2008年全国各类成人高考

专科起点升本科

高等数学(一)应试模拟

本书编写组

高等教育出版社
Higher Education Press

2008年全国各类成人高考

专科起点升本科

高等数学(一)应试模拟

本书编写组

高等教育出版社
Higher Education Press

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)应试模拟/本书编写组. —北京:高等教育出版社,2008.3

2008年全国各类成人高考. 专科起点升本科

ISBN 978-7-04-024315-4

Ⅰ. 高… Ⅱ. 本… Ⅲ. 高等数学-成人教育:高等教育-习题-升学参考资料 Ⅳ. O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第025757号

策划编辑 田晓兰 **责任编辑** 田晓兰 **封面设计** 张志奇

责任校对 刘 莉 **责任印制** 尤 静

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市西城区德外大街4号

邮政编码 100011

总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司

印 刷 北京四季青印刷厂

开 本 787×1092 1/16

印 张 10.5

字 数 255 000

购书热线 010-58581118

免费咨询 800-810-0598

网 址 http://www.hep.edu.cn

http://www.hep.com.cn

网上订购 http://www.landraco.com

http://www.landraco.com.cn

畅想教育 http://www.widedu.com

版 次 2008年3月第1版

印 次 2008年3月第1次印刷

定 价 20.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 24315-00

出版 前言

为了帮助广大考生复习备考，我们根据教育部2007年1月颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲（专科起点升本科）》所规定的考试内容及要求，组织作者编写了这套《2008年全国各类成人高考（专科起点升本科）应试模拟》。

本套书具有以下几个特点：

1. **内容完整，重点突出**。本套书严格按照大纲所规定的题型、内容和难易比例编制，全面覆盖考试大纲的知识点。

2. **解渴实用，针对性强**。在每套模拟试卷后，不仅给出了参考答案，而且还设有解题指导，即扼要指出该题所考查的能力、解题方法及考生解题时应注意的问题等，这对考生通过做题而举一反三、融会贯通地掌握所学知识，将起到良好的作用。

3. **名师荟萃、质量可靠**。本套书的作者均为长期从事成人高考命题研究的专家、学者及一线辅导教师，他们熟谙成人高考命题的思路、原则和方法，具有丰富的经验。

本套书为全真模拟试卷，与我社出版的《全国各类成人高考（专科起点升本科）复习考试辅导教材》相配套，便于考生在复习备考的强化冲刺阶段进行实战演练。

在此提请广大考生注意：应在全面、系统复习的基础上做模拟试题，切忌边做题边翻看后面的答案及解析内容；应严格按照考试大纲所规定的考试时间做题，答完试卷后再对照答案给自己评分。

应广大考生要求，本套书各科增加了近几年的成人高等学校招生全国统一考试（专科起点升本科）试题解析（附于书后），便于考生掌握解题技巧、把握命题趋向、沉着应对考试。

预祝广大考生获得圆满成功！

高等教育出版社

2008年3月

目录

高等数学(一)应试模拟第1套

一、选择题：1～10小题，每小题4分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 当$x\to 0$时，$2x^2+3x$是x的

A. 高阶无穷小　　B. 等价无穷小

C. 同阶无穷小，但不是等价无穷小　　D. 低阶无穷小　　(　　)

2. 设函数$f(x)$在区间$(0,1)$内可导，$f'(x)>0$，则在$(0,1)$内$f(x)$

A. 单调增加　　B. 单调减少

C. 为常量　　D. 既非单调，也非常量　　(　　)

3. 设$f'(x_0)=1$，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}$等于

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. $\dfrac{1}{2}$　　(　　)

