高等院校文史哲经管类公共课教材

高等数学

张雄 魏裕博 李岚 主编

陕西科学技术出版社

高等院校文史哲经管类公共课教材

高等数学

主　编　张　雄　魏裕博　李　岚
副主编　杜光斌　赵建堂
作　者　（以姓氏拼音为序）
杜光斌　李　岚　魏裕博
赵　健　赵建堂

陕西科学技术出版社

图书在版编目(CIP 数据)

高等数学/张雄主编.—西安: 陕西科学技术出版社,2008.8
高等院校理工农林医专业.高等院校文史哲经管专业
ISBN 978-7-5369-4535-7

Ⅰ.高… Ⅱ.张… Ⅲ.数学课—高等学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 123076 号

出版者	陕西科学技术出版社 西安北大街 131 号 邮编:710003 电话:(029)87211894 传真:(029)87218236 http://www.snstp.com
发行者	陕西科学技术出版社 电话:(029)87212206 87260001
印 刷	陕西新胜印务有限责任公司
规 格	787mm×960mm 16 开本
印 张	28
字 数	460 千字
版 次	2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月 1 次印刷
总定价	106.00 元(本册 53.50 元)

前 言

这本《高等数学》是为高职高专文科各专业编写的公共课教材。为了适应飞速发展的高职教育形势，针对以往使用的《高等数学》教材中或专业性过强、通用性不足，或内容较少、覆盖面窄，或过于简单、仅适合少课时使用等缺陷，我们依据高职教育培养目标和教学计划，组织了陕西省部分院校长期担任高等数学教学的专家和教师编写了这本《高等数学》教材，可供文、史、哲、经、管类等各专业的学生使用。

本书的特点是强调基础，注重应用；内容精炼，通俗易懂；理论知识以够用为度，化繁就简；注意与中学数学相关内容的衔接；突出数学思想方法，体现数学的应用价值；注重信息数据的处理方法及其与实际问题的联系。力求既有较大的覆盖面，又不能太繁杂，大约需要 100 课时。主要内容包括函数与极限、一元函数微积分和多元函数微积分、空间解析几何与向量代数、无穷级数、常微分方程、线性代数、概率论与数理统计等。

本书由张雄、魏裕博、李岚主编，杜光斌、赵建堂任副主编，具体参加编写的有赵建堂(第 1、2、3、4 章)、李岚(第 5、6、7、9 章)、赵健(第 8 章)、魏裕博(第 10、11、12 章)、杜光斌(第 13、14、15 章)，李岚对全书内容进行了统稿。

本书的编写参考了大量的文献资料，我们对其作者和同行表示感谢并尽可能地列出参考书目。由于编写时间较短和水平所限，本书一定还有不少缺点和错误，恳请读者和同行在使用中提出批评指正，以便修订完善。

编　者

2008 年 6 月

目　录

第二部分　线性代数基础

第三部分 概率论与数理统计

第一部分　微积分学

第一章　函　数

高等数学是针对初等数学而言的，其重要标志是微积分学的诞生，这是数学发展史上的一次伟大转折. 高等数学的研究对象、研究方法都与初等数学表现出很大差异，初等数学研究的对象是常量，而高等数学研究的是变量，并且是通过变量间的依赖关系来研究变量，这便产生了高等数学的研究对象——函数. 本章将对中学里学过的函数概念与性质等内容作系统总结复习和深化与提高，为今后的学习打下重要的基础.

第一节　函数概念

一、实数与绝对值

微积分中所涉及的数都是实数，所以应该熟悉和了解实数的有关概念.

1. 实数及其几何表示

有理数与无理数统称为实数.

形如$\dfrac{p}{q}$（p、q为整数，且$q\neq 0$）的数称为有理数. 由于$\dfrac{p}{q}$可以是整数或者分数，因此也可以说整数与分数统称为有理数. 有理数一定是有限小数或者无限循环小数. 无限不循环小数称为无理数，如π、$\lg 3$、$\sqrt{2}$等. 无理数不能表示为$\dfrac{p}{q}$（p、q为整数，且$q\neq 0$）.

实数按照以下方法分类，形成实数系表：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

实数有加、减、乘、除、乘方、开方等运算，其中，加法与减法、乘法与除法、乘方与开方互为逆运算.

规定了原点、正方向及单位长度的直线称为数轴(如图 1－1－1).

