课标本

教材完全解读

王后雄学案

总策划：熊 辉

高中数学 必修1

配人教B版

丛书主编：王后雄
本册主编：曾祥红

导航 丛书系列

中国青年出版社

课标本

教材完全解读

王后雄学案

高中数学 必修1

配人教B版

丛书主编：王后雄

本册主编：曾祥红

编　　委：王强芳　黄河清　丁仁贵　杜建国　王志明　王　涛　杜　苏　陈　锐　王春勇　胡建平　徐志平　邵爱先　朱少华

X导航丛书系列

中国青年出版社

（京）新登字083号

图书在版编目（CIP）数据

教材完全解读：人教B版．高中数学．1：必修/王后雄主编．
—2版．—北京：中国青年出版社，2008
ISBN 978-7-5006-7492-4

Ⅰ.教… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第076296号

策　　划：熊　辉
责任编辑：李　扬
封面设计：木头羊

教材完全解读
高中数学
必修1

中国青年出版社 出版发行

社址：北京东四 12 条 21 号　邮政编码：100708
网址：www.cyp.com.cn
编辑部电话：（010）64034328
读者服务热线：（027）61883306
咸宁市海岳印务有限公司印制　新华书店经销
889 × 1194　1/16　12.25 印张　327 千字
2008 年 7 月北京第 2 版　2008 年 7 月湖北第 2 次印刷
印数：5001 — 10000 册
定价：21.30 元
本书如有任何印装质量问题，请与承印厂联系调换
联系电话：（027）61883355

教材完全解读

本书特点

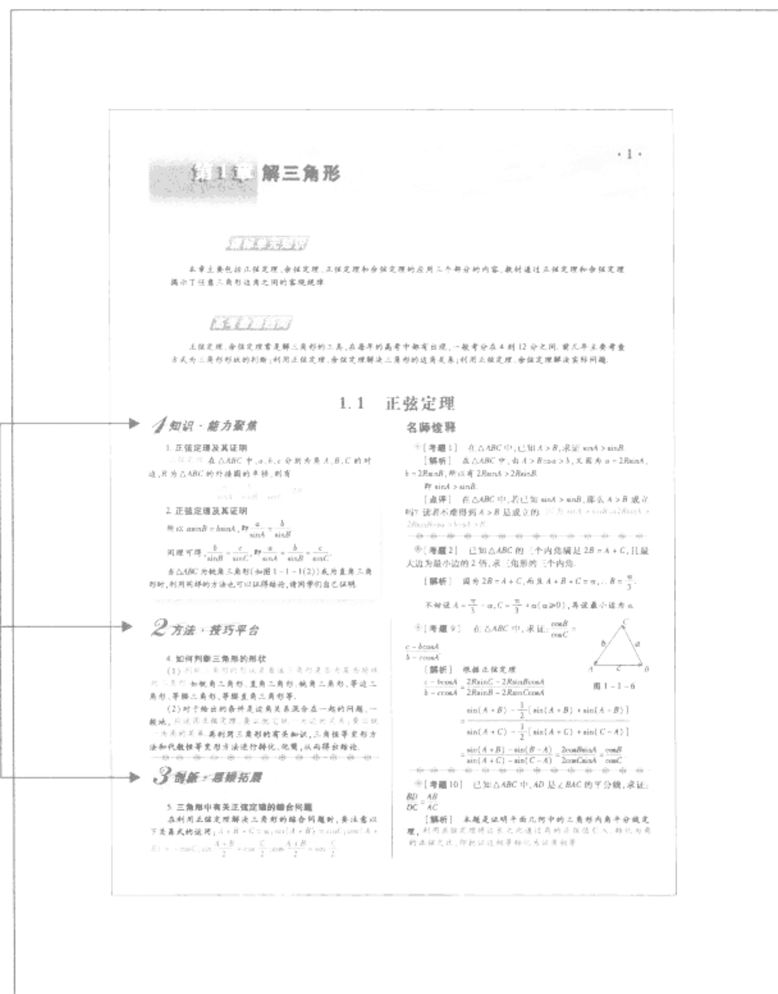
基础教育新课标改革已如火如荼地展开，新课程教材助学助考的开发问题已成为人们关注的焦点。应广大读者的要求，我们特邀来自国家新课程改革试验区和国家级培训班的专家编写课标版《教材完全解读》丛书。该系列丛书能帮助学生掌握新的课程标准，让学生能够按照课程理念和教材学习目标要求科学、高效地学习。该书以“透析全解、双栏对照、服务学生”为宗旨，助您走向成功。

