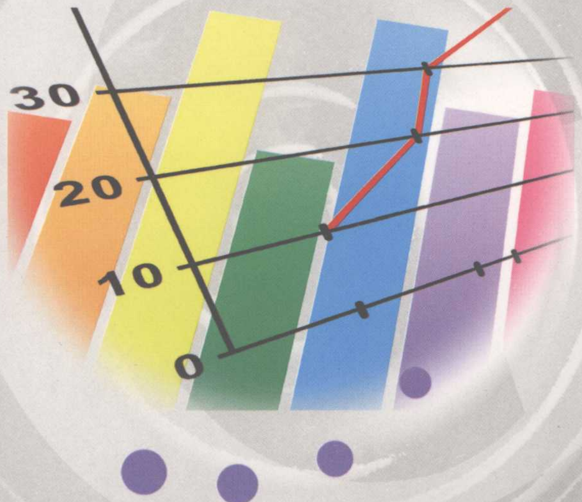
全国高等农林院校“十一五”规划教材

概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULITONGJI

梁保松　主编



中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

概率论与数理统计

梁保松　主编

中 国 农 业 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计／梁保松主编．—北京：中国农业出版社，2008.12

全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-109-13114-9

Ⅰ．概…　Ⅱ．梁…　Ⅲ．①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 175730 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100125）

责任编辑　朱　雷　刘新团

北京中兴印刷有限公司印刷　　新华书店北京发行所发行

2009 年 1 月第 1 版　　2009 年 1 月北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　　印张：15.25

字数：280 千字

定价：22.00 元

内 容 提 要

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材．主要内容有：随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、极限定理、统计推断、方差分析、回归分析等．本书取材广泛，内容丰富，吸纳了管理、经济、生物统计中的实例，突出了应用数学能力的培养，体现了数学建模思想，有一定的广度和深度．

本书章后配有适量习题及综合练习题，其题型包括判断题、填空题、计算题、证明题，以巩固所学内容．一些章节设置了选读选讲内容，保持了内容的连续性和完整性，供教师根据教学要求取舍和报考研究生者选读．书后附有习题参考答案．

全书结构严谨，叙述详细，通俗易学，可作为高等院校农、林、牧、生物、经济、财会等专业的教科书，也可以作为统计工作者的参考书．

主　编　梁保松
副主编　郝新生　吴瑞武　林淑蓉　王建平
参　编　梁保松　吴瑞武　郝新生　王建平
　　　　林淑蓉　杨燕新　刘　雯

前　言

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材．

数学是科学的基本语言，是研究和探索物质世界的重要手段．对现代化的工农业技术和现代化工程而言，数学则是表达技术原理、进行复杂的工程设计和计算必不可少的工具．特别是随着计算机技术的快速发展，数学的社会化程度日益提高，现代化产业和经济的组织与管理，已完全离不开数学所提供的方法和技术．因此，数学在大学教育中占有举足轻重的地位．

数学给予人们的不仅是知识，最重要的是能力．这种能力包括直观思维、逻辑思维、精确计算和准确判断．所以，数学在素质教育中的作用是其他课程无法企及的．

概率论与数理统计是一门应用性极强的课程，内容博大精深．要使学生在有限的学时内深刻地掌握其思想和方法，首先需要有好的教材．对于高等农林院校来说，要培养学生应用于农林技术、农林工程、生物技术等领域的数学思想和方法，在教材内容和体系的安排上就必须体现高等农林教育的特色．

本书按照“十一五”规划高等农林教育数学教材编写大纲的要求，结合作者多年来教学研究和科学研究等方面的成果编写而成．注意渗透现代数学思想，注重体现素质教育和创新能力的培养，以适应现代化农林科学对农林人才数学素质的要求．本书在具体内容的安排上具有以下特点：

一、保持体系完整．全书结构严谨，内容由浅入深，循序渐进，通俗易学，努力突出概率统计的基本思想和基本方法，一方面使学生能够较好地了解各部分的内在联系，从总体上把握概率统计的思想方法；另一方面，培养学生严密的逻辑思维能力．

二、追求简明实用．删去一些烦琐的理论证明，直接地

从客观世界所提供的模型和原理中导出概率统计的基本概念、法则和公式，使表达更加简明；引导学生理解概念的内涵和背景，培养学生用概率统计的思想和方法分析与解决实际问题的能力，注重数学建模思想，突出数学的应用性.

三、体现农林特色.较多地设置了生物科学、生命科学、农林经济管理等方面的实例，突出了概率统计在农林科学中的应用，促进了概率统计与农林专业课程的结合，为学生学习专业，尤其是生物统计课提供了“接口”.