4. 若$\int f(x)\,dx = F(x)+C$，则$\int f(2x)\,dx$等于

A. $2F(2x)+C$　　B. $F(2x)+C$

C. $F(x)+C$　　D. $\dfrac{1}{2}F(2x)+C$　　(　　)

5. 设函数$y=e^{-x}$，则y'等于

A. $-e^x$　　B. e^x　　C. $-e^{-x}$　　D. e^{-x}　　(　　)

6. 设$y=x^2-2x+a$，则点$x=1$

A. 为y的极大值点　　B. 为y的极小值点

C. 不为y的极值点　　D. 是否为y的极值点与a有关　　(　　)

7. 设函数$z=\sin(xy^2)$，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}$等于

A. $\cos(xy^2)$　　B. $xy^2\cos(xy^2)$　　C. $2xy\cos(xy^2)$　　D. $y^2\cos(xy^2)$　　(　　)

8. 二次积分$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)\,dy$等于

A. $\int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y)\,dx$　　B. $\int_0^1 dy\int_0^{1-x} f(x,y)\,dx$

C. $\int_0^{1-x} dy\int_0^1 f(x,y)\,dx$　　D. $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)\,dx$　　(　　)

9. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$，则下列命题中正确的有

A. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=0$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在

C. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$可能不存在　　D. $\{S_n\}$为单调增数列　　(　　)

10. 设 y_1, y_2 为二阶线性常系数微分方程 $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$ 的两个特解,则 $C_1 y_1 + C_2 y_2$

A. 为所给方程的解,但不是通解　　B. 为所给方程的解,但不一定是通解

C. 为所给方程的通解　　D. 不为所给方程的解　　(　　)

二、**填空题**: 11 ~ 20 小题,每小题 4 分,共 40 分.

11. 设 $y = \sin 2x$,则 $dy =$ ________.

12. 设 $y = 2^x + \sin 2$,则 $y' =$ ________.

13. 函数 $y = x^3 - 2x + 1$ 在区间 $[1,2]$ 上的最小值为________.

14. $\int_0^1 e^{2x} dx =$ ________.

15. 设 $z = \sin(y + x^2)$,则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ ________.

16. 微分方程 $y'' + y' = 0$ 的通解为________.

17. 过点 $M_0(1, -2, 0)$ 且与直线 $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{1}$ 垂直的平面方程为________.

18. 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线平行于 x 轴,则该切线方程为________.

19. 广义积分 $\int_1^{+\infty} x^{-2} dx =$ ________.

20. 设区域 D 由 y 轴, $y = x$, $y = 1$ 所围成,则 $\iint\limits_D dx dy =$ ________.

三、**解答题**:21 ~ 28 小题,共 70 分,解答应写出推理、演算步骤.

21. (本题满分 8 分)求 $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$.

22. (本题满分 8 分)设 $y = y(x)$ 由方程 $x^2 + 2y^3 + 2xy + 3y - x = 1$ 确定,求 y'.

23. （本题满分 8 分）设 x^2 为 $f(x)$ 的原函数，求 $\int_0^1 xf'(x)\,dx$.

24. （本题满分 8 分）求 $\iint\limits_D x\,dx\,dy$，其中区域 D 是由曲线 $y=1+x^2$ 与 $y=0$，$x=0$，$x=1$ 所围成.

25. （本题满分 8 分）求微分方程 $x^2y'+xy=1$ 的通解.

26. (本题满分 10 分)求由曲线 $y=3-x^2$ 与 $y=2x$,y 轴所围成的平面图形的面积及该封闭图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

27. (本题满分 10 分)在曲线 $y=\sqrt{x}$上求一点 M_0,使该曲线过点 M_0 的切线平行于已知直线 $x-2y=5$,并求出相应的切线方程.

28. (本题满分 10 分)将$f(x)=\ln(1+x^2)$展开为 x 的幂级数.

高等数学(一)应试模拟第1套参考答案与解题指导

一、选择题

1. 本题选 C.

本题考查的知识点为无穷小阶的比较.

应依定义考察

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+3x}{x}=\lim_{x\to 0}(2x+3)=3.$$

由此可知,当 $x\to 0$ 时,$2x^3+3x$ 是 x 的同阶无穷小,但不是等价无穷小,故知应选 C.

本题应明确的是:考察当 $x\to x_0$ 时无穷小 β 与无穷小 α 的阶的关系时,要判定极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha},$$

这里是以 α 为“基本量”,考生要特别注意此点,才能避免错误.

2. 本题选 A.

本题考查的知识点为利用导数符号判定函数的单调性.

由于 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有 $f'(x)>0$,可知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调增加,故应选 A.

3. 本题选 B.