这套丛书在整体设计上有两个突出的特点：一是双栏对照，对教材全解全析，在学科层次上力求讲深、讲透、讲出特色；另一个就是注重典型案例学习，突出鲜活、典型和示范的特点。

为了让您更充分地理解本书的特点，挑战学习的极限，请您在选购和使用本书时，先阅读本书的使用方法图示。

3层完全解读

从知识、方法、思维三个方面诠释教材知识点和方法点，帮您形成答题要点、解题思维，理清解题思路、揭示考点实质和内涵。



教辅大师王后雄教授、特级教师科学超前的体例设置，帮您赢得了学习起点，成就您人生的夙愿。

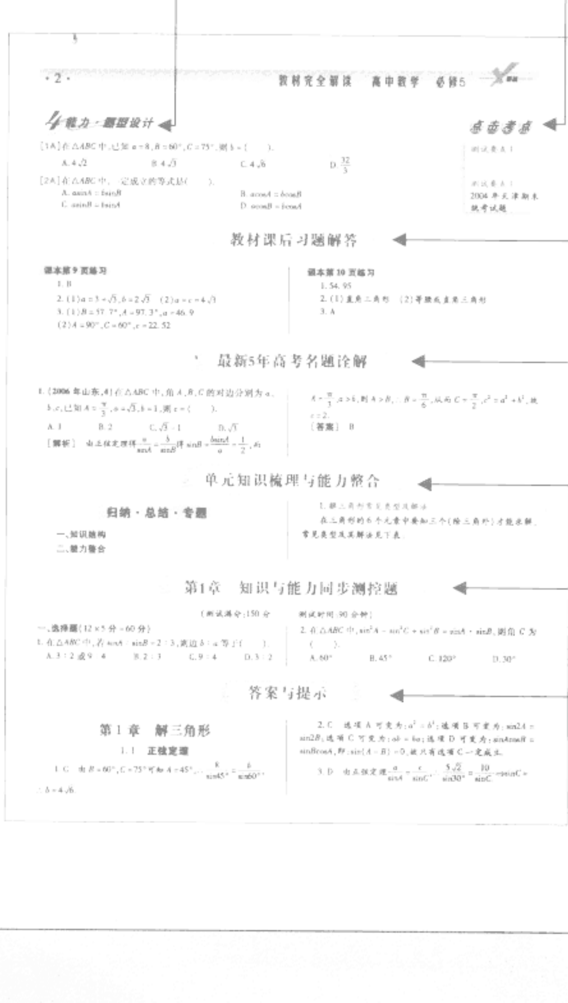
——题记

整体训练方法

针对本节重点、难点、考点及考试能力达标所设计的题目。题目难度适中，是形成能力、考试取得高分的必经阶梯。

解题错因导引

“点击考点”栏目导引每一道试题的“测试要点”。当您解题出错时，建议您通过“测试要点”的指向，弄清致错原因，找到正确答案。


·2· 教材完全解读 高中数学 必修5

能力·题型设计

点击考点

教材课后习题解答

最新5年高考名题诠解

单元知识梳理与能力整合

归纳·总结·专题

第1章 知识与能力同步测控题

答案与提示

第1章 解三角形

1.1 正弦定理

教材课后习题解答

帮助您弥补课堂上听课的疏漏。答案准确，讲解繁简适度、到位、透彻。

最新5年高考名题诠解

汇集高考名题，讲解细致入微，教纲、考纲，双向例释；练习、考试，讲解透彻；多学、精练，效果显著。

单元知识整合

单元知识与方法网络化，帮助您将本单元所学教材内容系统化，形成对考点知识的二次提炼与升华，全面提高学习效率。

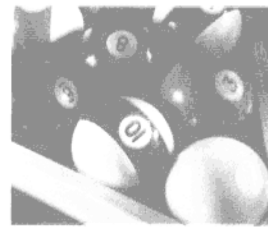
考试高分保障

精心选编涵盖本章节或阶段性知识和能力要求的检测试题，梯度合理、层次分明，与同步考试接轨，利于您同步自我测评，查缺补漏。

点拨解题思路

试题皆提供详细的解题步骤和思路点拨，鼓励一题多解。不但知其然，且知其所以然，帮助您养成良好规范的答题习惯。

目 录



知识与方法

阅读索引

学法指津

——如何学好人教 B 版高中数学(必修 1)

同学们:

经过初中三年的努力学习,你们已顺利升入高中学习. 高中阶段的学习仍然是你们学习生活中的重要组成部分,且难度比初中大. 如何学好人教 B 版高中数学必修 1,这里谈几点,供同学们参考.

