常微分方程专题研究续论

ChangWeiFenFangChengZhuanTiYanJiuXuLun

甘欣荣 汤光宋 冯丽珠 著

武汉出版社

常微分方程专题研究续论

ChangWeiFenFangChengZhuanTiYanJiuXuLun

甘欣荣 汤光宋 冯丽珠 著

武汉出版社

内容提要

本书以大学常微分方程课程为基础,对常微分方程的重要概念、定理、典型的解题方法与技巧作了深入的研究和推广，书中内容多数是作者近十多年来的研究成果.全书共分为九章，内容包括各种常微分方程（组）的求解、可积类型的延伸与拓广、解题方法的改进及移植等，此书内容新颖，材料充实，解法巧妙，论述严谨，有较强的科学性与实用性。

本书可供高等院校数学与应用数学、信息科学与计算数学专业的本科生和研究生阅读，也可供数学教师及有关科研人员参考。

(鄂)新登字 08 号
图书在版编目(CIP)数据
常微分方程专题研究续论/甘欣荣,汤光宋,冯丽珠著.
-武汉:武汉出版社,2007.8
ISBN 978-7-5430-3707-6
Ⅰ.常… Ⅱ.①甘…②汤…③冯… Ⅲ.常微方程-研究 Ⅳ.0175.1
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 112239号

书　名:常微分方程专题研究续论

著　　者:甘欣荣　汤光宋　冯丽珠
责任编辑:楚　风
封面设计:夏国英　杨　巍　甘　泉
出　版:武汉出版社
社　址:武汉市江汉区新华下路 103 号　　邮　编:430015
电　话:(027)85606403　85600625　85497614(读者服务部)
http://www.whcbs.com　　E-mail:wuhanpress@126.com
印　刷:武汉市新鸿业印务有限责任公司　　经　销:新华书店
开　本:880mm x 1230mm　1/16
印　张:22.25　　字　数:445千字
版　次:2007 年 8 月第 1 版　　2007 年 8 月第 1 次印刷
定　价:38.00 元

序　　言

诞生于十八世纪的常微分方程，它不仅是现代数学中的一门重要学科，而且还是一门正在发展的应用技术学科，因而加强常微分方程的研究，既有理论的意义，也有实际应用的价值。作者之一于1994年出版了《常微分方程专题研究》一书，受到了广大读者的好评，这就更激发了我们对这一课题深入研究的兴趣。我们从常微分方程的书籍文献以及教学研究实践中，发现一些值得深入追究的疑问，需要进一步探讨的问题，全方位、多角度的作了分析研究，采用插缝补缺法，充实与更新其内容，对前人和当代学者的有关成果，从方程的类型、解题的方法上作了推广与改进，拓广其应用的范围，提出了自己的见解，力争有所创新或突破。经过十多年的辛勤耕耘，潜心研究，取得了一系列成果，在此基础上，我们精心构思，巧妙编排，撰写成书，取名为《常微分方程专题研究续论》，它是《常微分方程专题研究》一书的姐妹篇，是它的延伸、拓宽与发展，它是作者十多年来教学、科研成果的结晶。

全书共分为九章，对常微分方程的重要概念、定理、法则、公式、典型的解题方法和技巧都进行了全面深入的研究及拓广。如果读者在阅读此书后，能对自己怎样学习数学，如何发现数学问题，进行数学研究上有所收益，在撰写论文时能从此书中获得启示，发现值得研究的新课题，那将是作者最大的欣慰！

本书由甘欣荣、汤光宋构思并统一定稿，其中第一章、第五章、第六章、第八章、第九章由甘欣荣撰写，第二章、第四章、第七章由冯丽珠撰写，第三章由汤光宋撰写。

在本书付梓之际，我们要感谢武汉大学齐民友教授、北京师范大学严士健教授、华中科技大学廖晓昕教授的鼓励，还要感谢武汉科技大学及江汉大学的领导和同事们的关心，我们在写作过程中参考了不少同行的论著，武汉出版社的领导给予我们真诚的帮助，在此表示最诚挚的谢意!