本题考查的知识点为导数的定义.

由题设知 $f'(x_0)=1$,又由题设条件知

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2[f(x_0+2h)-f(x_0)]}{2h}=2f'(x_0)=2,$$

可知应选 B.

4. 本题选 D.

本题考查的知识点为不定积分的第一换元积分法(凑微分法).

由题设知 $\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$,因此

$$\begin{aligned}\int f(2x)\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int f(2x)\,\mathrm{d}(2x)\\&=\frac{1}{2}F(2x)+C,\end{aligned}$$

可知应选 D.

5. 本题选 C.

本题考查的知识点为复合函数导数的运算.

由复合函数的导数链式法则知

$$\begin{aligned}y'&=(\mathrm{e}^{-x})'=\mathrm{e}^{-x}\cdot(-x)'\\&=-\mathrm{e}^{-x},\end{aligned}$$

可知应选 C.

6. 本题选 B.

本题考查的知识点为一元函数的极值.

求解的一般步骤为:先求出函数的一阶导数,令偏导数等于零,确定函数的驻点.再依极值的充分条件来判定所求驻点是否为极值点.

由于 $y=x^2-2x+a$,可由

$$y'=2x-2=0,$$

解得 y 有唯一驻点 $x=1$. 又由于 $y''=2$,可得知 $y''\Big|_{x=1}=2>0$.

由极值的二阶充分条件可知 $x=1$ 为 y 的极小值点,故应选 B.

如果利用配方法,可得 $y=(x-1)^2+a-1\geqslant a-1$,且 $y\Big|_{x=1}=a-1$,由极值的定义可知 $x=1$ 为 y 的极小值点,因此选 B.

7. 本题选 D.

本题考查的知识点为偏导数的运算.

由 $z=\sin(xy^2)$,知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(xy^2)\cdot(xy^2)'_x=y^2\cos(xy^2),$$

可知应选 D.

8. 本题选 A.

本题考查的知识点为交换二次积分的积分次序.

由所给二次积分限可知积分区域 D 的不等式表达式为:

$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1-x,$$

其图形如图 1－1 所示.

交换积分次序,D 可以表示为

$$0\leqslant y\leqslant 1,\quad 0\leqslant x\leqslant 1-y,$$

因此

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{1-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x,$$

可知应选 A.

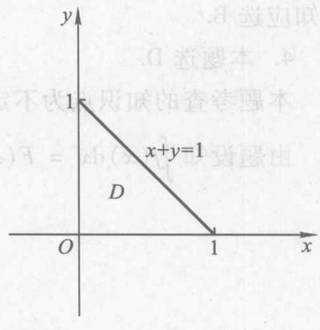

图 1－1

9. 本题选 B.

本题考查的知识点为级数收敛性的定义.

由级数收敛性的定义:若 $S_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$,当 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在时,则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,可知应选 B.

10. 本题选 B.

本题考查的知识点为线性常系数微分方程解的结构.

已知 y_1,y_2 为二阶线性常系数齐次微分方程 $y''+p_1y'+p_2y=0$ 的两个解,由解的结构定理可知 $C_1y_1+C_2y_2$ 为所给方程的解,因此应排除 D. 又由解的结构定理可知,当 y_1,y_2 线性无关时,

$C_1y_1+C_2y_2$ 为$y''+p_1y'+p_2y=0$ 的通解，因此应该选 B.

本题中常见的错误是选 C. 这是由于忽略了线性常系数微分方程解的结构定理中的条件所导致的错误. 解的结构定理中指出："若 y_1,y_2 为二阶线性常系数微分方程 $y''+p_1y'+p_2y=0$ 的两个线性无关的特解，则 $C_1y_1+C_2y_2$ 为所给微分方程的通解，其中 C_1,C_2 为任意常数". 由于所给命题中没有指出 y_1,y_2 为线性无关的特解，可知 $C_1y_1+C_2y_2$ 不一定为方程的通解. 但是由解的结构定理知 $C_1y_1+C_2y_2$ 为方程的解，因此应选 B.

二、填空题

11. **参考答案**:$2\cos 2x\ dx$.

解题指导:这类问题通常有两种解法.