准确理解数学概念. 数学概念是数学知识的载体,它常以定义的形式出现,但要注意,有的概念不能定义(如集合).(见数学人教 B 版必修 1). 随着知识的深化,同一概念也会发生形式和内涵的变化. 如函数的定义,在初中,是从变量的角度来定义的,而在高中学了集合和映射,我们就可以从集合和映射的角度给函数一个新的定义(详见本书第二章函数 2.1.1 函数的定义). 数学中的新概念往往以旧概念为基础,原有概念不清,新概念就难以掌握. 所以我们在学习中应学好原来的旧概念,再在此基础上学习新的概念,并从中体会它们的异同,从而悟出概念的实质. 所谓打好了基础,很大程度上意味着牢牢掌握了所学过的概念. 学好概念,是学好数学的第一步.

重视定理例题的学习. 一个定理或公式的产生往往伴随着创造性的证明. 很多同学学数学只学定理或公式的结论,不知其证明过程,这是不可能真正把数学学好的. 因为在一个定理或公式的产生、形成过程中蕴含着基本的数学思想和方法,同时也展示了数学家们解决问题的方法,如本册书中函数的零点,就可以用来求高次方程的根,它解决了无法用求根公式求高次方程的根的问题,展示了函数与方程、数形结合的数学思想,这一数学思想的出现可以解决很多用常规方法无法解决的数学问题. 还有的同学不重视对例题的学习,认为例题只是一个题目,又不是一个定理或公式,可以不必重视. 实际上,一本好的教辅(如教材完全解读)上的例题常常是相当典型的. 它们对理解概念、掌握定理公式、深化数学思想和方法、做习题都有特别重要的帮助.

学会解题前的分析. 一个数学问题,一般包含条件与结论两部分. 有的问题,结论可由条件直接推出. 大部分问题不是这样,而是由这些问题的条件可以推出与结论更加接近的中间结果,进而可以得出所要的结论. 但是,所给问题的条件往往可以推出若干结果,这些结果有的与我们要得到的结论无关,如果用这些结果去推我们的结论,自然行不通. 所以,必须进行分析比较,寻求与条件和结论都密切联系的中间结果. 一个常用的分析方法是:从结论出发回推,看看结论可由哪些东西得到. 值得注意的是,能推得结论的东西也许很多,我们的目的是寻求那些与所给条件相关的东西. 在许多情况下,我们需要引用一些已知的结果,才能将条件和结论很好地结合起来.

重视数学思想和方法的学习. 数学思想和方法是数学的灵魂. 新课程标准人教 B 版高中数学(必修 1)中蕴含高中数学的基本数学思想和方法. 如函数与方程、分类讨论、数形结合、化归与转化等数学思想和方法. 在学习中,我们应好好领会,并学会运用,很多问题,需要我们运用这些数学思想和方法解决. 如已知函数 $f(x)=ax^2+(2a-1)x-3$ 在区间 $\left[-\frac{3}{2},2\right]$ 上的最大值为 1,求实数 a 的值就要用到分类讨论的思想,而已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=-x^2+mx-1\}$ 与 $B=\{(x,y)\mid x+y-3=0,0\leqslant x\leqslant 3\}$,若 $A\cap B$ 为单元素集合,求实数 m 的值范围. 解决这个问题就要用到化归与转化的数学思想和方法(详细解答见本书第二章单元知识梳理与能力整合). 像这样的例子很多,我就不一一详细列举了. 总之,学好数学,在某种程度上说,就是不断积累和探索数学思想和方法.

加强学以致用的观念. 新课程改革的特色之一就是加强了数学的应用,这也是近几年高考命题的方向,每年高考都有数学应用,数学建模方面的问题. 而我们使用的教材中专门安排了两节函数的应用,其目的就是引导同学们关注生活、关注社会,用数学的眼光来观察社会和生活,达到数学来源于生活、又服务于生活的目的,而不仅仅是为了考试.

另外,好的教辅书[如"中国第一品牌图书",由著名教辅大师、教育、教学论专家王后雄领衔主编的王后雄学案《教材完全解读》(高中数学必修 1)]可以帮你学习,帮你开启智慧的大门,助你走向成功之路!

