

数学自学丛书

立体几何双基训练

第3版

主编 翟连林

机械工业出版社

数学自学丛书

立体几何双基训练

第3版

主 编 翟连林

副主编 罗添翼 叶龄逸 陈久华

编 者 王家宝 曾星发 杨志刚

李福宽 施荣杰 郭树发



机械工业出版社

(京)新登字054号

内 容 简 介

本书是“数学自学丛书”(第3版)之一。

这套丛书第1、2版出版后,受到广大读者的热烈欢迎。在此基础上,作者又进行了第2次修订,充实了基础知识的内容,换进了新颖的题目,更突出了自学青年自学数学的需要。

本书内容包括:直线与平面、多面体、旋转体、综合训练。

数学自学丛书 立体几何双基训练

第3版

主编 翟连林

*

责任编辑:尹荣英

封面设计:郭景云

*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

北京市大兴兴达印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092^{1/32}$ 印张 9 字数 198 千字

1985年12月北京第2版

1992年10月北京第3版 1995年10月北京第6次印刷

印数: 234301—235100 定价: 6.50元

*

ISBN 7-111-03377-9/G·181

第3版 前 言

为了帮助广大职工和自学青年学好数学基础知识，加强基本技能的训练（基础知识和基本技能简称“双基”），我们在1983年编辑出版了“数学自学丛书”。这套丛书出版后受到广大读者的热烈欢迎。1985年我们进行了第一次修订，出版了第2版。中国科学院学部委员，著名数学家程民德教授亲自为这套丛书作序。程先生把这套丛书的特点归纳成以下三个方面：（1）取材允当，适用面广泛；（2）重视双基，突出能力的培养；（3）重视启发诱导，利于自学。程先生说：“数学已日益成为一切近代科学技术的重要基础。当前已不只是理、工、农、医的各专业愈来愈需要数学，就象心理学、经济学、语言学等专业的发展也都离不开数学，而且还需要很高深的近代数学。要提高我国广大职工的科学水平，如果数学不首先提高，就将成为拦路虎。所以这套丛书的出版具有深远的意义。”

为了满足广大读者的需要，我们在第1、2版的基础上，又进行了修订，换进了新颖的题目，更突出了自学者的需要，出版这套丛书的第3版。这套丛书目前出版的中学部分包括：《初中数学双基训练》（第1、2、3册）、《初中数学总结辅导》（上、下册）、《高中代数双基训练》（上、下册）、《立体几何双基训练》、《平面解析几何双基训练》、《高中数学总结辅导》（上、下册）以及《高考数学综合训练试题集》（附解答）。大学部分将陆续修订出版。

为了便于自学，在这套丛书的各册中，首先帮助读者系统地归纳和总结数学基础知识，然后通过对典型例题的分析、解答和评注，帮助读者总结常用的解题方法和技巧，分析并纠正易犯的错误，最后通过各种题型的演练，帮助读者巩固概念、熟悉定理、公式和法则。

这套丛书可供自学青年、广大职工补课以及各类中等和高等成人学校补习中学数学使用，普通中学的学生和大专院校的学生以及数学教师亦可参考。

编 者

1992年5月

目 录

第3版前言

第1章 直线与平面	1
一、基础知识提要及疑难讲解	1
1. 空间图形	1
2. 平面	2
3. 直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关 系	5
4. 平行	8
5. 垂直	12
6. 其他问题	19
7. 与平面几何的联系和类比	24
8. 水平放置的平面图形的直观图的画法	27
二、教学目标	29
三、基本训练举例	30
四、解题方法小结	46
1. 共线、共面问题	47
2. 异面直线问题	48
3. 线线平行、线线垂直问题	50
4. 线面平行、线面垂直问题	52
5. 面面平行、面面垂直问题	54
6. 三垂线定理的应用问题	56
7. 二面角问题	58
8. 折转问题	60
五、基本训练题	63
六、基本训练题解答或提示	71

七、自我检查题及解答	79
第2章 多面体	85
一、基础知识提要及疑难讲解	85
1. 多面体	85
2. 棱柱、棱锥、棱台	86
3. 正棱柱、正棱锥、正棱台的特性	86
4. 棱柱、棱锥、棱台的直观图	92
5. 展开图及侧面积计算	94
6. 体积的计算	97
7. 棱柱、棱锥、棱台侧面积公式及体积公式间的关系	100
二、教学目标	101
三、基本训练举例	102
四、解题方法小结	131
1. 利用多面体中特殊图形解题	131
2. 截面的运用	133
3. 侧面上任意两点间最短距离的求法	135
4. 引入辅助元素解题	138
五、基本训练题	140
六、基本训练题解答或提示	149
七、自我检查题及解答	152
第3章 旋转体	161
一、基础知识提要及疑难讲解	161
1. 圆柱、圆锥、圆台	161
2. 球	165
3. 表面积的计算	168
4. 体积的计算	168
5. 直观图	168
二、教学目标	174
三、基本训练举例	174