四、一些章设置了选读选讲内容，保持了内容的连续性和完整性，供教师根据教学要求取舍和报考研究生者选学.

参加本书编写的有：梁保松、郝新生、吴瑞武、林淑蓉、王建平、杨燕新和刘雯，最后由梁保松同志统一定稿.

本书不妥之处，敬请专家、同行和读者批评指正.

编　者

2008年8月8日

目　录

前　言

第一章　随机事件及其概率 ………… 1
第一节　随机事件及其运算 ………… 1
一、必然现象与随机现象 ………… 1
二、随机试验 ………… 1
三、随机事件 ………… 2
四、样本空间 ………… 2
五、随机事件的关系及其运算 ………… 3
第二节　随机事件的概率 ………… 7
一、古典概率 ………… 8
二、概率的统计定义 ………… 11
三、几何概率 ………… 12
四、选读选讲 ………… 14
第三节　概率的公理化定义及性质 ………… 16
第四节　条件概率与乘法公式 ………… 19
一、条件概率 ………… 19
二、乘法公式 ………… 21
三、选读选讲 ………… 22
第五节　全概率公式与贝叶斯公式 ………… 24
一、全概率公式 ………… 24
二、贝叶斯公式 ………… 26
第六节　事件的独立性 ………… 27
一、两个事件的独立性 ………… 27
二、多个事件的独立性 ………… 29
三、n重贝努里试验 ………… 31
四、选读选讲 ………… 32
习题一 ………… 34
综合练习题一 ………… 37

第二章　随机变量及其分布 …… 39
第一节　随机变量 …… 39
一、随机变量的直观背景与定义 …… 39
二、随机变量的分布函数 …… 40
第二节　离散型随机变量 …… 41
一、离散型随机变量及其分布列 …… 41
二、常见的离散型随机变量及其分布 …… 43
三、选读选讲 …… 47
第三节　连续型随机变量 …… 50
一、连续型随机变量的定义及性质 …… 50
二、几种常见连续型随机变量的分布 …… 53
三、选读选讲 …… 59
第四节　随机变量函数的分布 …… 61
一、离散型随机变量函数的分布 …… 61
二、连续型随机变量函数的分布 …… 62
习题二 …… 65
综合练习题二 …… 66
第三章　多维随机变量及其分布 …… 69
第一节　二维随机变量及其联合分布 …… 69
一、联合分布函数及其性质 …… 69
二、二维离散型随机变量 …… 70
三、二维连续型随机变量 …… 71
第二节　边缘分布 …… 75
一、二维离散型随机变量的边缘分布 …… 75
二、二维连续型随机变量的边缘分布 …… 77
第三节　相互独立的随机变量及条件分布 …… 79
一、二维随机变量的独立性 …… 79
二、选读选讲 …… 81
习题三 …… 90
综合练习题三 …… 93
第四章　随机变量的数字特征 …… 95
第一节　数学期望 …… 95
一、离散型随机变量的数学期望 …… 96
二、连续型随机变量的数学期望 …… 97

三、随机变量函数的数学期望 …… 98
四、数学期望的性质 …… 100
第二节　方差 …… 101
一、方差的概念 …… 101
二、几种常见分布的方差 …… 102
三、方差的性质 …… 104
四、选读选讲 …… 105
第三节　协方差与相关系数 …… 109
一、协方差 …… 109
二、相关系数 …… 110
习题四 …… 112
综合练习题四 …… 115
第五章　大数定律和中心极限定理 …… 117
第一节　大数定律 …… 117
第二节　中心极限定理 …… 121
习题五 …… 124
综合练习题五 …… 125
第六章　抽样与抽样分布 …… 127
第一节　数理统计的基本概念 …… 127
一、统计问题的提出 …… 127
二、总体、个体与样本 …… 128
三、样本分布函数 …… 129
四、样本的数字特征 …… 130
五、选读选讲 …… 130
第二节　抽样分布定理 …… 134
一、几种常用分布 …… 134
二、抽样分布定理 …… 139
三、选读选讲 …… 140
习题六 …… 141
第七章　参数估计 …… 143
第一节　点估计 …… 143
一、矩估计法 …… 143
二、极大似然估计法 …… 145
三、稳健估计 …… 147