第一章 集合

课标单元知识

解读课程标准和考试大纲：

(1)本章主要讲述集合的初步知识.集合的概念及其理论,称为集合论,是近、现代数学的一个重要基本理论.一方面,许多重要的数学分支都建立在集合理论的基础上;另一方面,集合论及其所反映的数学思想,在越来越广泛的领域中得到应用.

(2)集合语言是现代数学的基本语言,通过本章的学习,我们应学会使用集合语言,这样有利于准确、简洁地表达数学内容,提高我们运用数学语言进行交流的能力.

(3)集合的初步知识是学习、掌握和使用数学语言的基础,是高中数学学习的出发点,学会用集合理解性质,用集合之间的关系理解性质之间的关系.

(4)本章的重点是集合的特征性质描述法及集合之间的相互关系,只有掌握了集合的特征性质描述法及集合之间的相互关系,才有可能简洁、准确地表达数学对象和结构.

(5)本章知识中包含了比较多的新概念、新符号,并且有些概念、符号容易混淆,这就要求准确掌握其内涵并能熟练运用.

(6)数形结合、分类讨论的思想在解决集合之间关系的问题中应用较多.

(7)通过本章的学习,要努力培养自己观察、比较、抽象、概括能力;初步形成运用集合知识准确地表述数学问题和实际问题的意识和能力;培养科学的、严谨的学习态度,为树立辩证唯物主义科学的世界观、认识世界打下基础.

课程标准要求参考：

1.集合的含义与表示

(1)通过实例,了解集合的含义,体会元素与集合的"属于"关系.

(2)能选择自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题,感受集合语言的意义和作用.

2.集合间的基本关系

(1)理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.

(2)在具体情境中,了解全集与空集的含义.

3.集合的基本运算

(1)理解两个集合的并集与交集的含义,会求两个简单集合的并集与交集.

(2)理解在给定集合中一个子集的补集的含义,会求给定子集的补集.

(3)能使用维恩图表达集合的关系及运算,体会直观图示对理解抽象概念的作用.

高考命题趋向

(1)近几年,集合这部分内容在高考中每年总有题目出现,一般是基础题,有时也有集合与其他知识综合但深度较浅的小型综合题,大都活而不难,主要考查基本概念和基本运算.

(2)高考试题中,对集合从两个方面进行考查,一方面是考查对集合概念的认识和理解水平,如对集合中涉及的特定字母和符号、元素与集合间的关系,集合与集合间的比较,主要表现在对集合的识别和表达上;另一方面,则是考查学生对集合知识应用的水平.集合知识的应用主要是和数学上其他知识的综合应用.题目多数是一个固定的集合和非固定的集合,满足某种集合间的运算关系,要求不固定集合中的参数的值.

由此可见,2007年以及今后的高考试题中对集合的考查主要是考查基本概念和基本运算等方面的基础题.

考试大纲要求(必考内容与要求):

集合

(1)集合的含义与表示

①了解集合的含义、元素与集合的"属于"关系.

②能用自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题.

(2)集合间的基本关系

①理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.

②在具体情境中,了解全集与空集的含义.

(3)集合的基本运算

①理解两个集合的并集与交集的含义,会求两个简单集合的并集与交集.

②理解在给定集合中一个子集的补集的含义,会求给定子集的补集.

③能使用维恩图(Venn)表达集合的关系及运算.

1.1 集合与集合的表示方法

1.1.1 集合的概念

知识·能力聚焦

1. 集合的概念

集合是数学中最原始的不定义的概念，只能给出描述性说明：某些指定的且不同的对象集在一起就成为一个集合. 组成集合的对象叫元素. 集合常用大写字母 A、B、C、…来表示. 元素常用小写字母 a、b、c、…来表示.

集合是一个确定的整体，因此对集合也可以这样描述：具有某种属性的对象的全体组成一个集合.

［注意］ (1)对于集合我们一定要从整体的角度来看待它. 例如由"我们班的同学"组成的一个集合 A，则它是一个整体，也就是一个班集体，也可以用我们班的序号来代替它.

(2)构成集合的对象必须是"确定"的且"不同"的. 其中"确定"是指构成集合的对象具有非常明确的特征，这个特征不是模棱两可的；"不同"是指构成集合的各个对象互不相同.

2. 元素与集合的关系

元素与集合的关系有属于与不属于两种：元素 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；元素 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$ 或 $a\overline{\in} A$.

