严维军
温立书
刘　琨
张黎丽
编著

计算机数学基础

- 以知识应用为目的，注重数学模型求解
- 培养学生解决实际问题的数学思维
- 强化实际问题转化为数学模型的能力

清华大学出版社

计算机数学基础

严维军　温立书　刘琨　张黎丽　编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书针对高职高专计算机类专业、信息及经济管理类专业、电子商务等专业的特点组织编写，以必需、够用为度，重视概念、强调应用、侧重计算。

本书分成线性代数、概率论和离散数学3个部分，共9章。主要内容有行列式、矩阵及其运算、线性方程组、随机事件与概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、集合与关系、图论初步、数理逻辑初步等，并有附录供参考。

本书可作为高职高专计算机类专业、信息及管理类专业、电子商务专业的数学教材使用，也可供相关技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

计算机数学基础/严维军，温立书，刘琨，张黎丽，编著. —北京：清华大学出版社，2008.9

ISBN 978-7-302-18464-5

Ⅰ.计… Ⅱ.①严…②温…③刘…④张… Ⅲ.高等数学—计算机辅助教学—教学研究 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第132657号

责任编辑：王 军 李维杰
装帧设计：康 博
责任校对：胡雁翎
责任印制：何 芊
出版发行：清华大学出版社　　地 址：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　邮 编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京市清华园胶印厂
经 销：全国新华书店
开 本：185×230　印 张：11.5　字 数：266千字
版 次：2008年9月第1版　印 次：2008年9月第1次印刷
印 数：1～4000
定 价：20.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　产品编号：030749－01

前　言

对于高职高专的计算机类专业、信息及管理类专业、电子商务等专业的学生来说，学习时都需要一定的数学基础，从而为后续专业课奠定基础，本书则是专为此类高职专业学生量身定做的“计算机数学基础”课程的教材。考虑到高职专业的特点和培养面向应用型人才的目标定位，同时基于“够用、实用”的原则并考虑到课程教学时数的限制，本书有选择地介绍了线性代数、概率论和离散数学中最基本的概念、方法和理论。因此，本书的编写思想在于将上述线性代数、概率论和离散数学这几门学科的内容进行简化并整合在一起作一个导引性的介绍，除了必要且简单的证明之外，一般不给出定理的数学证明。与此同时，考虑到高职专业的特点，在必要的地方还介绍了这些数学思想和方法在实际中的若干应用，使学生对计算机科学和信息管理类的数学基础与这些数学思想和方法可能的应用有一个总体的了解和把握，达到学习的目的。因此，本书在线性代数部分，主要介绍行列式的概念、矩阵的思想和方法，以及求解线性方程组的基本思路；在概率论部分，着重介绍了概率论的基本概念、基本的概率计算方法、随机变量及其概率分布、随机变量及其数字特征；在离散数学部分，介绍了集合论、简单的图论方法和数理逻辑初步。

本书的特色也体现在下述几个方面：

1. 重视基本概念

引入概念，力求从身边的实际问题出发，自然地引出基本概念，以激发学生的兴趣和求知欲。在弄清基本概念的基础上，理顺基本概念和各个概念之间的联系，提高教学效果。在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，而更多的是让学生体会数学的本质以及数学的价值。

2. 侧重运算、解题能力

根据高职学生的特点，力求内容深入浅出、论证简明易懂，侧重于运算、解题能力的训练，让学生在弄清基本概念的基础上熟悉运算过程、掌握解题方法，最后达到提高运算速度、增强解题能力的目的。

3. 强调实际应用

本着学习数学是为了使用数学这一宗旨，并考虑到高职高专教育的目标是培养应用性人才，书中选择了一些与实际生活贴近的例题和习题，以提高运用相关数学知识解决

实际问题的意识和能力。

本书分 3 部分，第 1 部分线性代数由温立书编写，第 2 部分概率论由刘琨和张黎丽编写，第 3 部分离散数学由严维军编写，严维军负责全书的统稿。

本书是在高职人才培养改革实践的过程中诞生的，限于编者的水平及教材改革新模式的初次尝试，书中难免有错漏及欠妥之处，诚恳希望使用本教材的教师与学生提出宝贵意见，以利进一步的修改与提高。

编　者

目　录

第 1 部分

线 性 代 数

第 1 章　行 列 式

本章主要介绍行列式的概念、性质和计算, 解方程组的克莱姆法则.

1.1　二阶与三阶行列式

1.1.1　二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1–1}$$

分别消去 x_2 和 x_1 可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 求得方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1–2}$$

式 (1–2) 中的分子和分母都是四个数分两对相乘再相减而得. 其中分母 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 是由方程组 (1–1) 的四个系数确定的, 把这四个数按它们在方程组中的位置, 排成二行二列(横排称行, 竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1–3}$$

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为数表(1–3)所确定的**二阶行列式**, 并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1–4}$$

数 a_{ij} $(i = 1,2;\ j = 1,2)$ 称为行列式 (1–4) 的**元素**. 其中 i 称为**行标**, j 称为**列标**, 表明该元素位于行列式中第 i 行, 第 j 列.

为了便于记忆上述行列式, 我们可用**对角线法则**, 即把 a_{11} 到 a_{22} 的连线称为**主对角**

线, 把 a_{12} 到 a_{21} 的连线称为**副对角线**, 于是二阶行列式便是主对角线上的元素之积减去副对角线上元素之积所得的差.