第二节 估计量的评判标准 …… 148
一、无偏性 …… 148
二、有效性 …… 149
三、一致性 …… 150
第三节 区间估计 …… 150
一、总体均值的区间估计 …… 151
二、总体方差的区间估计 …… 152
习题七 …… 153
第八章 假设检验 …… 155
第一节 参数假设检验的问题与方法 …… 155
一、参数假设检验的问题 …… 155
二、检验方法 …… 156
第二节 单总体参数的检验 …… 157
一、单总体均值的假设检验 …… 157
二、单总体方差的假设检验—χ^2 检验 …… 158
第三节 两总体参数检验 …… 159
一、两总体均值的检验 …… 159
二、两总体方差的检验—F 检验 …… 161
第四节 非参数检验 …… 162
习题八 …… 164
第九章 方差分析与一元线性回归分析 …… 166
第一节 方差分析 …… 166
一、方差分析问题的提出 …… 166
二、方差分析的数学模型 …… 167
三、方差分析的解法 …… 168
四、选读选讲 …… 172
第二节 一元线性回归分析 …… 176
一、一元线性回归模型 …… 176
二、参数 a、b 的最小二乘估计 …… 178
三、回归效果的检验 …… 179
四、利用回归方程进行预测 …… 182
五、化非线性回归方程为线性回归方程 …… 184
习题九 …… 187

第十章　多元线性回归分析 …… 188
第一节　模型和参数估计 …… 188
第二节　回归方程的显著性检验 …… 191
第三节　回归系数的显著性检验 …… 192
习题十 …… 194

习题参考答案 …… 196
附表 …… 205
参考文献 …… 227

第一章　随机事件及其概率

第一节　随机事件及其运算

一、必然现象与随机现象

概率论是研究随机现象统计规律的科学．在自然界和人类社会中，人们观察到的现象大体可分为两类．一类是事前可预言的，即一旦某条件实现，某现象必然发生，我们称这类现象为**必然现象**．例如，向上抛一物体必然要落到地面；在 101 325 Pa 大气压下，水加热到 100 ℃时必然沸腾；水稻的生长从播种到收获必然经过发芽、育秧、长叶、吐穗、扬花、结实这几个阶段等．另一类现象是事前无法预言的，即在一定条件实现后，可能发生也可能不发生的现象，我们称这种现象为**随机现象**．例如，掷一枚质地均匀的硬币，结果可能出现正面，也可能出现反面，掷前无法确定会出现哪个面；从一袋小麦种子中任取 10 粒做发芽试验，试验的结果可能有 10，9，8，…，1 粒种子发芽或全部不发芽，在试验前无法确定有几粒种子会发芽；在射击方面，同一个炮手利用同一门炮向同一目标射击，无论怎样控制射击条件不变，各次弹着点总不尽相同；在经济学方面，未来市场的股票价格也是不确定的；在生物学方面，某种生物群体的增长、扩散、迁变也具有不确定性．总之随机现象俯拾皆是，它充满于我们的现实生活、经济生活、科学研究和工程技术活动中．

随机现象孤立地、少量地看似乎是不可捉摸、无规律的，纯粹由偶然性起支配作用，但实际上并非如此．人们通过长期的观察和实践发现，在大量重复试验下，随机现象会呈现出一种固有的规律，通常称之为随机现象的**统计规律**．正是由于这种统计规律性，才使得人们能对随机现象发生的可能性给出度量方式及其算法．

二、随机试验

我们把对自然现象、社会现象所进行的一次观察或进行的一次科学试验统称为一个**试验**．

如果一个试验具有如下特征：

(1) 在相同条件下可以重复进行；

(2) 每次试验可出现不同的结果，究竟出现哪种结果，试验之前无法确定；

(3) 事先知道试验可能出现的全部结果；

则称该试验为**随机试验**，记作 E. 下面给出一些随机试验的例子：

E_1：掷一枚质地均匀的硬币，观察其落地后出现哪个面；

E_2：掷一颗均匀对称的骰子，观察其出现的点数；

E_3：记录一段时间内，某城市 110 报警次数；

E_4：用 100 粒种子做发芽试验，观察其发芽的粒数；

E_5：从一批电视机中，任取一台观察无故障运行时间；

E_6：向坐标平面区域 $D=\{(x, y) \mid x^2+y^2\leqslant 16\}$ 内随机投一点（假设点必落在 D 上），观察落点 M 的坐标.

由上述例子可知，随机试验是产生随机现象的过程，随机试验和随机现象是并存的.

三、随机事件

随机试验 E 的每一个可能结果称为随机事件，简称事件. 通常用 A，B，C 等表示. 例如 E_2 的可能结果为｛出现 1 点｝，｛出现 2 点｝，…，｛出现 6 点｝，这些都是随机事件. 再如对 E_4，｛有一粒发芽｝，｛有两粒发芽｝，…，｛有三十粒发芽｝，…，等也是随机事件. 事件是概率论中最基本的概念，能将所讨论的事件正确地表示出来是学习概率论的最基本要求.