限于我们的水平与能力，加之时间仓促，本书难免有缺点和错误，殷切希望广大专家、读者批评指正。

作者

2007年秋于汉口

目　　录

第一章 几类一阶微分方程的拓展

微分方程的一个主要问题是"求解"，即把微分方程的解通过初等函数或它们的积分表达出来，但一般的微分方程无法求解，只能是对某些类型通过相应的方法求解，虽然这些方程类型很有限，但对于实际问题中出现的常微分方程却往往用得着，因此掌握这些方程的求法，还是有重要的实际价值的.本章主要研究一阶微分方程 $y'=f(x,y)$ 或 $F(x,y,y')=0$ 的一些经拓展而可解的类型,从而扩大可积方程的范围,扩充在实际中的应用.

§1.1 几类积分公式在微分方程中的应用

我们提出积分公式(证明从略),给出它们在解微分方程中的应用.

1. 几类函数的积分公式及其在解一阶线性微分方程中的应用

公式 1 设 $p(x)$ 是 n 次多项式, α 为常数,则

$$\int p(x)e^{\alpha x}dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}[p(x)-\frac{1}{\alpha}p'(x)+\cdots+\frac{(-1)^n}{\alpha^n}p^{(n)}(x)]$$

(这里积分常数取为零.下同).

定理 1.1 一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}+\alpha y=p(x)$$

(其中 $p(x)$ 为 n 次多项式, α 为非零常数)的通解为

$$y=ce^{-\alpha x}+\frac{1}{\alpha}[p(x)-\frac{1}{\alpha}p'(x)+\cdots+\frac{(-1)^n}{\alpha^n}p^{(n)}(x)]$$

(这里 c 为任意常数.下同).

证 方程的通解为

$$\begin{aligned}y&=ce^{-\alpha x}(\int p(x)e^{\alpha x}dx+c)\\&=ce^{-\alpha x}+\frac{1}{\alpha}[p(x)-\frac{1}{\alpha}p'(x)+\cdots+\frac{(-1)^n}{\alpha^n}p^{(n)}(x)].\end{aligned}$$

例 1. 解方程 $\dfrac{dy}{dx}+3y=x^2-2x+7$.

解 由定理 1.1 得方程的通解为

$$\begin{aligned}y&=ce^{-3x}+\frac{1}{3}[x^3-2x+7-\frac{1}{3}(3x^2-2)+\frac{1}{3^2}\cdot 6x-\frac{1}{3^3}\cdot 6]\\&=ce^{-3x}+\frac{1}{3}(x^3-x^2-\frac{4}{3}x+\frac{67}{9}).\end{aligned}$$

公式 2 设 $p(x)$ 是 n 次多项式, n 为正整数, 则

$$\int\frac{p(x)}{x^{n-1}}dx=\frac{1}{(-1)^n n!}[(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{p(x)}{x^n}-(-1)^{n-2}(n-2)!\frac{p'(x)}{x^{n-1}}+\cdots+(-1)^n p^{(n)}(x)\ln x]$$

定理 1.2 一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}+\frac{p'(x)}{p(x)}y=\frac{1}{x^{n+1}}$$

(其中 $p(x)$ 是 n 次多项式，n 为正整数)的通解为

$$y=\frac{c}{p(x)}+\frac{1}{(-1)^n n!\,p(x)}[(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{p(x)}{x^n}-(-1)^{n-2}(n-2)!\frac{p'(x)}{x^{n-1}}+\cdots+(-1)^n p^{(n)}(x)\ln x].$$

事实上,方程的通解为

$$y=e^{-\int\frac{p'(x)}{p(x)}dx}(\int\frac{1}{x^{n+1}}e^{\int\frac{p'(x)}{p(x)}dx}dx+c)=\frac{c}{p(x)}+\frac{1}{p(x)}\int\frac{p(x)}{x^{n-1}}dx$$

再利用公式 2,即得定理的结论.