［注意］ (1)$a\in A$ 与 $a\notin A$ 取决于 a 是不是集合 A 中的元素. 根据集合中元素的确定性，可知对任何 a 与 A，在 $a\in A$ 与 $a\notin A$ 这两种情况中必有一种且只有一种成立.

(2)符号"$\in$"、"$\notin$"仅表示元素与集合间的关系，不能用来表示集合与集合之间的关系，这一点要牢记.

3. 集合中元素的特性

(1)确定性：设 A 是一个给定的集合，x 是某一具体对象，则 x 或者是 A 的元素，或者不是 A 的元素，两种情况必有一种且只有一种成立. 例如 $A=\{0,1,3,4\}$，可知 $0\in A$，$6\notin A$.

(2)互异性："集合中的元素，必须是互异的"，就是说"对于一个给定的集合，它的任何两个元素都是不同的". 如方程 $(x-4)^2=0$ 的解集记为 $\{4\}$，而不能记为 $\{4,4\}$.

(3)无序性：集合与其中元素的排列次序无关，如集合 $\{a,b,c\}$ 与 $\{c,b,a\}$ 是同一个集合.

4. 集合的分类

集合可根据它含有的元素个数的多少分为两类：

有限集：含有有限个元素的集合. 如"方程 $3x+1=0$ 的解组成的集合"，由"2,4,6,8 组成的集合"，它们的元素个数是可数的，因此这两个集合是有限集.

无限集：含有无限个元素的集合. 如"到平面上两个定点的距离相等的所有点"，"所有的三角形"，组成上述集合的元素是不可数的，因此，它们是无限集.

名师诠释

◈［考题1］ 下列各组对象能否构成一个集合：

(1)著名的数学家；

(2)某校 2007 年在校的所有高个子学生；

(3)不超过 10 的非负数；

(4)方程 $x^2-4=0$ 在实数范围内的解；

(5)$\sqrt{2}$的近似值的全体.

［解析］ (1)描述的对象著名的数学家没有统一的标准，描述的对象不确定，对于某个人是否"著名"无法客观地判断，因此"著名的数学家"不能构成一个集合. 类似地，(2)也不能构成集合. (3)任给一个实数 x，可以明确地判断是不是"不超过 10 的非负数"，即"$0\leqslant x\leqslant 10$"与"$x>10$ 或 $x<0$"两者必居其一，且仅居其一，故"不超过 10 的非负数"能构成集合. 类似地，(4)也能构成集合. (5)"$\sqrt{2}$的近似值"不明确精确到什么程度，因此很难判定一个数(比如 2)是不是它的近似值，所以(5)不是一个集合.

［点评］ 一些元素构成的集合必须具备以下两个特点：一是整体性，二是确定性，其中"整体"一语，说明集合是指某些对象的整体而不是指其中的个别对象，这就是集合的整体性. 一个对象要么是集合的元素，要么不是集合的元素，二者必居其一，这是集合的确定性.

◈［考题2］ 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空：

(1)设 A 为所有亚洲国家组成的集合，则：

中国____A；美国____A；印度____A；英国____A.

(2)若 $A=\{x^2=x\}$，则 -1 ____A；

(3)$2\sqrt{3}$____$\{x|x<\sqrt{11}\}$；$3\sqrt{2}$____$\{x|x>4\}$；

$\sqrt{2}+\sqrt{5}$____$\{x|x\leqslant 2+\sqrt{3}\}$.

(4)$(-1,1)$____$\{y|y=x^2\}$；$(-1,1)$____$\{(x,y)|y=x^2\}$.

［解析］ (1)依次填 $\in$，$\notin$，$\in$，$\notin$.

(2)$\because x^2-x=0$ 的根为 0，1，$\therefore A=\{0,1\}$，$\therefore -1\notin A$.

(3)$\because 2\sqrt{3}=\sqrt{12}>\sqrt{11}$，$3\sqrt{2}=\sqrt{18}>\sqrt{16}=4$，

$(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2=7+2\sqrt{10}<7+2\sqrt{12}=(2+\sqrt{3})^2$，

$\therefore \sqrt{2}+\sqrt{5}<2+\sqrt{3}$. $\therefore$ 依次应填 $\notin$，$\in$，$\in$.

(4)$\because \{y|y=x^2\}$ 中元素是数，而$(-1,1)$代表一组有序实数对或代表一个点，$\therefore (-1,1)\notin\{y|y=x^2\}$，$\therefore$ 依次应填 $\notin$，$\in$.