四、解题方法小结	188
1. 圆柱、圆锥、圆台、球中的特殊图形	188
2. 圆柱、圆锥、圆台侧面上两点间的最短距离	190
3. 旋转体与旋转体间的切、接问题	192
4. 锥体的内接、外切以及外接问题	195
5. 组合体问题	200
6. 旋转问题	202
7. 球的问题	204
五、基本训练题	206
六、基本训练题解答或提示	214
七、自我检查题及解答	218
第4章 综合训练	223
一、综合训练举例	223
1. 立体几何综合题	223
2. 立体几何与代数综合题	232
3. 立体几何与三角综合题	237
4. 立体几何与解析几何综合题	243
5. 立体几何、代数、三角、解析几何综合题	249
二、立体几何问题转化为平面几何问题的几种方法	254
三、综合训练题	267
四、综合训练题解答或提示	271
五、自我检查题及解答	274

第1章 直线与平面

本章在立体几何中占有极为重要的地位，它是学习立体几何的基础。本章主要是研究平面的基本性质、空间直线和平面的位置关系及有关概念和性质。而平面的基本性质又是学习和研究直线和平面的位置关系及性质的重要基础。学习本章应注意平面图形与空间图形的联系和区别，把眼光由平面扩展到空间。

一、基础知识提要及疑难讲解

1. 空间图形

点是最简单的几何图形，任何几何图形都可以看成是满足某些条件的点的集合。

空间的基本图形是：点、直线和平面。它们是不加定义的原始概念。

点常用大写字母 A 、 B 、 C 等来表示，直线常用小写字母 a 、 b 、 l 、 m 等来表示，也可以用两个大写字母来表示，如直线 AB 等；平面则常用希腊字母 α 、 β 、 γ 或一个大写字母 M 、 N 、 P 等来表示，如图1-1中，平面 α 、平面 M 。也可以用两个大写字母来表示，如图1-1中，平面 AC 。

平面图形的点都在同一平面内；空间图形（或称立体图形）的点，不一定在同一平面内。平面图形上的直线（如平行的直线，相交的直线）都在同一平面内；而空间的两条直线

却不一定在同一平面内。

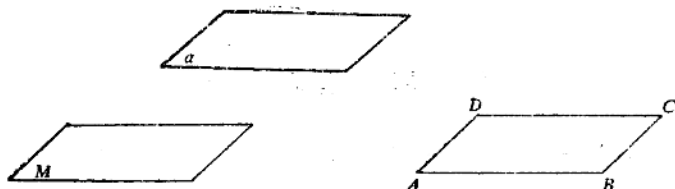


图 1-1

2. 平面

(1) 平面

平面通常用平行四边形来表示。当平面是水平放置时通常把平行四边形的锐角画成 45° ，水平方向的边长等于它的邻边边长的 2 倍。当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮部分的线段画成虚线或不画，如图 1-2 (甲)、(乙)。

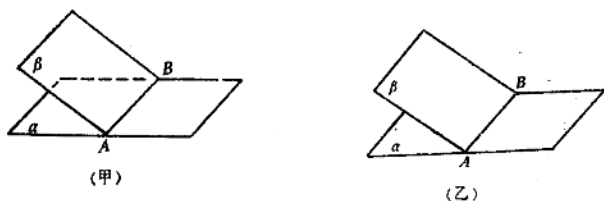


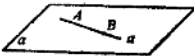
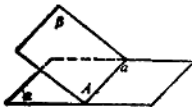
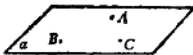
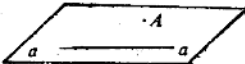
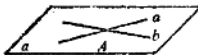
图 1-2

(2) 平面的基本性质 (见表 1-1)

平面的基本性质包括三个公理及三个推论，它们分别揭示了点、直线、平面之间的密切关系，是确定平面位置的理论依据，也是学习和研究空间的直线和平面的位置关系以及将空间问题转化为平面问题的理论基础。

