

吉林师范大学数学函授教材

綫性代数講义

高緒珏 賀昌亭編

吉林师范大学函授教育处

1962.1 長春

目 录

第一章 矩陣

- § 1. 矩陣..... (1)
- § 2. 特征多項式与最小多項式..... (7)
- § 3. 分块矩陣..... (14)

第二章 綫性空間

- § 4. 綫性空間的定义和例子..... (24)
- § 5. 綫性相关性..... (26)
- § 6. 基底与坐标..... (29)
- § 7. 子空間、子空間的直接和..... (32)
- § 8. 同構..... (38)

第三章 綫性空間上的綫性函数

- § 9. 綫性型、双綫性型..... (41)
- § 10. 綫性变換..... (50)

第四章 基底的变換

- § 11. 更換基底的公式..... (61)
- § 12. 向量坐标的变化..... (64)
- § 13. 双綫性型陣的变化..... (65)
- § 14. 綫性变換陣的变化..... (68)

第五章 二次型的标准形

- § 15. 化二次形为标准形..... (72)
- § 16. 标准形的唯一性..... (83)

§ 17. 恒正型.....	(86)
----------------	------

第六章 綫性变換的标准形

§ 18. 特征向量.....	(91)
§ 19. 不变因式.....	(96)
§ 20. 数元矩陣相似的判定.....	(105)
§ 21. 若唐法式.....	(115)
§ 22. 其它法式.....	(122)

第七章 酉空間与欧氏空間

§ 23. 酉空間与欧氏空間的定义.....	(132)
§ 24. 共軛变換.....	(147)
§ 25. 酉(欧氏)空間的綫性变換.....	(151)
§ 26. 酉空間的二次型.....	(171)

第一章 矩 陣

本章主要目的是介紹在以后討論中要用到的关于矩陣的某些知識。

§ 1. 矩 陣

1. 矩陣的运算。

在高等代数中，我們曾介紹了矩陣的定义以及矩陣的加法和乘法，并且对于这两种运算的性質作了討論，得到下面的一些簡單性質：

$$(1) (A+B)+C=A+(B+C)$$

$$(2) (A+B)=B+A$$

$$(3) A+0=0+A$$

$$(4) (AB)C=A(BC)$$

$$(5) (A+B)C=AC+BC$$

$$(6) C(A+B)=CA+CB \text{ (此处 } A, B, C \text{ 代表数体 } F \text{ 上的矩陣, } 0 \text{ 代表 } 0 \text{ 陣)}.$$

为了以后討論的需要，再补充規定数体 F 中的数 α 与 F 上的陣的乘法。

若 $A = \| a_{ij} \|$ 是数体 F 上的 m 行 n 列矩陣， α 是 F 中任意数。我們規定 $\alpha A = A\alpha = \| \alpha a_{ij} \|$ 。

$$\text{例1. } 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 21 \\ 49 & -35 \end{vmatrix};$$

$$-5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & -15 \\ -20 & 0 \\ -10 & -5 \end{vmatrix}.$$

由数与矩陣乘法的定义以及矩陣加法和乘法，还可以得到下

面的一些性質：

$$(7) 1 \cdot A = A;$$

$$(8) 0 \cdot A = 0;$$

$$(9) (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A;$$

$$(10) \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A;$$

$$(11) \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;$$

$$(12) \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B). \quad (\text{此处 } \alpha, \beta \text{ 是数体 } F \text{ 中任意数, } A, B \text{ 是 } F \text{ 上的矩陣}).$$

这里只証明 (10) 式成立, 其余各等式的証明当作練習。

令 $A = \| a_{ij} \|$, 由数与矩陣的乘法定义知:

$$\alpha(\beta A) = \alpha \| \beta a_{ij} \| = \| \alpha(\beta a_{ij}) \| = \| (\alpha\beta) a_{ij} \| = (\alpha\beta) A.$$

所以 $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A.$

2. 轉置陣.

在高等代数中, 曾把以

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的行为列所作的矩陣

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做 A 的轉置矩陣. 并且記作 A' 。

由矩陣乘法以及数与矩陣的乘法, 可以証明.

$$(\alpha A + \beta A)' = \alpha A' + \beta B'$$

$(AB)' = B'A'$ (此处 α, β 是数体 F 中任意二数; A, B 是数体 F 上二矩陣).

第一个等式的証明比較容易, 此处不再贅述. 下面只証明第二个等式成立.