［点评］ (1)确定元素是否在集合中，要根据元素是否满足代表元素所适合的条件来确定. (2)在比较$\sqrt{2}+\sqrt{5}$与$2+\sqrt{3}$的大小时，用到了平方法.

◈［考题3］ 给出命题：①$\{e,f,g,h\}$与$\{g,f,h,e\}$是两个不同的集合；②方程$(x-2)^2(x-3)=0$ 的解集为$\{2,2,3\}$；③全体高个子中国人构成一个集合；④0 与 1 之间的全体无理数构成一个集合. 其中正确的个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

特别地,我们把不含有任何元素的集合叫做空集,记作∅. 如$\{x\in\mathbf{R}|x^2+1=0\}$. 注意:(1)空集就像一个无处不在的幽灵,要处处设防,时刻提高警惕,才不至于掉进空集这一陷阱之中.

(2)警防$0=\{0\}$,$\{0\}=\varnothing$,$\{\varnothing\}=\varnothing$的错误.

①0是集合$\{0\}$的一个元素可记为$0\in\{0\}$. ②∅表示空集,$\{0\}$表示含一个元素0的集合. ③$\{\varnothing\}$表示含有一个元素∅的集合.

5. 特定集合的表示

为了书写方便,我们规定常见的数集用特定的字母表示,下面是几种常见的数集表示方法,请牢记.

(1)全体非负整数的集合通常简称非负整数集(或自然数集),记作**N**.

(2)非负整数集内排除0的集合,也称正整数集,记作$\mathbf{N}^*$或$\mathbf{N}_+$.

(3)全体整数的集合通常简称为整数集,记作**Z**.

(4)全体有理数的集合通常简称为有理数集,记作**Q**.

(5)全体实数的集合通常简称为实数集,记作**R**.

2 方法·技巧平台

6. 元素分析法

解决集合问题,应对集合的概念有深刻理解,解题时能不能把集合转化为相关的数学知识是解题的关键,而集合离不开元素,所以分析元素是解决集合问题的核心. 元素分析法就是抓住元素进行分析,即元素是什么? 具备哪些性质? 是否满足元素的三个特性?(即确定性、互异性、无序性)

如:若$-3\in\{a-3,2a-1,a^2+4\}$,求实数a的值,并求此时的实数集.

[解析] 由于-3在集合中,因此应分不同情况讨论.

$\because -3\in\{a-3,2a-1,a^2+4\}$,

若$a-3=-3$,则$a=0$,此时集合为$\{-3,-1,4\}$;

若$2a-1=-3$,则$a=-1$,此时集合为$\{-4,-3,5\}$;

而$a^2+4\neq-3$,∴所求集合为$\{-3,-1,-4\}$或$\{-4,-3,5\}$.

又如:(1)设集合$A=\{k^2-k,2k\}$,求实数k的取值范围.

(2)已知$x^2\in\{0,1,x\}$,求实数x的值.

[解析] (1)由元素的互异性得$k^2-k\neq2k$. ∴$k\neq0,k\neq3$.

[解析] ①根据集合中元素的无序性可知,它们是同一集合,故①是错误的. ②由集合中元素的互异性知②是错的. ③面对一位身高1.75米和一位身高1.80米的两个中国人,你可能会说身高1.75米者不是"全体高个子中国人"中的一员;但面对身高分别是1.75米和1.60米的两位中国人,你却有理由认为身高1.75m者是"全体高个子中国人"中的一员. 由此可知"全体高个子中国人"中的元素不具有确定性,或者说其中的个体不具备指定性,故③是错误的. 命题④正确. 故选A.

◈[考题4] 指出下列集合是有限集还是无限集.

(1)所有实数的集合.

(2)平面α内所有直线的集合.

(3)满足$-3<x<6$的所有整数的集合;

(4)方程$x^2-2x+3=0$的所有解的集合.

[解析] (1)无限集;(2)无限集;(3)满足$-3<x<6$的整数有$-2,-1,0,1,2,3,4,5$,共8个,故(3)是有限集;(4)由于方程根的判别式$\Delta=(-2)^2-4\times3=-8<0$,所以方程无解,故为∅.

◈[考题5] 给出下列关系:①$\frac{1}{2}\in\mathbf{R}$; ②$\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$; ③$|-3|\notin\mathbf{N}^*$; ④$|-\sqrt{3}|\in\mathbf{Q}$; ⑤$0\in\varnothing$,其中正确的个数为( ).