1) 公理 1 给出了判定直线在平面内，用直线鉴定平

表 1-1

图 形	内 容	
	语言叙述	符 号 表 示
	公理1: 如果一条直线上的两点在一个平面内, 那么这条直线上所有的点都在这个平面内	$\left. \begin{array}{l} \text{点 } A, B \in \text{直线 } a \\ \text{点 } A, B \in \text{平面 } \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \subset \alpha$
	公理2: 如果两个平面有一个公共点, 那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线	$\left. \begin{array}{l} \text{点 } A \in \text{平面 } \alpha \\ \text{点 } A \in \text{平面 } \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \cap \beta = \\ \text{直线 } a \\ A \in a \end{array} \right.$
	公理3: 经过不在同一直线上的三点, 有且只有一个平面	点 A, B, C 不在一条直线上, A, B, C 三点共属于平面 α , 且 α 是唯一的
	推论1: 经过一条直线和这条直线外的一点, 有且只有一个平面	$\left. \begin{array}{l} a \text{ 是任意一} \\ \text{条直线} \\ \text{点 } A \notin a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \text{ 与 } A \text{ 共属} \\ \text{于平面 } \alpha, \\ \text{且 } \alpha \text{ 是唯} \\ \text{一的} \end{array} \right.$
	推论2: 经过两条相交直线, 有且只有一个平面	$\left. \begin{array}{l} a \text{ 是任意一} \\ \text{条直线} \\ b \text{ 是任意一} \\ \text{条直线} \\ a, b \text{ 共属于平面 } \alpha, \text{ 且 } \alpha \text{ 是唯} \\ \text{一的} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{且 } A = a \cap b \end{array} \right.$

(续)

图 形	内 容	
	语言叙述	符 号 表 示
	推论3: 经过两条平行直线, 有且只有一个平面	a, b 是两条直线且 $a \parallel b \Rightarrow a, b$ 共属于平面 α , 且 α 是唯一的

面, 判定点在平面内 (如果点在直线上, 直线在平面内, 那么点在平面内) 的方法。依据公理 1, 要判定一条直线是否在一个平面内, 只要直线上有任意两点在一个平面内, 就可以断定已知直线一定在这个平面内。

一条直线在一个平面内, 也可以说成“平面通过这条直线”。

2) 公理 2 是判断两个平面是否相交的根据, 只要两个平面有一个公共点, 就可以判定它们一定相交于过这点的一条直线, 也可以利用这个公理, 判定某点是否在两相交平面的交线上。

3) 公理 3 及其三个推论给出了确定平面的条件。

“有且只有一个平面”, 也可说成“确定一个平面”。“确定”二字包括两个方面, 即“存在性”与“唯一性”。例如, 过一点可以有一条直线, 这是存在性, 但不只有一条直线, 即不“唯一”, 因此, 一个点就不能“确定”一条直线。又如, 过已知的三点, 不一定有一条直线, 即不一定“存在”。当然更谈不上唯一了。所以三点也不能“确定”一条直线。

过两点, 不但有一条直线“存在”, 而且只有这条直线, 即“唯一”。所以, 两点“确定”一条直线。

“确定”平面的意义也是如此理解。例如: 过一条直线可

以作一个平面，但所作的平面不是唯一的；而过任意两条直线就不一定能作平面；但过两条相交的直线可以作且只能作一个平面。

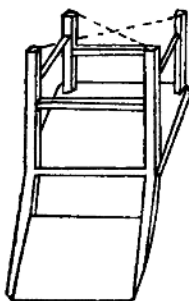


图 1-3

学习以上的公理和推论，不仅要透彻理解它们的确切含义，掌握三个推论的证明，还要联系生活和生产中的实际。例如，用拉直的两条互相交叉的细绳来检查椅子的四条腿的支点是否共面，就是应用推论 2 的实例（如图1-3）。又如，照相机、探测仪等的三角支架，就是应用公理 3 确定平面的例子。

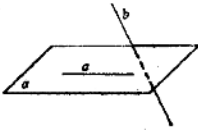
3. 直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系

(1) 直线与直线的位置关系（见表1-2）

表 1-2

关系	图 形	内 容	
		公共点数目	记 法
共面关系	重合 	两条直线至少有两个不同的公共点	直线 a, b 有公共点 A, B , 则直线 a 与直线 b 重合
	相交 	两条直线只有一个公共点	直线 $a \cap$ 直线 $b =$ 点 A
	平行 	两条直线没有公共点，但可以共在一个平面内	直线 $a \cap$ 直线 $b = \emptyset$, 且 $a \subset$ 平面 $\alpha, b \subset$ 平面 α , 或直线 $a \parallel$ 直线 b

(续)

关系	图 形	内 容	
		公共点数目	记 法
异面关系		两条直线没有公共点，又不能共在一个平面内	直线 $a \cap$ 直线 $b = \emptyset$ ，且 $a \subset$ 平面 α ， $b \not\subset$ 平面 α ， α 为过 a 的任意平面