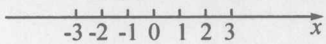


图 1－1－1

有了数轴之后，任何一个实数几何上均可用数轴上的一个点来表示；反之，数轴上任何一个点都表示一个实数. 即数轴上的点和实数之间是一一对应的关系. 基于这种一一对应关系，可以把一个实数 a 和数轴上与之对应的点 a 不加区别地看待.

应当指出的是，实数是稠密的，它充满整个数轴.

2. 绝对值

数轴上的点 a 到原点的距离称为数 a 的绝对值，记为 $|a|$. 规定正数和零的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数，即

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0\end{cases}$$

显然，实数的绝对值是一个非负数. 几何上，$|a|$ 表示数轴上点 a 与原点之间的距离(如图 1－1－2). 而 $|a-b|$ 表示点 a 与点 b 之间的距离.

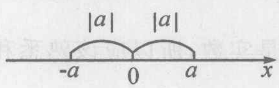


图 1－1－2

实数绝对值有下列基本性质：

① $|a|\geqslant 0$，当且仅当 $a=0$ 时，有 $|a|=0$；

② $|a|=\sqrt{a^2}$；

③ $|-a|=|a|$；

④ $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$；

⑤ $|a+b|\leqslant |a|+|b|$；

⑥ $|a-b|\geqslant |a|-|b|$；

⑦ $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$；

⑧ $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\quad(b\neq 0)$.

设 $a>0$，对 $|x|<a$ 和 $|x|>a$，有以下结论（如图 1－1－3）：

$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a\qquad |x|>a\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$

图 1－1－3

例 1 去掉 $|x^2-9|$ 中的绝对值符号.

解 $|x^2-9|=\begin{cases}x^2-9, & x^2-9\geqslant 0\\ -(x^2-9), & x^2-9<0\end{cases}$

即 $|x^2-9|=\begin{cases}x^2-9, & |x|\geqslant 3\\ 9-x^2, & |x|<3\end{cases}$

亦即 $|x^2-9|=\begin{cases}x^2-9, & x\leqslant -3 \text{ 或 } x\geqslant 3\\ 9-x^2, & -3<x<3\end{cases}$.

例 2 解下列绝对值不等式：

① $|3x-2|\leqslant 4$　　② $|2x-1|>3$　　③ $1<|x-2|<6$

解 ① $|3x-2|\leqslant 4\Leftrightarrow -4\leqslant 3x-2\leqslant 4$ 得 $-\dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2$

所以，不等式的解为 $-\dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2$.

② $2x-1|>3\Leftrightarrow 2x-1<-3$ 或 $2x-1>3$

得 $x<-1$ 或 $x>2$

所以，不等式的解为 $x<-1$ 或 $x>2$.

③ $1<|x-2|<6\Leftrightarrow\begin{cases}|x-2|>1\\ |x-2|<6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2<-1 \text{ 或 } x-2>-1\\ -6<x-2<6\end{cases}$

解得 $-4<x<1$ 或 $3<x<8$.

二、区间和邻域

1. 区间

设 a、b 是两个实数，且 $a<b$，则称满足不等式 $a<x<b$ 的实数的全体为开区间，记为 (a,b).

类似地，称 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 为闭区间；称 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$ 以及 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$ 为半开半闭区间.

以上区间分别如图 1－1－4(a)～(d)所示.

在几何上，(a,b) 和 $[a,b]$ 都表示数轴上点 a 和点 b 之间的线段，开区间 (a,b) 不包含端点 a 和 b，闭区间 $[a,b]$ 包含端点 a 和 b. $b-a$ 称为上述四个区间的长度.

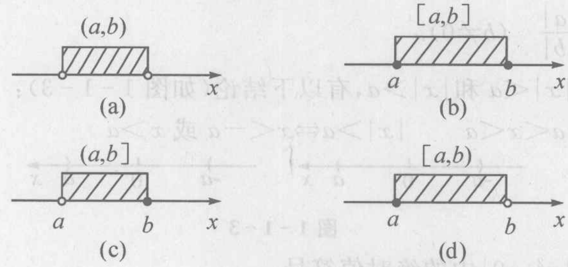


图 1 - 1 - 4

以上区间为有限区间，考虑表述上的需要，也常用 I 来表示.

为讨论方便，引入记号∞，则以下各区间为无限区间：

$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\}=\{x|x>a\}$

$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\}=\{x|x\geqslant a\}$

$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\}=\{x|x<b\}$

$(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\}=\{x|x\leqslant b\}$

$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=\{x|x\in\mathbf{R}\}$，$\mathbf{R}$ 表示全体实数.