只要能証出 $(AB)'$ 和 $B'A'$ 中第 i 行第 j 列的元素对应相等即可. 令 $A = \| a_{ij} \|$, $B = \| b_{ik} \|$, ($i=1, 2, \dots, m; j=1, \dots,$

$n; k=1, \dots, s)$

$(AB)'$ 的第 i 行第 j 列元素, 应为 AB 的第 j 行第 i 列元素. 所以 $(AB)'$ 的第 i 行 j 列元素是:

$$a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \dots + a_{jn}b_{ni}.$$

而上式是 B' 的第 i 行元素与 A' 的第 j 列的对应元素之积的和.

故由矩阵乘法定义知上式是 $B'A'$ 中第 i 行第 j 列元素. 所以

$$(AB)' = B'A' \text{ 成立.}$$

当 A 是非蜕化方阵时, 由

$$AA^{-1} = E$$

由转置规则得

$$(AA^{-1})' = (A^{-1})'A' = E \quad (\text{因 } E' = E).$$

$$(A^{-1}A)' = A'(A^{-1})' = E.$$

由逆阵定义故有:

$$(A^{-1})' = (A')^{-1}.$$

上面这个等式表明, 当 A 是非蜕化阵时, A^{-1} 的转置阵是 A 的转置阵 A' 的逆阵.

下面介绍几个常见的特殊方阵.

设 A 是 n 阶方阵, 若 $A' = A$ 时, 则称 A 为对称方阵.

若 $A' = -A$ 时, 则称 A 为反对称方阵.

容易看出, 当 $A' = A$ 时, 则 $a_{ij} = a_{ji}$, 即在 A 中对于主对角线对称的元素一定相等, 反之也对.

当 $A' = -A$ 时,

$$\text{则有} \quad \begin{cases} a_{ji} = -a_{ij} \quad (i \neq j) \\ a_{ii} = 0, \end{cases}$$

亦即, 在反对称阵中, 对于主对角线对称的元素只差一个符号, 而主对角线上的元素全为 0. 反之, 满足上述条件的阵必为反对称阵.

下面来看一下对称阵和反对称阵的性质.

i) 若 A 和 B 都是对称阵时, 由 $(A+B)' = A' + B'$, 则有 $(A+B)' = A+B$ 即对称阵之和仍为对称阵.

ii) 若 A 和 B 都是反对称陣时, 則 $A+B$ 也必是反对称陣.

事实上, 因 $(A+B)' = A' + B'$ 而 $A' = -A$, $B' = -B$

所以 $(A+B)' = (-A) + (-B) = -(A+B)$.

iii) 若 $A' = A$, 則 $-A$ 也是对称陣.

事实上, 因

$$\begin{aligned} -A &= (-1)A, \text{ 所以 } (-A)' = [(-1)A]' = \\ &= (-1)A' = (-1)A = -A. \end{aligned}$$

iv) 若 $A' = -A$, 則 $-A$ 也是反对称陣.

事实上, 因

$$\begin{aligned} -A &= (-1)A, \text{ 所以 } (-A)' = [(-1)A]' = \\ &= (-1)A' = -1(-A) = -(-A). \end{aligned}$$

綜此可見, 一切 (反) 对称陣关于陣的加法構成一切方陣所構成的加群的子群.

令 A 是 n 阶方陣, 如果

$AA' = E$, 即 $A' = A^{-1}$ 时, 則称 A 为正交陣.

由行列式的性質可知,

当 $AA' = E$ 时,

$$|AA'| = |A||A'| = |A|^2 = 1,$$

所以 $|A| = \pm 1$. 即正交陣的行列式等于 ± 1 .

对于正交陣來說可推出下面的一些簡單性質:

v) 当 A 是正交陣时, 由于

$$(A^{-1})' = (A')^{-1} = (A^{-1})^{-1}$$

所以 A^{-1} 也是正交陣.

vi) 若 A 与 B 都是正交陣时, 則 AB 也是正交陣.

事实上, 当 $A' = A^{-1}$, $B' = B^{-1}$ 时,

則有

$$(AB)' = B'A' = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$$

即 AB 是正交陣. 綜合v)、vi) 可見数体 F 上一切 n 阶正交陣的集合关于方陣的乘法構成一个滿秩陣所構成的乘群的子群.

