第二個例子：

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}z_1^p z_2^q。$$

於此易見 $|z_1|<1$ 和 $|z_2|<1$ 是絕對收斂的充要條件，就是說，現在 $R_1=1$, $R_2=1$，兩收斂半徑各自獨立地可以決定。

由一致收斂性和維爾史特拉斯定理知道級數(4)在聯合收斂圓的內部表示兩變數 z_1 和 z_2 的正則函數 $f(z_1,z_2)$。和 [13] 中一樣，可知級數(4)在收斂圓內部可以關於任一變數微分任何次之多，並且這微分不改變收斂圓。

和[14]中一樣，微分幾次以後再置 $z_1=b_1$ 和 $z_2=b_2$，可得級數的係數的表示式：

$$a_{pq}=\frac{1}{p!\,q!}\left.\frac{\partial^{p+q}f(z_1,z_2)}{\partial z_1^p\partial z_2^q}\right|_{z_1=b_1;\ z_2=b_2},\tag{11}$$

即級數(4)是函數 $f(z_1,z_2)$ 的泰勒級數。

若 R_1 和 R_2 是級數(4)的聯合收斂半徑，則當 $|z_1-b_1|\leqslant R_1-\varepsilon$ 及 $|z_2-b_2|\leqslant R_2-\varepsilon$ 時這級數絕對且一致收斂，其中 ε 是任何一個小的固定正數。由(3)及(11)可得級數的係數的估值如下：

$$|a_{pq}|<\frac{M}{(R_1-\varepsilon)^p(R_2-\varepsilon)^q},\tag{12}$$

其中 M 是個正常數，其值顯然和 ε 的選取有關。

用(12)式右邊的數替代級數(4)的係數 a_{pq}，則得冪級數

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{M}{R_1'^pR_2'^q}(z_1-b_1)^p(z_2-b_2)^q,\qquad(R_1'=R_1-\varepsilon;\ R_2'=R_2-\varepsilon)\tag{13}$$

通常稱爲級數(4)的優勝級數或強級數。易見級數(13)的和等於

$$(14)\qquad \frac{M}{\left(1-\frac{z_1-b_1}{R_1'}\right)\left(1-\frac{z_2-b_2}{R_2'}\right)},$$

這函數稱爲級數(4)的優勝函數或強函數。當他依(z_1-b_1)和(z_2-b_2)的冪展開爲冪級數時,係數常爲正,且大於$|a_{pq}|$。

[14]的結果也不難拓廣到兩個自變數的情形來。設有兩個以b_1和b_2爲中心的圓$|z_1-b_1|\leqslant R_1$和$|z_2-b_2|\leqslant R_2$,其圓周爲l_1和l_2。函數$f(z_1, z_2)$在這兩閉圓中爲正則。又設z_1和z_2依次爲兩圓內部的任意兩固定點,則由勾犀公式有

$$(15)\qquad f(z_1,z_2)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{l_1}dz_1'\int_{l_2}\frac{f(z_1',z_2')}{(z_1'-z_1)(z_2'-z_2)}dz_2'\text{。}$$

和[14]中一樣,我們可以將有理分式

$$\frac{1}{(z_1'-z_1)(z_2'-z_2)}$$

依(z_1-b_1)和(z_2-b_2)的冪展開爲級數

$$\frac{1}{(z_1'-z_1)(z_2'-z_2)}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(z_1-b_1)^p(z_2-b_2)^q}{(z_1'-b_1)^{p+1}(z_2'-b_2)^{q+1}},$$

這級數關於圓周l_1和l_2上的點z_1'和z_2'爲一致收斂。將上式代入(15)式右邊,然後逐項積分,卽得函數$f(z_1,z_2)$在兩圓內部的冪級數展開式:

$$(16)\qquad f(z_1,z_2)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}a_{pq}(z_1-b_1)^p(z_2-b_2)^q\text{。}$$

這級數的係數由下面的公式決定:

$$(17)\qquad a_{pq}=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{l_1}dz_1'\int_{l_2}\frac{f(z_1',z_2')}{(z_1'-b_1)^{p+1}(z_2'-b_2)^{q+1}}dz_2'=$$

$$=\frac{1}{p!\,q!}\left.\frac{\partial^{p+q}f(z_1,z_2)}{\partial z_1^p\,\partial z_2^q}\right|_{z_1=b_1;\,z_2=b_2}\text{。}$$