这里应注意的是，∞仅是一个记号，并不表示数，且不能参与运算.

有了区间的概念之后，不等式或不等式组的解常用区间来表示.

2. 邻域

设 a 和 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，把满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的实数 x 的全体称为点 a 的 δ 邻域. 记为 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}$，其中点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 由于

$|x-a|<\delta\Leftrightarrow-\delta<x-a<\delta\Leftrightarrow a-\delta<x<a+\delta$

因此，在数轴上点 a 的 δ 邻域表示以点 a 为中心，以 2δ 为长度的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$［如图 1 - 1 - 5(a)］.

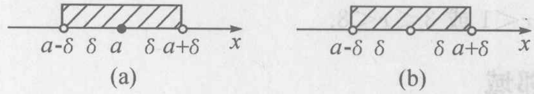


图 1 - 1 - 5

如果 x 在 a 的 δ 邻域内变化但不能取中心点 a 时，则 x 满足不等式 $0<|x-a|<\delta$ 时，称该邻域为点 a 的去心的 δ 邻域，记为 $U^0(a,\delta)$，即 $U^0(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$，也可表示为 $U^0(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta$ 且 $x\neq a\}$［如图 1 - 1 - 5(b)所示］.

例 3　5 的 0.01 邻域，就是满足不等式 $|x-5|<0.01$ 的全体实数，即 $4.99<x<5.01$，也就是开区间 $(4.99,5.01)$，邻域的半径为 0.01.

5 的去心的 0.01 邻域，就是满足不等式 $0<|x-5|<0.01$ 的全体实数，即两个开区间 $(4.99,5)$ 与 $(5,5.01)$ 的并集，也就是 $(4.99,5)\cup(5,5.01)$. 邻域的半径

也是 0.01，两者相差中心点 5.

三、函数的概念

1. 常量与变量

在观察各种现象或过程时，通常遇到的量一般可以分为两类：一类在考察的过程中不发生变化，只取一个固定的值，我们称它为常量；另一类在所考察的过程中是变化的，可以取不同的数值，我们称它为变量.

例如，考察从甲地飞往乙地的客机. 其中旅客人数、行李重量、票价等都是常量，而消耗的汽油、飞行中客机与甲、乙两地的距离等则是变量.

一个量是常量还是变量，不是绝对的，要根据过程作具体分析. 例如，某种商品的价格在一段时间内是常量，但在较长时间内则是变量. 这说明常量和变量具有相对性，它们依赖于所研究的过程. 通常用字母 x、y、z 等表示变量，用字母 a、b、c 等表示常量.

如果某个变化过程中，存在着这样两个变量：其中当一个变量在某个范围内每取一个确定的值时，另一个变量总有唯一的一个值与之对应. 我们就说这两个变量之间存在着函数关系. 例如，某种苹果的单价是 1.1 元/斤，那么购买 x 斤苹果与所需花费的金额 y 元之间存在着关系式：

$$y=1.1x$$

若买 5 斤苹果，即 $x=5$，则需花 5.5 元，即 $y=5.5$；若买 10 斤苹果，即 $x=10$，则需花 11 元，即 $y=11$；等等. 将 x 与 y 之间的取值关系列表如下：

x	1	2	3	…	10	…	20	…	30	…
y	1.1	2.2	3.3	…	11	…	22	…	33	…

显然所花费金额 y 是受购买量 x 影响的，对购买量 x 取任何一个合理值时 $(x=1,2,\cdots)$，所花费的金额 y 都有唯一确定的值与之对应，这时我们就说所花费金额 y 是购买量 x 的函数. 而关系式 $y=1.1x$ 确定了这两个变量之间的对应关系.

2. 函数的定义

对于两个有函数关系的变量进行进一步讨论，不难发现一定存在着某种对应规则，根据这一规则，当其中一个变量在允许的范围内任意取定一个值时，另外一个变量总有确定的值与之对应. 这正是两个变量间的函数关系的实质.

定义 1 设 x、y 为某过程中的两个变量，如果当 x 在其允许的取值范围 D (D 为实数集合)内任意取定一个实数值时，按照一定的规则 f，y 总有唯一确定的实数值与之对应，则称 y 是定义在 D 上的函数. 记作 $y=f(x)$，$x\in D$，其中，x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域. f 称为函数符号，它表示 y 与 x 的对应法则.