(正交群)

若 $A = \| a_{ij} \|$ ，則称 $\| \overline{a_{ij}} \|$ 为 A 的共軛陣 (其中 $\overline{a_{ij}}$ 代表元素 a_{ij} 的共軛复数，即若 $a_{ij} = x + iy$ ，此处 $\overline{a_{ij}} = x - iy$)。

由共軛复数的性質，容易証明：

$$\overline{\alpha A + \beta B} = \overline{\alpha A} + \overline{\beta B}$$

$$\overline{AB} = \overline{A} \overline{B}$$

$$\overline{A'} = (\overline{A})'$$

$$\overline{A^{-1}} = (\overline{A})^{-1} \quad (\text{当 } |A| \neq 0)$$

如果 $\overline{A'} = A$ 时，則称陣 A 为安密达对称陣，或簡称为安密达矩陣。

若 n 阶方陣 U 滿足条件：

$$U \overline{U'} = E, \text{ 即 } \overline{U'} = U^{-1} \text{ 时，則称陣 } U \text{ 为酉陣。}$$

如同正交陣，可以証明酉陣之逆陣仍为一酉陣，二酉陣之积仍为一酉陣。

由此可見一切 n 阶酉陣的集合，关于陣的乘法構成一个群 (通常称为酉群)。

由共軛数的性質可以推出：

$$|\overline{A}| = |A|$$

所以当 U 是酉陣时，即 $U \overline{U'} = E$ ，

对上式兩端取行列式，則有

$$|U| |\overline{U'}| = 1 \text{ 但 } |\overline{U'}| = |\overline{U}| = \overline{|U|}$$

$$\text{所以 } |U| |\overline{U'}| = |U| \overline{|U|} = |U| \overline{|U|} = |U| \overline{|U|} = 1.$$

亦即酉陣的行列式的模的平方等于 1。

容易看出，当 A 的元素全为实数时，对称陣与安密达对称陣相同，酉陣与正交陣相同。

最后再介紹一下方陣多項式。

設 $\varphi(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n$ 是数体 F 上的 λ 的多項式。 A 是 F 上的 n 阶方陣。表示式

$$a_0 E + a_1 A + \dots + a_n A^n$$

称为陣 A 的多項式，記做 $\varphi(A)$ 。(此处 E 是 n 阶單位陣)。

如果 $\varphi(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_n\lambda^n$

$$\psi(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \cdots + \beta_n\lambda^n,$$

則由多項式加法有

$$f(\lambda) = \varphi(\lambda) + \psi(\lambda) = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)\lambda + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\lambda^n$$

$$g(\lambda) = \varphi(\lambda)\psi(\lambda) = \alpha_0\beta_0 + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)\lambda + \cdots + \alpha_n\beta_n\lambda^n.$$

由陣的運算法則中推出的性質 (1) — (12) 可以推出

$$f(A) = \varphi(A) + \psi(A)$$

$$g(A) = \varphi(A)\psi(A)$$

由於對於多項式來講: $f(\lambda) = \varphi(\lambda)\psi(\lambda) = \psi(\lambda)\varphi(\lambda)$

所以

$$\varphi(A)\psi(A) = \psi(A)\varphi(A) \text{ 成立.}$$

由此可見, 同一方陣的二多項式可換.

由方陣多項式的定義可以看出, $\varphi(A)$ 仍為數體 F 上的 n 階方陣.

例2. 設 $\varphi(\lambda) = -2 - 5\lambda + 3\lambda^2$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} \text{則 } \varphi(A) &= -2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^2 \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ -15 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 & 12 \\ 18 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

習 題

1. 証明:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

是酉陣.

2. 若 $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_n \end{bmatrix}$. 試給出 A 是正交 (酉) 陣的充分必要條件.

3. 若 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 求 A^{-1}

若 $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 求 A^n .

4. 若 $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

試求出一切与 A 可換的陣 B .

5. 若陣 A 滿足条件:

$$A' = A^{-1}, A^{-1} = \bar{A}'$$

則陣 A 中的元素必为实数..

6. 証明: 任意 n 阶方陣都能表为对称陣与反对称陣之和.

7. 若陣 I 滿足条件: $I^2 = E$, 則称为 I 对合陣. 証明

i) 若 $A = A'$, $A' = A^{-1}$ 則 A 是对合陣.

ii) 若 $A = A'$, $A^2 = E$, 則 A 是正交陣.

iii) 若 $A^2 = F$, $A' = A^{-1}$, 則 A 是对称陣.