例 2. 解方程 $y'+\frac{2(x-1)}{x^2-2x+3}y=\frac{1}{x^3}$.

解 令 $p(x)=x^2-2x+3, n=2$, 依定理 1.2 得方程的通解为

$$y=\frac{c}{x^2-2x+3}+\frac{1}{2(x^2-2x+3)}(-\frac{x^2-2x+3}{x^2}-\frac{2x-2}{x}+2\ln x)$$

$$=\frac{c}{x^2-2x+3}+\frac{1}{2(x^2-2x+3)}(-3+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}+2\ln x).$$

公式 3 设 $p(x)$ 是 n 次多项式，则 $\int p(x)\ln x dx=\ln x\cdot\int p(x)dx-\int\frac{\int p(x)dx}{x}dx.$

定理 1.3 一阶非齐次线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+\frac{p'(x)}{p(x)}y=\ln x$, (其中 $p(x)$ 是 n 次多项式)

的通解为 $y=\frac{c}{p(x)}+\frac{1}{p(x)}[\ln x\cdot\int p(x)dx-\int\frac{\int p(x)dx}{x}dx].$

事实上,依照定理 1.2 的证明方法,方程的通解为

$$y=\frac{c}{p(x)}+\frac{1}{p(x)}\int p(x)\cdot\ln x\,dx$$

再利用公式 3,即得定理的结论.

例3. 解方程 $y'+\frac{3x^2-4x}{x^3-2x^2+7}y=\ln x.$

解 令 $p(x)=x^3-2x^2+7$, 由定理 1.3 得方程的通解为

$$y=\frac{c}{x^3-2x^2+7}+\frac{1}{x^3-2x^2+7}[\int(x^3-2x^2+7)dx\cdot\ln x-\int\frac{\int(x^3-2x^2+7)dx}{x}dx]$$

$$=\frac{c}{x^3-2x^2+7}+\frac{1}{x^3-2x^2+7}[(\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+7x)\ln x-(\frac{1}{16}x^4-\frac{2}{9}x^3+7x)].$$

公式 4 设 $p(x)$ 是 n 次多项式，则 $\int p(x)arctgxdx = arctgx\cdot\int p(x)dx - \int\frac{\int p(x)dx}{1+x^2}dx.$

定理 1.4 一阶非齐次线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+\frac{p'(x)}{p(x)}y = arctgx$（其中 $p(x)$ 是 n 次多项式）的通解为

$$y=\frac{c}{p(x)}+\frac{1}{p(x)}[arctgx\cdot\int p(x)dx-\int\frac{\int p(x)dx}{1+x^2}dx].$$

例 4. 解方程 $y'+\frac{1}{x}y = arctgx.$

解 令 $p(x)=x$, 由定理 1.4 得方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= \frac{c}{x}+\frac{1}{x}[arctgx\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx] \\ &= \frac{c}{x}+\frac{1}{x}(\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctgx) \\ &= \frac{c}{x}+\frac{x^2+1}{2x}arctgx-\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

公式 5 (1) $\int\frac{e^{ax}}{e^{ax}+b}dx=\frac{1}{a}\ln(e^{ax}+b)$, (2) $\int\frac{nae^{ax}}{(e^{ax}+b)^{n+1}}dx=-\frac{1}{(e^{ax}+b)^n}.$

(其中 a,b 为非零常数，n 为正整数).

类似于前面的方法易得

定理 1.5 (1) 一阶非齐次线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+ay=\frac{1}{e^{ax}+b}$ 的通解为

$$y=ce^{-ax}+\frac{e^{-ax}}{a}\ln(e^{ax}+b);$$

(2) 一阶非齐次线性微分方程 $\frac{dy}{dx}-ky=\frac{nae^{(a+k)x}}{(e^{ax}+b)^{n+1}}$ 的通解为

$$y=ce^{kx}-\frac{e^{kx}}{(e^{ax}+b)^n}$$

(这里的 a,b,k 为非零常数，n 为正整数).