利用上述二阶行列式的概念, 方程组 (1–1) 的解就可以用二阶行列式来表达了. 为了使表达简洁统一, 我们引入以下记号:

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

于是方程组的解可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

这里我们可以看出: D、D_1、D_2 的组成有一定规律, D 是由方程组的系数所确定的二阶行列式, 称为**系数行列式**; D_1 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21} 所得的二阶行列式; D_2 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}、a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1–1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 - 2x_2 = -3 \end{cases}$$

解 $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -7 \neq 0$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 8 \times (-2) - 3 \times (-3) = -7$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) - 8 \times 1 = -14$$

故方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-7}{-7} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-14}{-7} = 2$$

1.1.2 三阶行列式

定义 1–1 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1–5}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1–6}$$

式 (1–6) 称为数表 (1–5) 所确定的**三阶行列式**.

由上述定义可见, 三阶行列式含 6 项, 每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号, 其规律仍然遵循相应的对角线法则 (如图 1–1(a) 所示). 另外, 我们还可以利用沙路法则来得到这 6 项 (如图 1–1(b) 所示).

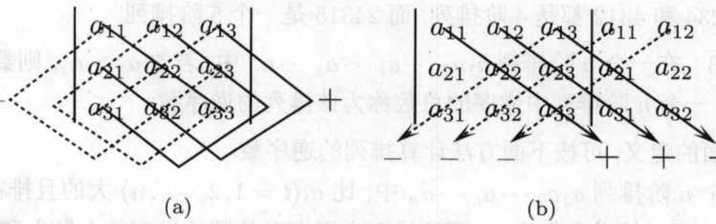

图 1–1

例 1–2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

解 按照对角线法则, 有

$$\begin{aligned} D &= 1 \times 2 \times (-2) + 2 \times 1 \times (-3) + (-4) \times (-2) \times 4 \\ &\quad -1 \times 1 \times 4 - 2 \times (-2) \times (-2) - (-4) \times 2 \times (-3) \\ &= -14 \end{aligned}$$

例 1–3　求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

解　方程左端的三阶行列式为

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12 = x^2 - 5x + 6$$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 解得 $x = 2$ 或 $x = 3$

1.2　排列及其逆序数

大家在高中的时候已经学习了排列和组合, 在这里我们要引入自然数全排列的逆序数, 为后面引入 n 阶行列式做准备.

定义 1–2　由自然数 $1, 2, \cdots, n$ 组成的不重复的每一种有确定次序的排列, 称为一个 n **阶排列**(简称排列).

例如, 1234 和 4312 都是 4 阶排列, 而 24315 是一个 5 阶排列.

定义 1–3　在一个 n 阶排列 $a_1a_2\cdots a_t\cdots a_s\cdots a_n$ 中, 若数 $a_t > a_s$, 则数 a_t 与 a_s 构成一个**逆序**. 一个 n 阶排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**.

根据上面的定义, 可按下面方法计算排列的逆序数:

设在一个 n 阶排列 $a_1a_2\cdots a_t\cdots a_n$ 中, 比 $a_t(t = 1, 2, \cdots, n)$ 大的且排在 a_t 前面的数共有 t_i 个, 则 a_t 的逆序数为 t_i, 而该排列中所有自然数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数 t. 即

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

定义 1–4　逆序数为奇数的排列称为**奇排列**, 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例 1–4　求排列 32514 的逆序数.

解　因为 3 排在首位, 故其逆序数为 0;

在 2 的前面且比 2 大的数有 1 个, 故其逆序的个数为 1;

在 5 的前面且比 5 大的数有 0 个, 故其逆序的个数为 0;

在 1 的前面且比 1 大的数有 3 个, 故其逆序的个数为 3;

在 4 的前面且比 4 大的数有 1 个, 故其逆序的个数为 1.

将上述结果排成如下形式

$$\begin{array}{cccccc} \text{排列} & 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_i & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}$$

则所求排列的逆序数为

$$t = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5$$

1.3 n 阶行列式的定义

定义 1–5 排成 n 行 n 列的 n^2 个数 $a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 组成的记号

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**, 其中横排称为**行**, 竖排称为**列**, 它表示所有取自不同行, 不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和, 各项的符号是: 当该项各元素的行标按自然数顺序排列后, 若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号; 是奇排列则取负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中, $j_1j_2\cdots j_n$ 为自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, t 为这个排列的逆序数. n 阶行列式简记作 $\det(a_{ij})$, 数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素. 称

$$(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

为行列式的**一般项**.

注: (1) n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和, 且冠以正号的项和冠以负号的项(不包括元素本身所带的负号)各占一半, 因此, 行列式实质上是一种特殊定义的数;

(2) $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^t$ (不包括元素本身所带的符号);

(3) 当 $n = 1$ 时, 一阶行列式 $|a| = a$, 注意不要与绝对值记号相混淆.

根据 n 阶行列式的定义, 我们不难得出下列几种特殊行列式的值:

主对角线下(上)的元素都为 0 的行列式叫做**上(下)三角(形)行列式**. 非主对角线上元素全为 0 的行列式叫做**对角行列式**.