由于 $y=f(x)$ 只有一个自变量，因此也称它为一元函数. 以后还要学习自变量多于一个的多元函数.

当自变量 x 在其定义域内取某确定值 x_0 时，因变量 y 按照所给函数关系 $y=f(x)$ 就有一个唯一的值 y_0 与之对应，y_0 叫做当 $x=x_0$ 时的函数值，记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

当 x 在定义域 D 内遍取所有数值时，对应的函数值构成的集合称为函数的值域，记为 R_f. 即 $R_f=f(D)=\{y|y=f(x),x\in D\}$.

$f(x)$ 既可以表示具体、已知的函数，也可以表示抽象、未知的函数，但若同时考察几个不同函数时，就要用不同的函数符号. 如 $y=\varphi(x)$，$y=g(x)$ 等，有时也可用 $y=y(x)$，$u=u(x)$ 等表示某个函数，这时等号右边的 y、u 不再表示因变量，而是同 $f(x)$ 中的 f 一样，表示的是函数的对应规则.

将函数的定义域与对应法则称为函数的两个要素.

两个函数相等的充分必要条件是它们的定义域和对应法则均相同.

关于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定，例如，圆的面积 $S=\pi r^2$，若无其他特定限制，则其定义域为 $(0,+\infty)$，因为 $r\leqslant 0$ 没有意义. 对于不代表任何实际意义，由解析式表示的抽象函数，其定义域就是使函数关系成立的自变量所取的全体实数值. 实际上，这时 $y=f(x)$ 的定义域由函数的对应规则 f 所限定. 例如 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域为使 y 有意义的自变量 x 的取值区间 $(-1,1)$.

例 4 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\ (x>0)$，求 $f(x)$，$f(1)$，$f(x+1)$.

解 令 $\dfrac{1}{x}=t$，则 $x=\dfrac{1}{t}$，代入原函数中，得

$$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}.$$

于是得

$$f(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x};$$

$$f(1)=1+\sqrt{2};\quad f(x+1)=\frac{1+\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}.$$

例 5 求函数 $y=\dfrac{5x+1}{\sqrt{x-2}}-\arcsin\dfrac{x}{3}$ 的定义域.

解 要使函数有意义，x 必须满足不等式组 $\begin{cases}x-2>0\\ \left|\dfrac{x}{3}\right|\leqslant 1\end{cases}$，解得 $2<x\leqslant 3$，所以，函数的定义域为 $(2,3]$.

3. 函数的表示方法与图形

函数常用的表示方法有以下三种：

(1) 表格法(列表法). 就是将自变量及其对应的函数值列成表格来表示变量之间的函数关系. 例如，日常用到的对数表、三角函数表及经济分析中的各种统计报表等，这种表示方法的优点是求函数值不需要计算，由查表可迅速确定部分函数值精确度高；缺点是数据不可能完整，也不便于理论研究.

(2) 图象法(图形法). 在坐标系中用图形来表示函数关系的方法. 这种表示方法的优点是直观明了，便于监督分析；缺点是作图工作费事，难免误差，致精度不高.

(3) 公式法(解析法). 就是用数学式子来表示函数与自变量之间的对应关系. 这种方法是应用最广泛的一种方法，其优点是简明准确，便于理论研究；缺点是缺乏直观性.

根据函数的解析表达式的形式不同，函数还可分为显函数、隐函数和分段函数三种：

(ⅰ) 显函数　函数 y 由 x 的解析表达式直接表示. 例如 $y=x^2+2$.

(ⅱ) 隐函数　函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定. 例如 $\ln y=\cos(x+y)$.

(ⅲ) 分段函数　函数在其定义域的不同范围内，具有不同的解析表达式.

以下给出常用的几个分段函数的例子：

例 6　绝对值函数　$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$（如图 1-1-6）.

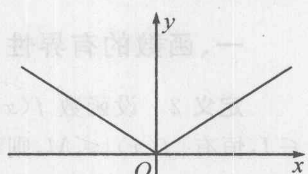


图 1-1-6

例 7　符号函数　$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$

其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=(-1,0,1)$（如图 1-1-7 所示）.