例4. 解方程

(1) $y'+y=\frac{1}{e^x+1}$; (2) $y'-y=(1+e^{-x})^{-2}.$

解 (1) 令 $a=1,b=1$, 由定理 1.5 知方程的通解为

$$y=e^{-x}[c+\ln(e^x+1)]$$

(2) 方程可变形为 $y'-y=\dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$，

令 $a=1,b=1,n=1,k=1$,依据定理 1.5 的(2)得方程的通解为

$$y=ce^x-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}=e^x[c-(e^x+1)^{-2}].$$

公式 6 (1) $$\int e^{ax}\sin e^{bx}dx=-\frac{1}{b}e^{(a-b)x}\cos e^{bx}+\frac{a-b}{b^2}e^{(a-2b)x}\sin e^{bx}-\frac{(a-b)(a-2b)}{b^2}\int e^{(a-2b)x}\sin e^{bx}dx$$

(2) $$\int e^{ax}\cos e^{bx}dx=\frac{1}{b}e^{(a-b)x}\sin e^{bx}+\frac{a-b}{b^2}e^{(a-2b)x}\cos e^{bx}-\frac{(a-b)(a-2b)}{b^2}\int e^{(a-2b)x}\cos e^{bx}dx$$

(其中 a,b 为非零常数).

定理 1.6 (1) 一阶非齐次线性微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+ay=\sin e^{bx}$ 的通解为

$$y=ce^{-ax}-\frac{1}{b}e^{-bx}\cos e^{bx}+\frac{a-b}{b^2}e^{-2bx}\sin e^{bx}-\frac{(a-b)(a-2b)}{b^2}e^{-ax}\int e^{(a-2b)x}\sin e^{bx}dx$$

(2) 一阶非齐次线性微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+ay=\cos e^{bx}$ 的通解为

$$y=ce^{-ax}+\frac{1}{b}e^{-bx}\sin e^{bx}+\frac{a-b}{b^2}e^{-2bx}\cos e^{bx}-\frac{(a-b)(a-2b)}{b^2}e^{-ax}\int e^{(a-2b)x}\cos e^{bx}dx$$

(其中 a,b 为非零常数).

证 (1)、(2)的证明方法类似，仅证(1)，方程的通解为

$$y=e^{-ax}[\int(\sin e^{bx})\cdot e^{ax}dx+c]=ce^{-ax}+e^{-ax}\int e^{ax}\sin e^{bx}dx$$

$$=ce^{-ax}-\frac{1}{b}e^{-bx}\cos e^{bx}+\frac{a-b}{b^2}e^{-2bx}\sin e^{bx}-\frac{(a-b)(a-2b)}{b^2}e^{-ax}\int e^{(a-2b)x}\sin e^{bx}dx.$$

例 6. 解方程 (1) $y'-y=\sin e^{-x}$， (2) $y'+2y=\cos e^{x}$.

解 (1) 令 $a=-1,b=-1$，依定理 1.6 的(1)得方程的通解为 $y=e^{x}(c+\cos e^{-x})$;

(2) 令 $a=2,b=1$，依定理 1.6 的(2) 得方程的通解为

$$y=ce^{-2x}+e^{-x}\sin e^{x}+e^{-2x}\cos e^{x}.$$

公式 7 $\int e^{ax}\cdot e^{e^{ax}}dx=\frac{1}{a}e^{e^{ax}}$ (其中为非零常数).

定理 1.7 一阶非齐次线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+ay=e^{e^{ax}}$ 的通解为 $y=e^{-ax}(c+\frac{1}{a}e^{e^{ax}})$ 这里 a 为非零常数.

例 7. 解方程 $y'-3y=e^{e^{-3x}}$

解 令 $a=-3$，依定理 1.7 得方程的通解为 $y=e^{3x}(c-\frac{1}{3}e^{e^{-3x}})$.