8. 若 $P^2 = P$, 則称 P 为冪等陣, 証明: 若 P 为冪等陣, 則

$I = 2P - E$ 是对合陣, 反之如 I 为对合陣, 則 $P = \frac{1}{2}(I + E)$ 为冪等陣.

§ 2. 特征多項式与最小多項式

在本节中所討論的陣都是数体 F 上的 n 阶方陣.

1. 相似.

定义. 若 A 与 B 是数体 F 上两个 n 阶方陣, 如果存在 F 上非蜕化方陣 C , 使

$$A = C^{-1}BC \quad (1)$$

則称 A 与 B 相似. 这时, 称 A 为由 B 經 C 演变而得出的陣.

下边来討論一下“相似”这个概念的性質:

(i) 若 A 与 B 相似, 則 B 与 A 相似.

事实上, 当 A 与 B 相似时, 則有 $|C| \neq 0$

使 $A = C^{-1}BC$

以 C 与 C^{-1} 分别左乘和右乘上式, 即得

$$CAC^{-1} = (C^{-1})^{-1}AC^{-1} = B.$$

即 B 与 A 相似.

(ii) 任意方阵都与其自身相似.

事实上, $A = E^{-1}AE$.

(iii) 若 A 与 B 相似, B 与 C 相似. 则 A 与 C 相似.

事实上, 由 A 与 B 相似. 则有阵 X 使

$$A = X^{-1}BX,$$

由 B 与 C 相似而有阵 Y 使阵 X 使

$$B = Y^{-1}CY$$

将 B 代入上式即得

$$A = X^{-1}(Y^{-1}CY)X = (X^{-1}Y^{-1})C(YX) = (YX)^{-1}C(YX)$$

(iv) $f(X^{-1}AX) = X^{-1}f(A)X$.

事实上, 令 $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$

$$[\text{因}(X^{-1}AX)^k = \underbrace{(X^{-1}AX)(X^{-1}AX)\cdots(X^{-1}AX)}_k = X^{-1}A^kX]$$

$$\begin{aligned} \text{则 } f(X^{-1}AX) &= a_0E + a_1X^{-1}AX + \cdots + a_nX^{-1}A^nX \\ &= X^{-1}(a_0E + a_1A + \cdots + a_nA^n)X \\ &= X^{-1}f(A)X. \end{aligned}$$

2. 特征多项式.

定义1. 设 $A = \|a_{ij}\|$ 是 n 阶方阵, λ 是未知量.

$$\text{i) } \lambda E - A = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做 A 的特征矩阵.

ii) $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ 叫作 A 的迹.

iii) $|\lambda E - A| = \varphi(\lambda)$ 叫做 A 的特征多项式.

容易看出 A 的特征多项式是数体 F 上关于 λ 的 n 次多项式, 而且这个多项式中 λ^{n-1} 的系数为阵 A 的迹加一个负号. 因而 A 的

迹等于 A 的特征多项式中 λ^{n-1} 的系数变号。

又因 $\varphi(0) = |0 \cdot E - A| = |-A| = (-1)^n |A|$

所以 $(-1)^n |A|$ 是 $\varphi(\lambda)$ 的常数项。

所以 A 的行列式, 等于它的特征多项式的常数项乘以 $(-1)^n$ 。

关于阵的特征多项式还有下面一个重要性质。

定理1. 若 A 与 B 相似, 则 A 与 B 的特征多项式相同。

证明:

令 $A = C^{-1}BC$, 则

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= |\lambda E - C^{-1}BC| \\ &= |C^{-1}(\lambda E)C - C^{-1}BC| \\ &= |C^{-1}(\lambda E - B)C| \\ &= |C^{-1}| |\lambda E - B| |C| \\ &= |C^{-1}| |C| |\lambda E - B| \\ &= |\lambda E - B| \end{aligned}$$

即 A 的特征多项式与 B 的特征多项式相同。

推论: 若 A 与 B 相似, 则迹 $A = \text{迹 } B$; $|A| = |B|$ 。

事实上, 当 A 与 B 相似时, 由定理1 其特征多项式相同, 而特征多项式中 λ^{n-1} 的系数变号即为其迹, 常数项乘以 $(-1)^n$ 即为其行列式。所以, 迹 $A = \text{迹 } B$; $|A| = |B|$ 。

上面这个结果给出了二方阵相似的必要条件是特征多项式相同。但是这个条件并不是充分的。

例如

$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ 和 $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ 的特征多项式相同。

因 $|\lambda E - E| = (\lambda - 1)^2$, $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^2$