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

[解析] 由$\mathbf{R}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{N}^*$、∅的含义可知,①②正确,③④⑤不正确,∴选B.

[点评] 对几个常见数集的符号表示应熟练掌握.

◈[考题6] 设A是实数集,且满足条件:若$a\in A,a\neq1$,则$\frac{1}{1-a}\in A$.

(1)若$2\in A$,则A中必还有另外两个元素;

(2)集合A不可能是单元素集;

(3)集合A中至少有三个不同的元素.

[解析] 解此题关键在于由已知$a\in A$,得到$\frac{1}{1-a}\in A$,$\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}\in A$,然后逐步探索,再根据集合中元素的互异性,从而将问题加以解决.

由$a\in A,a\neq1$,则$\frac{1}{1-a}\in A$.

(1)$2\in A$,则$\frac{1}{1-2}=-1\in A$,于是$\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in A$,故集合$A$中还含有$-1$,$\frac{1}{2}$两个元素.

(2)若A为单元素集,则$a=\frac{1}{1-a}$,即$a^2-a+1=0$,此方程无实数解,∴$a\neq\frac{1}{1-a}$,∴a与$\frac{1}{1-a}$都为集合A的元素,则A不是单元素集.

(3)由已知$a\in A\Rightarrow\frac{1}{1-a}\in A\Rightarrow\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=\frac{1-a}{-a}\in A$. 现只需证明:$a$、$\frac{1}{1-a}$、$\frac{1-a}{-a}$三数互不相等.

①若$a=\frac{1}{1-a}\Rightarrow a^2-a+1=0$,方程无解,∴$a\neq\frac{1}{1-a}$;②若$a=\frac{1-a}{-a}\Rightarrow a^2-a+1=0$,方程无解,∴$a\neq\frac{1-a}{-a}$;③若$\frac{1}{1-a}=\frac{1-a}{-a}\Rightarrow a^2-a+1=0$,方程无解,∴$\frac{1}{1-a}\neq\frac{1-a}{-a}$,故集合$A$中至少有三个元素.

[点评] 集合离不开元素,元素是集合的核心,所以解决有关集合中的探索性问题,可以从元素入手,作为解题的切入点.

(2)中用到反证法的解题思想,(3)中需要证明a、$\frac{1}{1-a}$、$\frac{1-a}{-a}$三数互不相等.

$\therefore$ 实数 k 的取值范围是 $\{k|k\neq 0$ 且 $k\neq 3\}$.

(2)当 $x^2=0$ 时,设 $x=0$,此时集合中有两个相同的元素,舍去.

当 $x^2=1$ 时,得 $x=\pm 1$.

若 $x=1$,此时集合中有两个相同的元素,舍去.

若 $x=-1$,此时的集合为 $\{0,1,-1\}$,适合题意.

当 $x^2=x$ 时,得 $x=0$ 或 $x=1$,由上可知都不适合题意.

综上可知,适合题意的 x 的值为 -1.

[点评] 对集合元素的性质的考查,要考虑到元素的确定性,如(1)中 k^2-k 和 $2k$ 是确定的,它们也是互异的;对于无序性的考查,(1)题得到了很好的体现.既然 x^2 是集合中的元素,则它既可能是1,也可能是0或其他元素,对此,需对其进行分类讨论.元素的性质既可以被应用于解题,又可以利用它们检验解正确与否,特别是互异性,最易被忽视,必须在学习中引起足够的重视.

3 创新·思维拓展

7. 利用集合中元素的特性解决与方程有关的问题

集合与方程有密切联系,利用集合中元素的特性,即元素的互异性、无序性、确定性,再结合方程的解法,可以求出集合中参数的值.

[例] 已知 $M=\{2,a,b\}$,$N=\{2a,2,b^2\}$,且 $M=N$.求 a、b 的值.

[解析] 两个集合相等是集合中所含元素相同但顺序可以不同.

解:由题意得 $\begin{cases}a=2a,\\ b=b^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=b^2,\\ b=2a,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=0,\\ b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=0,\\ b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=0,\\ b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\ b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

由集合元素的互异性知 $\begin{cases}a=0,\\ b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\ b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

[点评] 当方程组得出多组解时要注意检验集合元素的互异性.

◈[考题7] 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|ax^2-3x+2=0,a\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 是空集,求 a 的取值范围;

(2)若 A 中只有一个元素,求 a 的值,并把这个元素写出来;

(3)若 A 中至多只有一个元素,求 a 的取值范围.