公式 8 设 $f(x),g(x)\in C^{1},a,b,a_1,b_1,\alpha,\beta,\gamma,\sigma$ 为常数,且满足

$a^2\beta+ab\sigma-ab\alpha-b^2\gamma\neq 0,\ a_1f(x)+b_1g(x)=A[af(x)+bg(x)]+B[af(x)+bg(x)]'$,

$f'(x)=\alpha f(x)+\beta g(x),\ g'(x)=\gamma f(x)+\sigma g(x)$, 则

$$\int\frac{a_1f(x)+b_1g(x)}{af(x)+bg(x)}dx=Ax+B\ln|af(x)+bg(x)|$$

这里的 $A=\frac{a_1a\beta+a_1b\sigma-b_1a\alpha-b_1b\gamma}{a^2\beta+ab\sigma-ab\alpha-b^2\gamma}$，$B=\frac{b_1a-a_1b}{a^2\beta+ab\sigma-ab\alpha-b^2\gamma}$.

其中积分常数取作零.

定理 1.8 设 $f(x),g(x)\in C^{1},a,b,a_1,b_1,\alpha,\beta,\gamma,\sigma$ 为常数,且满足

$a^2\beta+ab\sigma-ab\alpha-b^2\gamma\neq 0,\ a_1f(x)+b_1g(x)=A[af(x)+bg(x)]+B[af(x)+bg(x)]'$,

$$f'(x)=\alpha f(x)+\beta g(x),\ g'(x)=\gamma f(x)+\sigma g(x),\ af(x)+bg(x)>0,$$

则一阶非齐次线性微分方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{af'(x)+bg'(x)}{af(x)+bg(x)}y=a_1f(x)+b_1g(x)$ 的通解为

$$y=[af(x)+bg(x)][Ax+B\ln|af(x)+bg(x)|+c]$$

这里的 $A=\dfrac{a_1a\beta+a_1b\sigma-b_1a\alpha-b_1b\gamma}{a^2\beta+ab\sigma-ab\alpha-b^2\gamma}$，$B=\dfrac{b_1a-a_1b}{a^2\beta+ab\sigma-ab\alpha-b^2\gamma}$.

c 为积分常数.

证 原方程可改写为 $y'-[\ln(af(x)+bg(x))]'y=a_1f(x)+b_1g(x)$

于是 $y=e^{\int[\ln(af(x)+bg(x))]'dx}\{\int[a_1f(x)+b_1g(x)]e^{-\int[\ln(af(x)+bg(x))]'dx}dx+c\}$

$$=[af(x)+bg(x)][\int\frac{a_1f(x)+b_1g(x)}{af(x)+bg(x)}dx+c]$$

再应用公式 8,即可获得原方程的通解.

例8. 解方程 $(5\cos x+2\sin x)\dfrac{dy}{dx}+(5\cos x-2\sin x)y=35\cos^2 x-$

$\sin x\cos x-6\sin^2 x$ (其中$5\cos x+2\sin x>0$).

解 原方程可变形为 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{5(\cos x)'+2(\sin x)'}{5\cos x+2\sin x}y=7\cos x-3\sin x$

令 $a=2,b=5,a_1=-3,b_1=7.f(x)=\sin x,g(x)=\cos x,\ f'(x)=\cos x$,

$\alpha=0,\beta=1,\gamma=-1,\sigma=0,g'(x)=-\sin x$

这里的 $A=\dfrac{2\cdot(-3)+5\times7}{2^2+5^2}=1$, $B=\dfrac{2\times7-5\times(-3)}{2^2+5^2}=1$

$$-3\sin x+7\cos x=1\times(5\cos x+2\sin x)+1\times(5\cos x+2\sin x)'$$

则根据定理 1.8 知,方程的通解为

$$y=(5\cos x+2\sin x)(x+\ln|5\cos x+2\sin x|+c)$$

其中 c 为积分常数.