解法 1: 利用公式 $dy=y'dx$，先求 y'，由于 $y'=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x$，因此

$$dy=2\cos 2x\ dx.$$

解法 2: 利用微分运算公式

$$dy=d(\sin 2x)=\cos 2x\cdot d(2x)=2\cos 2x\ dx.$$

12. **参考答案**:$2^x\ln 2$.

解题指导:本题考查的知识点为初等函数的求导运算.

本题需利用导数的四则运算法则求解.

$$\begin{aligned} y'&=(2^x+\sin 2)'=(2^x)'+(\sin 2)'\\ &=2^x\ln 2. \end{aligned}$$

本题中常见的错误有：

$(\sin 2)'=\cos 2$.

这是由于误将 $\sin 2$ 认作 $\sin x$，事实上 $\sin 2$ 为一个常数，而常数的导数为 0，即

$$(\sin 2)'=0.$$

相仿$(\cos 3)'=0$，$(\ln 5)'=0$，$(e^{\frac{1}{2}})'=0$ 等.

请考生注意，不论以什么函数形式出现，只要是常数，它的导数必定为 0.

13. **参考答案**:0.

解题指导:本题考查的知识点为连续函数在闭区间上的最小值问题.

通常求解的思路为：

先求出连续函数$f(x)$在(a,b)内的所有驻点 $x_1,\cdots,x_k$.

比较$f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_k),f(a),f(b)$，其中最大(小)值即为$f(x)$在$[a,b]$上的最大(小)值，相应的 x 即为$f(x)$在$[a,b]$上的最大(小)值点.

由 $y=x^3-2x+1$，可得

$$y'=3x^2-2.$$

令 $y'=0$ 得 y 的驻点为 $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$，所给驻点皆不在区间$(1,2)$内，且当 $x\in(1,2)$时有

$$y'=3x^2-2>0.$$

可知 $y=x^3-2x+1$ 在$[1,2]$上为单调增加函数，最小值点为 $x=1$，最小值为$f(1)=0$.

注: 也可以比较$f(1)$，$f(2)$直接得出其中最小者，即为$f(x)$在$[1,2]$上的最小值.

本题中常见的错误是，得到驻点 $x_1=-\sqrt{\frac{2}{3}}$ 和 $x_2=\sqrt{\frac{2}{3}}$ 之后，不讨论它们是否在区间(1,2)内，而是错误地比较

$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\quad f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right),f(1),f(2),$$

从中确定 $f(x)$ 在[1,2]上的最小值. 则会得到错误结论.

14. **参考答案**：$\frac{1}{2}(e^2-1)$.

解题指导：本题考查的知识点为定积分计算.

可以利用变量替换，令 $u=2x$，则 $du=2dx$，当 $x=0$ 时，$u=0$；当 $x=1$ 时，$u=2$. 因此

$$\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 e^u du=\frac{1}{2}e^u\Big|_0^2=\frac{1}{2}(e^2-1).$$

或利用凑微分法

$$\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}d(2x)=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e^2-1).$$

本题中考生常在最后由于粗心而出现错误. 如

$$\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}d(2x)=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{1}{2}e^2,$$

这里 $e^{2x}\Big|_0^1=e^2-e^0=e^2-1$ 中丢掉第二项.

15. **参考答案**：$2x\cos(y+x^2)$.

解题指导：本题考查的知识点为二元函数的偏导数计算.

可以令 $u=y+x^2$，得 $z=\sin u$，由复合函数偏导数的链式法则得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\cos u\cdot(0+2x)\\&=2x\cos(y+x^2).\end{aligned}$$

16. **参考答案**：$y=C_1+C_2e^{-x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

解题指导：本题考查的知识点为二阶线性常系数齐次微分方程的求解.

二阶线性常系数齐次微分方程求解的一般步骤为：先写出特征方程，求出特征根，再写出方程的通解.

微分方程为 $y''+y'=0$,

特征方程为 $r^2+r=0$,

特征根 $r_1=0$, $r_2=-1$

因此所给微分方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{-x},$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

17. **参考答案**：$3(x-1)-(y+2)+z=0$ （或 $3x-y+z=5$）.