事件可分为基本事件和复合事件.

我们把不能再分解的事件称为**基本事件**. 例如，对 10 环靶进行一次射击，｛脱靶｝，｛射中 1 环｝，｛射中 2 环｝，…，｛射中 9 环｝，｛射中 10 环｝；掷一枚硬币，｛出现正面｝，｛出现反面｝都是基本事件. 由若干基本事件组成的事件称为**复合事件**. 例如 E_2 中，｛出现奇数点｝，｛出现偶数点｝；E_4 中，｛发芽粒数不超过 85｝，｛发芽粒数大于 90｝都是复合事件. 但应注意，把事件划分为基本事件与复合事件是相对试验的目的而言的，不是绝对的. 两个人掷一颗骰子，在以出现奇数点或偶数点论输赢的场合下，｛出现奇数点｝及｛出现偶数点｝都是基本事件.

随机事件中有两个极端的情况，一个是每次试验都必然发生的事件，称为**必然事件**，记为 Ω. 另一个是每次试验中都不可能发生的事件，称为**不可能事件**，记为 $\varnothing$.

四、样本空间

为了用数学方法描述随机现象，下面引入样本空间的概念.

随机试验 E 产生的所有基本事件构成的集合称为随机试验 E 的样本空间，

记为 Ω. 其中每个元素（基本事件）称为一个样本点，记为 ω，$\Omega=\{\omega\}$．

例 1　给出随机试验 E_1—E_6 的样本空间．

解　E_1 有两个基本事件，即｛出现正面｝，｛出现反面｝，若用 ω_1 表示｛出现正面｝，ω_2 表示｛出现反面｝，则

$$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2\}.$$

E_2 有 6 个基本事件，用 ω_i 表示｛出现 i 点｝（$i=1,2,3,4,5,6$），则

$$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6\}.$$

E_3 的基本事件为｛出现 0 次报警｝，｛出现 1 次报警｝，｛出现 2 次报警｝，…，用 ω_i 表示｛出现 i 次报警｝（$i=0,1,2,3,\cdots$），则

$$\Omega=\{\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \cdots\}.$$

E_4 的基本事件为｛有 0 粒发芽｝，｛有 1 粒发芽｝，｛有 2 粒发芽｝，…，用 ω_i 表示｛有 i 粒发芽｝（$i=0,1,2,3,\cdots,99,100$），则

$$\Omega=\{\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_{99},\ \omega_{100}\}.$$

E_5 的样本空间为 $\Omega=\{x \mid x\geqslant 0$，$x$ 为无故障运行的时间$\}$.

E_6 的样本空间为 $\Omega=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leqslant 16$，其中 (x,y) 为点 M 的坐标$\}$.

由于任何一个随机事件或是基本事件，或是复合事件，所以，随机试验 E 的任何一个事件 A 都是样本空间 Ω 的一个子集．若 A 是基本事件，则 A 对应 Ω 中的一个单点集；若 A 是复合事件，则 A 对应 Ω 中由几个样本点组成的集合．必然事件与样本空间 Ω 相对应，不可能事件与空集 $\varnothing$ 相对应，故由样本空间的子集可描述随机试验中所对应的一切随机事件．这样，就建立了事件与集合之间的联系，我们可以用集合论的方法来研究事件及其关系．

五、随机事件的关系及其运算

进行随机试验，有多种事件出现，这些事件往往是相互联系的．为了研究复杂事件是由哪些基本事件构成的，以便计算它们的概率，就需要引入事件的关系及其运算．

设 A、B、C 为同一样本空间 Ω 的事件，它们之间有下列关系及运算：

（1）**包含与相等**

若事件 A 的出现（发生）必然导致事件 B 的出现（发生），则称 B 包含 A 或称 A 被 B 包含，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

当 $A\subset B$ 时，A 中的样本点一定是 B 中样本点，又称 A 是 B 的子事件．如 E_4 中，设 $A=\{$多于 60 粒发芽$\}$，$B=\{$多于 80 粒发芽$\}$，$C=\{$少于 50 粒发芽$\}$．若事件 B 出现，则事件 A 出现，事件 C 不出现，即 $B\subset A$，$B\not\subset C$.

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等或等价，记作 $A=B$. 当 $A=B$ 时，

A 中的样本点与 B 中的样本点相同.

对于任意事件 A，有 $A \subset \Omega$. 作为特殊情形，规定 $\varnothing \subset A$.