2. 含分段连续函数的常微分方程初值问题的求解

在公式的启示下,对文献中含分段连续函数的线性常微分方程的初值问题作了推广,进一步提出含分段连续函数的 *Bermoulli* (贝努利)方程的初值问题,以及含分段连续函数的二阶常系数线性微分方程的初值问题,获得了求解这几类初值问题的定理,直接运用定理求解简捷明快.

公式 9 若分段定义的连续函数为

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x<x_1 \\ f_2(x) & x_1\le x<x_2 \\ \cdots & \cdots \\ f_i(x) & x_{i-1}\le x<x_i \\ \cdots & \cdots \\ f_{n+1}(x) & x\ge x_n \end{cases}$$，则 $\int f(x)dx=F(x)+c$，其中

$$F(x)=\begin{cases} F_1(x) & x<x_1 \\ F_2(x)+F_1(x_1)-F_2(x_1) & x_1\le x<x_2 \\ \cdots & \cdots \\ F_i(x)+\sum_{j=1}^{i-1}[F_j(x_j)-F_{j+1}(x_j)] & x_{i-1}\le x<x_i \\ \cdots & \cdots \\ F_{n+1}(x)+\sum_{j=1}^{n}[F_j(x_j)-F_{j+1}(x_j)] & x\ge x_n \end{cases}$$

这里的 $F_j(x)$ 为 $f_j(x)$ 的一个原函数，$j=1,2,\cdots,n+1,c$ 为任意常数.

定理 1.9 初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}，\quad Q(x)=\begin{cases} Q_1(x) & x_0\le x<x_1 \\ Q_2(x) & x_1\le x<x_2 \\ \cdots & \cdots \\ Q_i(x) & x_{i-1}\le x<x_i \\ \cdots & \cdots \\ Q_{n+1}(x) & x\ge x_n \end{cases} \tag{1.1}$$

(其中 $P(x)\in C$，且 $P(x)\ne 0, Q_i(x)\in C^1(i=1,2,\cdots,n+1), y_0, x_j(j=0,1,\cdots,n)$ 为任意常数)的解为

$$y=\begin{cases} e^{-\int P(x)dx}[\int Q_1(x)e^{\int P(x)dx}dx+c_1] & x_0\le x<x_1 \\ e^{-\int P(x)dx}\{\int Q_2(x)e^{\int P(x)dx}dx+c_1+[\int Q_1(x)e^{\int P(x)dx}dx-\int Q_2(x)e^{\int P(x)dx}dx]_{x=x_1}\} & x_1\le x<x_2 \\ \cdots & \cdots \\ e^{-\int P(x)dx}\{\int Q_i(x)e^{\int P(x)dx}dx+c_1+\sum_{j=1}^{i-1}[\int Q_j(x)e^{\int P(x)dx}dx-\int Q_{j+1}(x)e^{\int P(x)dx}dx]_{x=x_j}\} & x_{i-1}\le x<x_i \\ \cdots & \cdots \\ e^{-\int P(x)dx}\{\int Q_{n+1}(x)e^{\int P(x)dx}dx+c_1+\sum_{j=1}^{n}[\int Q_j(x)e^{\int P(x)dx}dx-\int Q_{j+1}(x)e^{\int P(x)dx}dx]_{x=x_j}\} & x\ge x_n \end{cases} \tag{1.2}$$

(其中 $c_1=y_0[e^{\int P(xdx)}]_{x=x_0}-[\int Q_1(x)e^{\int P(xdx)}dx]_{x=x_0}$).