但 E 与 A 并不相似。事实上, 若 A 与 E 相似,

则有 $A = X^{-1}EX = X^{-1}X = E$ 。

但 $A \neq E$ 。所以 A 与 E 不相似。

定义2. A 的特征多项式的根叫做 A 的特征根 (值)。

由根与系数的关系知, 首系数是1的 n 次多项式的 n 个根之

和，等于多项式中未知量 $n-1$ 次幂的系数变号。所以，数体上任意 n 阶方阵 A 的一切特征根之和等于 A 的迹。

关于任意阵 A 的特征多项式与 A 之间还有下面的重要关系。

定理 2 (赫密登——凯莱定理)

A 的特征多项式以 A 为根。〔若 $\varphi(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$ 是 A 的特征多项式，则 $\varphi(A) = a_0E + a_1A + \cdots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n = 0$ 此时称 A 为 $\varphi(\lambda)$ 的根〕。

证明：设 B 为 A 的特征矩阵的附加方阵：

$$B = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{vmatrix}$$

(此处 β_{ij} 是 $\lambda E - A$ 行 i 列元素的代数余子式)

由阵的乘法可知

$$\begin{aligned} B \cdot (\lambda E - A) &= \begin{vmatrix} |\lambda E - A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\lambda E - A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\lambda E - A| \end{vmatrix} \\ &= |\lambda E - A| \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\ &= |\lambda E - A| E. \end{aligned} \quad (1)$$

又因 B 中的元素是 $|\lambda E - A|$ 中各元素的代数余子式，所以 B 中的各元素 β_{ij} 是 λ 的多项式，而且次数不超过 $n-1$ 。

设 $\beta_{ij} = \beta_{ij}^{(0)} + \beta_{ij}^{(1)}\lambda + \cdots + \beta_{ij}^{(n-1)}\lambda^{n-1}$

利用 β_{ij} 的系数作 n 个辅助方阵：

$$B^{(k)} = \begin{vmatrix} \beta_{11}^{(k)} & \beta_{12}^{(k)} & \cdots & \beta_{1n}^{(k)} \\ \beta_{21}^{(k)} & \beta_{22}^{(k)} & \cdots & \beta_{2n}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n1}^{(k)} & \beta_{n2}^{(k)} & \cdots & \beta_{nn}^{(k)} \end{vmatrix} \quad (k=0, 1, \cdots, n-1)$$

利用上式，由陣的运算有

$$B = B^{(0)} + \lambda B^{(1)} + \dots + \lambda^{n-1} B^{(n-1)}.$$

代入 (1) 式得：

$$(B^{(0)} + \lambda B^{(1)} + \dots + \lambda^{n-1} B^{(n-1)})(\lambda E - A)$$

$$= (\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n) E$$

但

$$(B^{(0)} + \lambda B^{(1)} + \dots + \lambda^{n-1} B^{(n-1)})(\lambda E - A)$$

$$= (-B^{(0)} A) + \lambda(-B^{(1)} A + B^{(0)}) + \lambda^2(-B^{(2)} A + B^{(1)}) + \dots + \lambda^{n-1}(-B^{(n-1)} A + B^{(n-2)}) + \lambda^n B^{(n-1)}$$

比較 λ 的系数得：

$$-B^{(0)} A = \alpha_0 E$$

$$-B^{(1)} A + B^{(0)} = \alpha_1 E$$

$$-B^{(2)} A + B^{(1)} = \alpha_2 E$$

$$-B^{(n-1)} A + B^{(n-2)} = \alpha_{n-1} E$$

$$B^{(n-1)} = E$$

以 A^k ($k=0, 1, \dots, n-1$) 乘第 $k+1$ 个等式相加，左边相加后得 0，即

$$0 = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \alpha A^n$$

是即 $\varphi(A) = 0$ ，因而定理得到証明。

3. 最小多項式

下边来考虑一切以 A 为根的多項式 $f(\lambda)$ (这样的多項式是存在的，比如由定理 2 知至少 A 的特征多項式就是其中的一个)。

定义 首系数为 1，以 A 为根的次数最小的非 0 多項式，叫做 A 的最小多項式。

A 的最小多項式有以下的性質。

(i) 若 $f(\lambda)$ 是 A 的最小多項式，而 $\varphi(A) = 0$ ，則 $f(\lambda) | \varphi(\lambda)$ 。

事实上，由多項式帶余除法：存在 $q(\lambda)$ ， $r(\lambda)$ 使

$$\varphi(\lambda) = q(\lambda)f(\lambda) + r(\lambda)$$

或者 $r(\lambda) = 0$ 或者次数 $r(\lambda) <$ 次数 $f(\lambda)$ 。

而 $\varphi(A) = q(A)f(A) + r(A) = q(A) \cdot 0 + r(A) = 0$

但 $\varphi(A)=0$ 所以 $r(A)=0$.