(2) 事件的并（或和）

事件 A 与事件 B 至少一个出现（发生）所构成的事件称为 A 与 B 的并（或和），记作 $A \cup B$. 如在 E_2 中，A={掷出偶数点}，B={掷出点数大于 3}，则 $A \cup B$={掷出的点数或者是偶数或者是大于 3}={掷出点数为 2，4，5，6 中之一}. 显然，$A \cup \Omega = \Omega$，$A \cup A = A$，$A \subset B$ 时，$A \cup B = B$.

(3) 事件的交（或积）

事件 A 与事件 B 同时出现（发生）所构成的事件称为 A 与 B 的交（或积），记作 $A \cap B$ 或 AB. 如 E_2 中，A={掷出偶数点}，B={掷出点数大于 3}，则 $A \cap B$={掷出的点数为 4 或 6}. 显然有 $AB \subset A \subset A \cup B$，$AB \subset B \subset A \cup B$.

对于任一事件 A，有 $A \cap \Omega = A$，$A \cap \varnothing = \varnothing$.

(4) 事件的差

事件 A 出现（发生），而事件 B 不出现（不发生）**所构成的事件称为 A 与 B 的差**，记作 $A-B$. 如 E_2 中，A={掷出偶数点}，B={掷出点数大于 3}，则 $A-B$={掷出的点数为 2}.

$A-B$ 是由属于 A 而不属于 B 的样本点所组成的集合. 显然有 $A-B=A-AB$.

对于任一事件 A，$A-A=\varnothing$，$A-\varnothing=A$，$A-\Omega=\varnothing$.

(5) 互不相容（互斥）事件

如事件 A 与事件 B 不能同时出现（发生），即 $A \cap B = \varnothing$，**则称事件 A 与事件 B 为互不相容事件**（或互斥事件）. 事件 A 与事件 B 互不相容表示 A 与 B 没有公共的样本点.

例如，对十环靶进行一次射击，A_i 表示击中 i 环（$i=0$，1，2，3，…，8，9，10），则 A_6 与 A_9 是互不相容事件.

对于互不相容事件的和 $A \cup B$，记作 $A+B$.

若事件组 A_1，A_2，…，A_n 中任意不同两个均互不相容（互斥），即 $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$，则称此事件组**两两互不相容**（或两两互斥）.

对于两两互不相容的事件组 A_1，A_2，…，A_n 的和事件，记作 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$.

如果 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$，则称事件组 A_1，A_2，…，A_n 为**完备事件组**.

在随机试验的样本空间中，所有基本事件构成两两互不相容的完备事件组.

(6) 对立(互逆)事件

若事件 A 与事件 B 不能同时出现(发生),但又必定有一个出现(发生),即 $A\cap B=\varnothing$,$A+B=\Omega$,则称事件 A 与事件 B 为对立(或互逆)事件.通常把 A 的对立事件记作 $\overline{A}$.这时 $A\cap\overline{A}=\varnothing$,$A+\overline{A}=\Omega$,$A$ 与 $\overline{A}$ 构成一个互不相容的完备事件组.显然

$$\overline{\overline{A}}=A,\ \Omega-A=\overline{A},\ A-B=A\overline{B}.$$

需要注意的是:**对立(互逆)事件一定互不相容(互斥),反之不一定成立**.

事件的并与事件的交可以推广到有限多个及可列无限多个事件,即

$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 表示事件 A_1,A_2,…,A_n 中至少有一个发生.

$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 表示事件 A_1,A_2,…,A_n 同时发生.

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$ 表示可列多个事件 A_i 中至少有一个发生.

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$ 表示可列多个事件 A_i 同时发生.

为了帮助大家理解上述概念,现把集合论的有关结论与事件的关系和运算的对应情况列表给出(表 1-1).

表 1-1

符号	集合论	概率论
Ω	全集	样本空间;必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
$\omega\in\Omega$	Ω 中的点(或称元素)	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A\subset\Omega$	Ω 的子集 A	事件 A
$A\subset B$	集合 A 包含于集合 B 中	事件 A 包含于事件 B
$A=B$	集合 A 与 B 相等(或等价)	事件 A 与 B 相等(或等价)
$A\cup B$	集合 A 与 B 之并	事件 A 与 B 至少有一个发生(事件 A 与 B 之和(并))
$A\cap B$	集合 A 与 B 之交	事件 A 与 B 同时发生(事件 A 与 B 之积(交))
$\overline{A}$	集合 A 之余集	事件 A 的逆事件
$A-B$	集合 A 与 B 之差	事件 A 发生而事件 B 不发生(事件 A 与 B 之差)
$A\cap B=\varnothing$	集合 A 与 B 没有公共元素	事件 A 与 B 互不相容(互斥)

若用平面上一矩形区域表示样本空间 Ω,矩形区域内的点表示样本点,则