因此得證任何在兩圓內部爲正則的函數可以在這兩圓內部展開爲

冪級數❶。

和[14]中一樣，易見這展開式是唯一的，因爲他的係數必定由(11)式所決定之故。

我們可以把級數(4)中的項按照(z_1-b_1)和(z_2-b_2)的齊次式歸併起來，即將他寫成下面的形式

$$\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{p+q=s} a_{pq}(z_1-b_1)^p(z_2-b_2)^q, \tag{18}$$

其中內部的有限和展佈於所有那些滿足 $p+q=s$ 的項之上。公式(18)將函數$f(z_1,z_2)$在收斂圓內部表示爲(z_1-b_1)和(z_2-b_2)的齊次多項式的級數。現在反過來，假設(z_1-b_1)和(z_2-b_2)的齊次多項式所成的級數(18)在兩圓$|z_1-b_1|\leqslant R_1$和$|z_2-b_2|\leqslant R_2$中爲一致收斂。則由維爾史特拉斯定理這級數的和$f(z_1,z_2)$是這兩圓中的正則函數。

並且我們還可以將級數(18)關於任一變數逐項微分任何次之多。微分以後再置$z_1=b_1$和$z_2=b_2$，卽得係數a_{pq}所滿足的(11)式。這表明諸係數a_{pq}就是函數$f(z_1,z_2)$的泰勒係數，於是我們可以把級數(18)改寫成二重級數(4)的形式，這級數在兩圓內部絕對且一致收斂。因此得證：若齊次多項式所成的級數在某兩圓內部爲一致收斂，則此級數必可改寫爲具普通形式的二重冪級數，在兩圓內部爲絕對收斂。

若將z_1和z_2分開爲實數和虛數部分：

$$z_1=x_1+iy_1,\quad z_2=x_2+iy_2,$$

則在以(x_1,y_1,x_2,y_2)爲坐標的四維空間中級數(18)的一致收斂區域有時可以比級數(4)的一致收斂區域更大一些。

設以級數(9)爲例。這時(18)取下面的形式：

$$\sum_{s=0}^{\infty}(z_1+z_2)^s,$$

他的一致收斂區域由下面的不等式決定：

❶ 前面假設$f(z_1,z_2)$在兩閉圓中爲正則祇是爲敍述證明時便當一些，讀者易見當$f(z_1,z_2)$祇在兩圓內部爲正則時結果依然成立（譯者）。

$$|z_1+z_2|<1,$$

亦卽

(19) $$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2<1。$$

對於級數(9)前面已證應有 $R_1+R_2=1$, 故其收斂區域由不等式

$$|z_1|+|z_2|<1$$

決定,此卽

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}<1,$$

或

(20) $$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}<1。$$

不等式(19)所定義的區域比不等式(20)所定義的更大,卽若 x_k 與 y_k 滿足(20)時必定也滿足(19),其逆不眞。實際上,由不等式

$$(x_1x_2+y_1y_2)^2\leqslant(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$$

立刻可知(19)的左邊小於或等於(20)的左邊。

所有以上的論斷和結果都可拓廣到 n 個變數的冪級數去,那時我們所得到的冪級數的絕對且均勻收斂區域將是 n 個圓的聯合體。

84. 解析延拓 由形式如(4)的冪級數在其收斂圓內部所定義的兩個變數的函數 $f(z_1,z_2)$ 有時可在更大的區域中爲正則,於是和單變數函數的情形一樣又發生了函數的解析延拓的問題。和單變數函數的情形一樣[18],有基本定理成立,依據這個定理若在同一對區域中爲正則的兩函數在每一區域中的一點 $z_1=b_1$ 和 $z_2=b_2$ 有相同的函數値,並且他們任何階的導數在這兩點的數値也都相同,則這兩函數在這一對區域中全同。

現在來研究由冪級數所定義的函數 $f(z_1,z_2)$, 假設 $z_1=c_1$ 和 $z_2=c_2$ 是收斂圓中的兩點。應用級數(4)我們可以決定導數

$$\left.\frac{\partial^{p+q}f(z_1,z_2)}{\partial z_1^p\partial z_2^q}\right|_{z_1=c_1;\,z_2=c_2}$$