证 依据公式 9,由常数变易法知方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q_1(x)$ 的通解为

$$y_1=e^{-\int P(x)dx}[\int Q_1(x)e^{\int P(x)dx}dx+c_1]$$

由初始条件 $y(x_0)=y_0$ 得 $c_1=y_0[e^{\int P(x)dx}]_{x=x_0}-[\int Q_1(x)e^{\int P(x)dx}dx]_{x=x_0}$

同理 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q_2(x)$ 的通解为

$$y_2=e^{-\int P(x)dx}[\int Q_2(x)e^{\int P(x)dx}dx+c_2]$$

为使解在 $x=x_1$ 处连续, 令 $\lim\limits_{x\to x_1^-}y_1(x)=\lim\limits_{x\to x_1^+}y_2(x)$, 并由递推关系可得

$$c_2=c_1+[\int Q_1(x)e^{\int P(x)dx}dx]_{x=x_1}-[\int Q_2(x)e^{\int P(x)dx}dx]_{x=x_1}$$

于是

$$y_2(x)=e^{-\int P(x)dx}\{\int Q_2(x)e^{\int P(x)dx}dx+c_1+[\int Q_1(x)e^{\int P(x)dx}dx]_{x=x_1}-[\int Q_2(x)e^{\int P(x)dx}dx]_{x=x_1}\}$$

类似,微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q_k(x)$ 及 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q_{k+1}(x)$ 的通解为

$$y_k(x)=e^{-\int P(x)dx}[\int Q_k(x)e^{\int P(x)dx}dx+c_k]$$

$$y_{k+1}(x)=e^{-\int P(x)dx}[\int Q_{k+1}(x)e^{\int P(x)dx}dx+c_{k+1}]$$

为使解在 $x=x_k$ 处连续,令 $\lim\limits_{x\to x_k^-}y_k(x)=\lim\limits_{x\to x_k^+}y_{k+1}(x)$ 并由递推关系可得

$$c_{k+1}=c_k+[\int Q_k(x)e^{\int P(x)dx}dx]_{x=x_k}-[\int Q_{k+1}(x)e^{\int P(x)dx}dx]_{x=x_k}$$

$$=c_1+\sum_{j=1}^{k}[\int Q_j(x)e^{\int P(x)dx}dx]_{x=x_k}-[\int Q_{j+1}(x)e^{\int P(x)dx}dx]_{x=x_j}$$

从而初值问题(1.1)的解由(1.2)给出.

令定理 1.9 中的 $P(x)\equiv a$ 即得

推论 1 初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+ay=Q(x)\\ y(x_0)=y_0\end{cases},Q(x)=\begin{cases}Q_1(x) & x_0\le x<x_1\\ Q_2(x) & x_1\le x<x_2\\ \cdots & \cdots\\ Q_i(x) & x_{i-1}\le x<x_i\\ \cdots & \cdots\\ Q_{n+1}(x) & x\ge x_n\end{cases}$$

(其中 $Q_i(x)\in C^1,i=1,2,\cdots,n+1,a$ 为非零常数，$y_0,x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为任意常数)的解为

$$y=\begin{cases}e^{-ax}(\int Q_1(x)e^{ax}+c_1) & x_0\le x<x_1\\ e^{-ax}\{\int Q_2(x)e^{ax}dx+c_1+[\int Q_1(x)e^{ax}dx-\int Q_2(x)e^{ax}dx]_{x=x_1}\} & x_1\le x<x_2\\ \cdots & \cdots\\ e^{-ax}\{\int Q_i(x)e^{ax}dx+c_1+\sum_{j=1}^{i-1}[\int Q_j(x)e^{ax}dx-\int Q_{j+1}(x)e^{ax}dx]_{x=x_j}\} & x_{i-1}\le x<x_i\\ \cdots & \cdots\\ e^{-ax}\{\int Q_{n+1}(x)e^{ax}dx+c_1+\sum_{j=1}^{n}[\int Q_j(x)e^{ax}dx-\int Q_{j+1}(x)e^{ax}dx]_{x=x_j}\} & x\ge x_n\end{cases}$$

其中 $c_1=y_0e^{ax_0}-(\int Q_1(x)e^{ax}dx)_{x=x_0}$.