解题指导：本题考查的知识点为平面与直线的方程.

由题设条件可知应该利用点法式方程来确定所求平面方程.

所给直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{s}=(3,-1,1)$. 若所求平面 π 垂直于直线 l,则平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{s}$,不妨取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}=(3,-1,1)$. 则由平面的点法式方程可知

$$3(x-1)-[y-(-2)]+(z-0)=0,$$

即

$$3(x-1)-(y+2)+z=0$$

为所求平面方程.

或写为 $3x-y+z-5=0$.

上述两个结果都正确,前者 $3(x-1)-(y+2)+z=0$ 称为平面的点法式方程,而后者 $3x-y+z-5=0$ 称为平面的一般式方程.

18. **参考答案**:$y=f(1)$.

解题指导:本题考查的知识点有两个:一是导数的几何意义,二是求切线方程.

设切点为 $(x_0,f(x_0))$,则曲线 $y=f(x)$ 过该点的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

由题意可知 $x_0=1$,且在 $(1,f(1))$ 处曲线 $y=f(x)$ 的切线平行于 x 轴,因此应有 $f'(x_0)=0$,故所求切线方程为

$$y-f(1)=0.$$

本题中考生最常见的错误为:将曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程写为

$$y-f(x_0)=f'(x)(x-x_0)$$

而导致错误. 本例中错误地写为

$$y-f(1)=f'(x)(x-1).$$

本例中由于 $f(x)$ 为抽象函数,一些考生不习惯于写 $f(1)$,有些人误写切线方程为

$$y-1=0.$$

19. **参考答案**:1.

解题指导:本题考查的知识点为广义积分,应依广义积分定义求解.

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}x^{-2}\,dx&=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-2}\,dx\\&=\lim_{b\to+\infty}(-1)x^{-1}\Big|_1^b\\&=\lim_{b\to+\infty}[(-1)\cdot(b^{-1}-1)]\\&=1.\end{aligned}$$

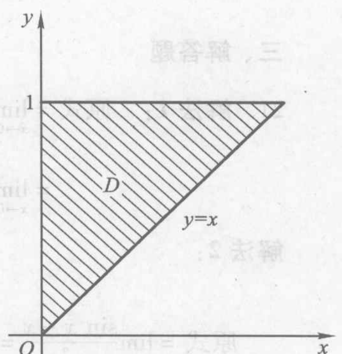

图 1-2

20. **参考答案**:$\dfrac{1}{2}$.

解题指导:本题考查的知识点为计算二重积分.

其积分区域如图 1-2 所示.

可利用二重积分的几何意义或将二重积分化为二次积分解之.

解法 1: 由二重积分的几何意义可知 $\iint\limits_D dxdy$ 表示积分区域 D 的面积,而区域 D 为等腰直角三角形,面积为$\dfrac{1}{2}$,因此 $\iint\limits_D dxdy=\dfrac{1}{2}$.

解法 2：化为先对 y 积分，后对 x 积分的二次积分.

作平行于 y 轴的直线与区域 D 相交，沿 y 轴正向看，入口曲线为 $y=x$，作为积分下限；出口曲线为 $y=1$，作为积分上限，因此

$$x \leqslant y \leqslant 1.$$

区域 D 在 x 轴上的投影最小值为 $x=0$，最大值为 $x=1$，因此

$$0 \leqslant x \leqslant 1.$$

可得知

$$\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{d}y = \int_0^1 y\Big|_x^1 \mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

解法 3： 化为先对 x 积分，后对 y 积分的二次积分.

作平行于 x 轴的直线与区域 D 相交，沿 x 轴正向看，入口曲线为 $x=0$，作为积分下限；出口曲线为 $x=y$，作为积分上限，因此

$$0 \leqslant x \leqslant y.$$

区域 D 在 y 轴上投影的最小值为 $y=0$，最大值为 $y=1$，因此

$$0 \leqslant y \leqslant 1.$$

可得知

$$\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 x\Big|_0^y \mathrm{d}y = \int_0^1 y\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}y^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

三、解答题

21. **解法 1**： 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2} = 0.\text{（两次利用洛必达法则）}$$

解法 2：

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^2}{2}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{4} = 0.\text{（利用等价无穷小代换）}$$

解题指导：本题考查的知识点为用洛必达法则求极限.