的値,然後再做函數 $f(z_1,z_2)$ 依 (z_1-c_1) 和 (z_2-c_2) 的冪展開時的泰勒

級數：

$$(21) \qquad \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a'_{pq}(z_1-c_1)^p(z_2-c_2)^q。$$

易見這種冪級數的改造就相當於以

$$(z_1-b_1)^p=[(z_1-c_1)+(c_1-b_1)]^p$$
$$(z_2-b_2)^q=[(z_2-c_2)+(c_2-b_2)]^q$$

代入級數(4)，用二項式公式透開方括弧，然後再把所有含(z_1-c_1)和(z_2-c_2)的冪次相同的項歸併在一起。級數(21)在任何以c_1和c_2爲中心而分別含於級數(4)的兩收斂圓內部的兩圓之中顯然爲收斂，並且他的和等於$f(z_1, z_2)$。但有時級數(21)的收斂圓也可以越出級數(4)的收斂圓之外。這時我們就得到函數$f(z_1, z_2)$在更大的區域中的值，即擴大了正則函數$f(z_1, z_2)$的定義域。在有些場合之下，我們可以一次次地應用上述這種藉助於收斂圓的解析延拓來擴大正則函數的存在域以及他的全部可能值，於是也就定義了一個解析函數，這解析函數是由級數(4)所決定的元素經解析延拓而得到的。至於解析延拓和奇異點之間的關係我們不準備在此詳細去研究了。以上所說的一切也適用於自變數多於兩個的情形。祇是有一點要注意的，就是當$f(z_1, z_2)$做解析延拓時，如果祇知道z_1和z_2所經過的路線L_1和L_2的話，我們並不能決定這解析延拓的結果。更要緊的是要知道z_1和z_2沿着L_1和L_2變動時彼此間的關係如何。關於多變數函數論的一般理論我們就講到這裏爲止。目前函數論在這方面進展甚速。關於多變數函數論的基本事實在古利的"數學分析"一書中可以找到更詳細的敍述。至於專門的書籍則有富克斯的"解析多變數函數論"(1948)，其中附載有豐富的文獻。

85. 方陣函數、預備知識 現在讓我們來研究以一個或幾個方陣爲變數的函數。先看一個方陣的函數。在$[\mathrm{III}_1, 44]$中我們已經研究過最簡單的情形，即一個方陣的多項式和有理函數。在深入研究更複雜的方陣函數之先，要說幾個基本概念。以後用n來記方陣的階數。

設有方陣的無限敍列

$$X_1,\ X_2,\ \cdots$$

我們稱這敍列以方陣 X 爲極限，若對任意足號 i 和 k 常有

$$\lim_{m\to\infty}\{X_m\}_{ik}=\{X\}_{ik}, \tag{22}$$

卽方陣 X_m 的元素常以 X 中對應的元素爲其極限。這時我們假設無限敍列中的方陣都是同階的。

再引進幾個以後要用的新的記號。$\|a\|$ 表示一個方陣，他的每一元素都等於 a。$|X|$ 表示一個方陣，其元素爲方陣 X 的元素的模，卽

$$\{|X|\}_{ik}=|\{X\}_{ik}|。 \tag{23}$$

若一方陣 Y 的元素常爲正，且皆大於 $|X|$ 的元素，則以不等式

$$|X|<Y$$

記之。換言之，這不等式和下面 n^2 個不等式相抵：

$$|\{X\}_{ik}|<\{Y\}_{ik}。\qquad (i,\ k=1,\ 2,\cdots,\ n)$$

再看以方陣爲項的無窮級數

$$Z_1+Z_2+\cdots$$

若這級數前面 n 項之和當 n 無限增加時有一定的極限方陣 Z，則稱他爲收斂。Z 稱爲這級數的和

$$Z=Z_1+Z_2+\cdots \tag{24}$$

(24)式顯然相當於下面 n^2 個等式：

$$\{Z\}_{ik}=\{Z_1\}_{ik}+\{Z_2\}_{ik}+\cdots\qquad (i,k=1,2,\cdots,n) \tag{25}$$

所有的滿足條件

$$|X-A|<\|\rho\| \tag{26}$$

的方陣 X 稱爲方陣 A 的一個鄰域，這裏 ρ 是個已給正數。不等式(26)和下面 n^2 個不等式相抵：

$$|\{X-A\}_{ik}|<\rho。$$

方陣的冪級數是定義方陣函數的一種基本工具，所以先來研究一下這樣的級數。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com