例9. 求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+y=f(x)\\ y(0)=1\end{cases},\quad f(x)=\begin{cases}e^{-x} & 0\le x<2\\ e^{-2} & x\ge 2\end{cases}.$$

解 令 $a=1, Q_1(x)=e^{-x}, Q_2(x)=e^{-2}, x_0=0, x_1=2, y_0=1$，依推论 1 或定理 1.9，原初值问题的解为

$$y=\begin{cases} e^{-x}(\int e^{-x}\cdot e^{x}dx+1) & 0\le x<2 \\ e^{-x}(\int e^{-2}\cdot e^{x}dx+2) & x\ge 2 \end{cases}$$

其中 $$c_1=1\times e^{1\times 0}-(\int e^{-x}\cdot e^{x}dx)_{x=0}=1-0=1$$

$$c_1+[\int e^{-x}\cdot e^{x}dx-\int e^{-2}\cdot e^{x}dx]_{x=2}=1+(x-e^{x-2})_{x=2}=2$$

即 $$y=\begin{cases} e^{-x}(x+1) & 0\le x<2 \\ 2e^{-x}+e^{-2} & x\ge 2 \end{cases}.$$

定理 1.10 初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{n} \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}, Q(x)=\begin{cases} Q_1(x) & x_0\le x<x_1 \\ Q_2(x) & x_1\le x<x_2 \\ \cdots & \cdots \\ Q_i(x) & x_{i-1}\le x<x_i \\ \cdots & \cdots \\ Q_{n+1}(x) & x\ge x_n \end{cases} \quad (1.3)$$

(其中 $P(x)\in C, n\ne 0,1, Q_i(x)\in C^1, i=1,2,\cdots,n+1, y_0, x_j, j=0,1,\cdots,n$ 为任意常数)的解为

$$
y^{1-n}=\begin{cases}
e^{(n-1)\int P(x)dx}[(1-n)\int Q_1(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx+c_1] & x_0\le x<x_1\\
e^{(n-1)\int P(x)dx}\{(1-n)\int Q_2(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx+c_1 & x_1\le x<x_2\\
+[(1-n)\int Q_1(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx-\int Q_2(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx]_{x=x_1}\} & \\
\cdots & \cdots\\
e^{(n-1)\int P(x)dx}\{(1-n)\int Q_i(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx+c_1 & x_{i-1}\le x<x_i\\
+(1-n)\sum_{j=1}^{i-1}[\int Q_j(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx-\int Q_{j+1}(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx]_{x=x_j}\} & \\
\cdots & \cdots\\
e^{(n-1)\int P(x)dx}\{(1-n)\int Q_{n+1}(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx+c_1 & x\ge x_n\\
+(1-n)\sum_{j=1}^{n}[\int Q_j(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx-\int Q_{j+1}(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx]_{x=x_j}\} &
\end{cases}\tag{1.4}
$$

其中 $c_1={y_0}^{1-n}[e^{(1-n)\int P(xdx)}]_{x=x_0}-(1-n)[\int Q_1(x)e^{(1-n)\int P(xdx)}dx]_{x=x_0}$.

事实上,作变换 $z=y^{1-n}$，得 $\dfrac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$，于是原函数初值问题转化为

$$
\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)\\ z(x_0)={y_0}^{(1-n)}\end{cases},\quad (1-n)Q(x)=\begin{cases}(1-n)Q_1(x) & x_0\le x<x_1\\ (1-n)Q_2(x) & x_1\le x<x_2\\ \cdots & \cdots\\ (1-n)Q_i(x) & x_{i-1}\le x<x_i\\ \cdots & \cdots\\ (1-n)Q_{n+1}(x) & x\ge x_n\end{cases}
$$

这已是定理 1.9 所研究的情形,故知问题(1.3)的解是(1.4).

例10. 求初值问题

$$
\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}y=Q(x)y^2\\ y(1)=1\end{cases},\quad Q(x)=\begin{cases}-x & 1\le x<2\\ -x^2/2 & 2\le x<4\\ -x^3/8 & x\ge 4\end{cases}.
$$