若 $r(\lambda) \neq 0$, 則与 $f(\lambda)$ 是 A 的最小多項式矛盾. 所以
 $r(\lambda)=0$

即 $\varphi(\lambda)=q(\lambda)f(\lambda)$, 是即 $f(\lambda)|\varphi(\lambda)$.

由定理 2 知任意方陣 A 都是它的特征多項式的根. 所以, 由
(i) 可知 A 的特征多項式被它的最小多項式除尽.

另外, 由 (i) 可以直接推出:

(ii) A 的最小多項式只有一个.

(iii) 若 A 与 B 相似, 則 A 的最小多項式与 B 的最小多項式
相同.

証: 設 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 分別是 A 和 B 的最小多項式. 由于
 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 的首系数都为 1. 所以只須証明 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 互
相整除即可.

設

$$A=C^{-1}BC.$$

由于 $g(A)=g(C^{-1}BC)=C^{-1}g(B)C=0$

所以, 由 (i) 有 $f(\lambda)|g(\lambda)$.

因 A 与 B 相似, 則 B 与 A 也相似. 所以可令

$$B=D^{-1}AD.$$

而 $f(B)=f(D^{-1}AD)=D^{-1}f(A)D=0$

由 (i), 所以 $g(\lambda)|f(\lambda)$.

总此, 証得 $f(\lambda)=g(\lambda)$.

与特征多項式的性質类似, 最小多項式相同也只是二方陣相
似的必要条件.

例如: 方陣

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

的特征多項式分別为:

$$(\lambda-2)(\lambda-3)^2; (\lambda-2)^2(\lambda-3).$$

由于此二多項式不相等, 所以 A 与 B 不能相似, (因相似陣

的特征多项式相同)。

由于,任一最小多项式一定能整除其特征多项式,所以 A 的最小多项式,必是以下几个多项式中的某一个:

$$(\lambda-2); (\lambda-3); (\lambda-3)^2; (\lambda-2)(\lambda-3);$$

$$(\lambda-2)(\lambda-3)^2.$$

但 $A-2E \neq 0, A-3E \neq 0$ 而 $(A-2E)(A-3E) = 0$.

所以 $(\lambda-2)(\lambda-3)$ 是 A 的最小多项式.

用同样的方法,可以断定 B 的最小多项式也是

$$(\lambda-2)(\lambda-3).$$

因此知,最小多项式相同的阵并不一定总相似.

習 題

1. 証明:

$$\text{迹}(\alpha A + \beta B) = \alpha \cdot (\text{迹}A) + \beta \cdot (\text{迹}B).$$

2. 求出以下各阵的特征根:

$$(1) A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(2) B = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

$$(3) C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

3. 求以下各阵的最小多项式:

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

4. 証明: A 的特征多項式与 A 的轉置陣 A' 的特征多項式相同.

$$5. \text{ 若 } A = \begin{vmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & a_n \end{vmatrix}$$

証明: $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 A 的所有特征根.

6. 証明: 迹 $(AB) = \text{迹}(BA)$

7. 在任一 n 阶方陣 A 中, 划去它的第 $i_1, i_2, \dots, i_m$ 行和第 $j_1, j_2, \dots, j_m$ 列后, 所余元素所構成的 $n-m$ 阶子式叫做 A 的 $n-m$ 阶主子式. 証明 A 的特征多項式中, λ^m 的系数等于所有 $n-m$ 阶主子式和乘以 $(-1)^{n-m}$.

8. 証明: AB 与 BA 的特征多項式相同.

§3. 分塊矩陣

1. 分塊陣的运算:

对于任意一个陣来說, 总可以用水平綫和垂綫把它分裂为下面的形式:

$$A = \begin{vmatrix} \overbrace{A_{11}}^{n_1} & \overbrace{A_{12}}^{n_2} & \cdots & \overbrace{A_{1s}}^{n_s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{ms} \end{vmatrix} \begin{matrix} \} t_1 \\ \} t_2 \\ \vdots \\ \} t_m \end{matrix} \quad (1)$$