由于问题为“$\infty - \infty$”型极限问题，应先将求极限的函数通分，使所求极限化为“$\dfrac{0}{0}$”型问题.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}.$$

如果将上式右端直接利用洛必达法则求之，则运算复杂. 注意到使用洛必达法则求极限时，

如果能与等价无穷小代换相结合，则问题常能得到简化，由于当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x},$$

从而能简化运算.

本题考生中常见的错误为：由于当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$，因此

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

将等价无穷小代换在加减法运算中使用，这是不允许的.

22. **解法 1**：　将所给方程两端关于 x 求导，可得

$$2x + 6y^2 \cdot y' + 2(y + xy') + 3y' - 1 = 0,$$

整理可得

$$y' = \frac{1 - 2x - 2y}{6y^2 + 2x + 3}.$$

解法 2：　令 $F(x,y) = x^2 + 2y^3 + 2xy + 3y - x - 1$，

则

$$F'_x = 2x + 2y - 1,$$

$$F'_y = 6y^2 + 2x + 3,$$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x + 2y - 1}{6y^2 + 2x + 3}.$$

解题指导：本题考查的知识点为隐函数求导法.

$y = y(x)$ 由方程 $F(x,y) = 0$ 确定，求 y' 通常有两种方法：

一是将 $F(x,y) = 0$ 两端关于 x 求导，认定 y 为中间变量，得到含有 y' 的方程，从中解出 y'.

二是利用隐函数求导公式 $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$. 其中 F'_x, F'_y 分别为 $F(x,y) = 0$ 中 $F(x,y)$ 对第一个位置变元的偏导数与对第二个位置变元的偏导数.

对于一些特殊情形，可以从 $F(x,y) = 0$ 中较易地解出 $y = y(x)$ 时，也可以先求出 $y = y(x)$，再直接求导.

23. **解法 1**：　$\int xf'(x)\,\mathrm{d}x = xf(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}x.$

由于 x^2 为 $f(x)$ 的原函数，因此

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^2 + C,$$

且　$f(x) = (x^2)' = 2x,$

故　$\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot 2x \Big|_0^1 - x^2 \Big|_0^1 = 1.$

解法 2：　由于 x^2 为 $f(x)$ 的原函数，因此

$$f(x) = (x^2)' = 2x,$$

$$f'(x)=2.$$

$$\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^1=1.$$

解题指导:本题考查的知识点为定积分的计算.

本题解法 1 应用了分部积分法,计算要复杂些.

本题考生中出现的较多错误是不清楚原函数的概念. 采用下面解法而导致错误:

由于 x^2 为 $f(x)$ 的原函数,因此

$$f'(x)=x^2,$$

$$\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\cdot x^2\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}.$$

考生应该明确原函数的概念:若在 (a,b) 内有

$$F'(x)=f(x),$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 (a,b) 内的一个原函数. 那么上述的错误就可以避免.

24. **解**: 积分区域 D 如图 1-3 所示.

D 可以表示为

$$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1+x^2.$$

$$\text{原式}=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1+x^2} x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 (xy)\Big|_0^{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 (x+x^3)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{3}{4}.$$

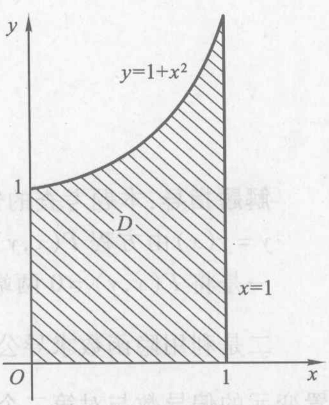

图 1-3

解题指导:本题考查的知识点为计算二重积分,选择积分次序.

如果将二重积分化为先对 x 后对 y 的积分,将变得复杂,因此考生应该学会选择合适的积分次序.

25. **解**: 所给方程为一阶线性微分方程,化为标准形

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x^2},$$

其通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int p\mathrm{d}x}\left(\int q\mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right),$$

$$p=\frac{1}{x},q=\frac{1}{x^2}.$$