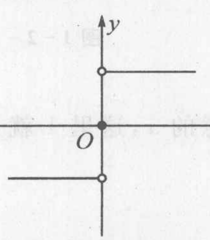


图 1-1-7

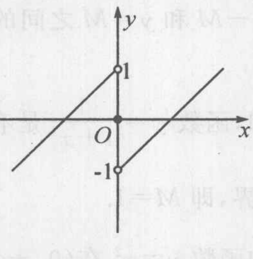


图 1-1-8

例 8　函数 $y=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x-1, & x>0 \end{cases}$

其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=(-\infty,+\infty)$（如图 1-1-8 所示）.

注意：分段函数是用几个式子合起来表示一个函数，而不是表示几个函数.

当自变量为 x，其对应的函数值为 y 时，则以 x 为横坐标，以 y 为纵坐标构成平面上一点 (x,y)，当 x 遍取定义域内的所有值时，相应地可以得到平面上一系列满足关系式 $y=f(x)$ 的点 (x,y)，所有这些点的集合构成了函数 $y=f(x)$ 的图形. 一般情况下，函数 $y=f(x)$ 的图形是一条平面曲线，如图 1-1-9 所示.

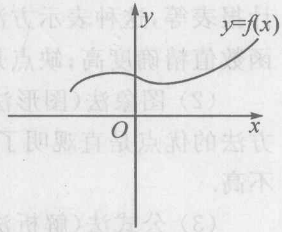


图 1-1-9

第二节　函数的几种简单性质

在诸多的函数中，某些函数具有一些特殊的属性，如单调性、奇偶性、有界性、周期性. 这些性质对认识函数和简化函数的各种计算具有重要意义，因而需要对这些性质加以研究.

一、函数的有界性

定义 2　设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有意义，若存在正数 M，使得对所有的 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界. 如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 I 上是无界的.

定义中的 M 称为函数 $y=f(x)$ 的界.

这种性质表明函数的值域包含于有限区间 $[-M,M]$ 内，在几何上表现为，函数表示的图象位于 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间的区域内（如图 1-2-1）.

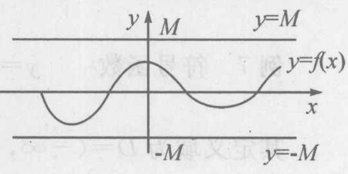


图 1-2-1

例如，函数 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 是有界的，因为对于任意的 x，这里 1 就是函数 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的界，即 $M=1$.

再如函数 $y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上就是无界的，因为对任何正数 M 总可以找到 x 的一些值，使得 $|x^2|>M$.

对于函数的有界性,需注意以下几点:

① 函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界的等价定义可叙述为:若存在常数 A 与 B,使得 $A\leqslant f(x)\leqslant B, x\in I$ 成立,通常称 A 为函数的下界,而称 B 为函数的上界.

② 当一个函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界时,正数 M 的取法不是唯一的,即它存在无穷多个界.例如 $y=\sin 2x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的,有 $|\sin 2x|\leqslant 1$,但也可以取 $M=2$,即 $|\sin 2x|<2$,实际上,M 可以取任何大于 1 的数.

③ 有界性是依赖于区间的,即函数的有界性是函数的局部性质.例如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的,但在区间 $(0,1)$ 内却是无界的.

二、函数的单调性

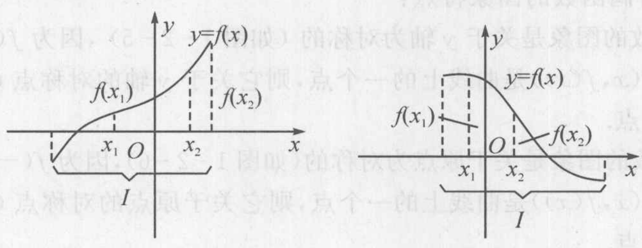
有些函数的函数值随自变量的增大而增大,有些函数的函数值随自变量的增大而减小,这样的函数称为单调函数.单调函数之所以重要是由于单调函数存在反函数.

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,其上一区间为 I,即 $I\subset D$,如果对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称为函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的;当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数.

单调函数的图象特点:

① 单调增加函数的图象是沿 y 轴正向逐渐上升的,单调减少函数的图象是沿 x 轴正向逐渐下降的,如图 1-2-2(a),(b).



(a) (b)

图 1-2-2

② 单调性是依赖区间的,即函数的单调性是函数的局部性质.例如,函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调增加的,在区间 $(-\infty,0)$ 上是单调减少的;而在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f(x)=x^2$ 不是单调的,如图 1-2-3 所示.

又例如,函数 $f(x)=x^3$,其图形称为立方抛物线,在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加的,如图 1-2-4 所示.