我们把不在任何一个平面内的两条直线叫异面直线。要深刻理解异面直线的概念，不在任何一个平面内的两条直线，它的含义是：无法找到一个平面，使得这样的两条直线同在此平面内。这两条直线既不相交，也不平行。

如图1-4、图1-5、图1-6中，虽然直线 a 、 b 分别在平面 α 和 β 内，但它们或是相交或是平行，所以 a 和 b 仍可以共在某一平面内。因此， a 与 b 并不是异面直线。也就是说，分别在两个平面内的两条直线不一定是异面直线。

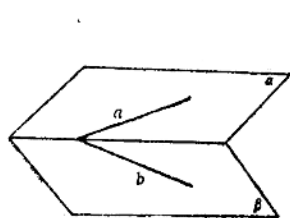


图 1-4

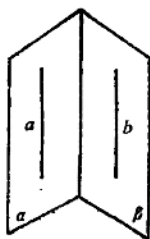


图 1-5

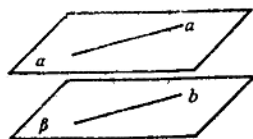


图 1-6

画异面直线时，常用平面衬托法。即把异面直线 a 与 b 中的一条直线（如 a ）画在某一个平面 α 内，而另一条直线画成与平面 α 相交，但交点不在直线 a 上，如图1-7所示是用一个平面

来衬托的；而图 1-8 所示的两异面直线是用两个平面来衬托的。

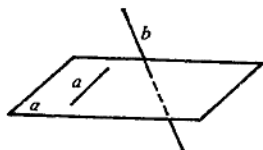


图 1-7

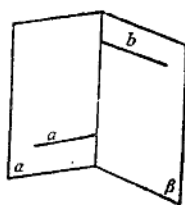


图 1-8

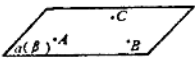
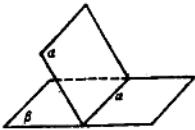
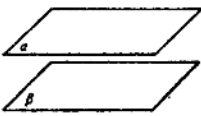
(2) 直线与平面的位置关系 (见表1-3)

表 1-3

关系	图 形	内 容	
		公共点数目	记 法
直线在平面内		直线与平面有两个以上公共点	若 $A, B \in \alpha$, 且 $A, B \in a$, 则 $a \subset \alpha$
直线与平面相交		直线与平面只有一个公共点	$a \cap \alpha = A$
直线与平面平行		直线与平面没有公共点	$a \parallel \alpha$ 或 $a \cap \alpha = \emptyset$

(3) 平面与平面的位置关系 (见表1-4)

表 1-4

关系	图 形	内 容	
		公共点数目	记 法
重 合		至少有不共线的三个点	α 与 β 重合
相 交		有无数个共线的点	$\alpha \cap \beta = a$
平 行		没有公共点	$\alpha \parallel \beta$ 或 $\alpha \cap \beta = \emptyset$

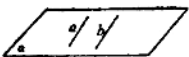
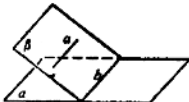
由此可以看出,要判断空间两个基本图形的位置关系,应该抓住两个图形的公共点数目。

4. 平行

(1) 直线与直线平行

1) 判定 (见表1-5)

表 1-5

名称	图 形	内 容	
		语言叙述	符号表示
定 义		在同一平面内,没有公共点的两条直线互相平行	$a, b \subset \alpha$, 且 $a \cap b = \emptyset$, 则 $a \parallel b$
定 理 1		如果一条直线和一个平面平行,经过这条直线的平面和这个平面相交,那么这条直线就和交线平行	若 $a \parallel \alpha$, $a \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = b$, 则 $a \parallel b$

(续)

名称	图 形	内 容	
		语 言 叙 述	符 号 表 示
定理 2		平行于同一条直线的两条直线互相平行	$AA' \parallel CC'$, $BB' \parallel CC'$, 则 $AA' \parallel BB'$
定理 3		如果两个平行平面同时和第三个平面相交, 那么它们的交线平行	$\alpha \parallel \beta, \alpha \cap \gamma = a, \beta \cap \gamma = b$, 则 $a \parallel b$
定理 4		如果两条直线同垂直于一个平面, 那么这两条直线平行	$a \perp \alpha, b \perp \alpha$ 则 $a \parallel b$

2) 性质 (见表1-6)

表 1-6

名称	图 形	内 容	
		语 言 叙 述	符 号 表 示
定理 1		如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面, 那么另一条也垂直于这个平面	若 $a \parallel b, a \perp \alpha$ 则 $b \perp \alpha$