[解析] 集合 A 中的元素即是方程 $ax^2-3x+2=0$ 的解,A 中元素的个数即是方程解的个数.

(1)$\because A=\varnothing$,$\therefore$ 方程 $ax^2-3x+2=0$ 的判别式 $\Delta=(-3)^2-4\cdot a\cdot 2<0$,解得:$a>\frac{9}{8}$.

(2)$\because A$ 中只有一个元素,

$\therefore$ 方程 $ax^2-3x+2=0$ 仅有一个根.

当 $a=0$ 时,$ax^2-3x+2=0$ 的根为 $\frac{2}{3}$,$A=\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

当 $\Delta=(-3)^2-4\cdot a\cdot 2=0$ 时,$a=\frac{9}{8}$.这时方程 $ax^2-3x+2=0$ 有两个相等实根为 $\frac{4}{3}$,$\therefore A=\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

(3)若 A 中至多只有一个元素,则方程 $ax^2-3x+2=0$ 的判别式 $\Delta=(-3)^2-4\cdot a\cdot 2\leqslant 0$ 或 $a=0$,

解得:$a\geqslant\frac{9}{8}$ 或 $a=0$.

[点评] 理解集合元素个数即是方程 $ax^2-3x+2=0$ 的解的个数,是解此题的关键.

[规律总结] 方程 $ax^2+bx+c=0$.

(1)$a=0$ 且 $b\neq 0$,方程有一解.

(2)$a\neq 0$. ①$\Delta>0$ 时方程有两个不同解;

②$\Delta=0$ 时方程有唯一解;

③$\Delta<0$ 时方程无解.

4 能力·题型设计

[1B]含有三个实数的集合可表示为 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$,也可表示为 $\{a^2,a+b,0\}$,则 $a^{2007}+b^{2007}$ 的值为( ).

A. 0　B. 1　C. -1　D. ± 1

[2B]集合 $A=\{1,4,9,16,\cdots\}$,若 $m\in A$,$n\in A$,则 $m\oplus n\in A$,"$\oplus$"是一种运算,则"$\oplus$"可以是( ).

A. 加法　B. 减法　C. 除法　D. 乘法

[3A]给出下列四个对象,①某中学的大胖子;②你所在班中身高超过1.80米的高个子;③2008年北京奥运会中的比赛项目;④$\{1,1,3,5\}$.其中能构成集合的个数为( ).

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

[4B]由实数 x,$-x$,$|x|$,$\sqrt{x^2}$ 及 $-\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合中,含有元素的个数最多为( ).

A. 2　B. 3　C. 4　D. 5

[5A]给出四个集合:①太阳系中的全体行星;②小于 $\frac{1}{10^{100}}$ 的正有理数的全体;③户口在北京市的公民的全体;④从某试验田里收获的谷粒的全体.其中无限集是( ).

A. ②　B. ①③　C. ①④　D. ①②④

[6A]下列关系中:①$0.21\in\mathbf{Q}$;②$\frac{10}{5}\notin\mathbf{N}^*$;③$0\notin\mathbf{N}$.正确的个数是( ).

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

点击考点

测试要点6
2007年黄冈市重点中学模拟题

测试要点2
2006年山东烟台一模

测试要点1

测试要点3

测试要点4

测试要点5
2007年东北八校联考题

[7A]已知 M 中有三个元素可以作为某一个三角形的边长,则此三角形一定不是(　　).

A. 直角三角形　　B. 锐角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

[8A]若集合 $A=\{x|x^2+(a+1)x+a=0\}$ 中仅有一个元素,则 $a=$ ________.

[9A]方程 $2x^2-5x-3=0$ 在实数范围内的解集有 ________ 个元素;在整数范围内的解集有 ________ 个元素.

[10A]已知方程 $ax+b=0$,当 a,b 满足什么条件时,方程的解集是有限集;当 a,b 满足什么条件时,方程的解集是无限集?当 a,b 满足什么条件时,方程的解集是空集?

测试要点3
测试要点7
2007年青岛市部分重点中学联考题
测试要点7
2007年大连市部分中学练习题
测试要点7
2007年北京海淀区练习题

教材课后习题解答

练习A

1. (1)能　(2)能　(3)不能　(4)能　(5)能　(6)不能　(7)能　(8)能

2. 自然数集,记作 **N**,是无限集;整数集,记作 **Z**,是无限集;有理数集,记作 **Q**,是无限集;实数集,记作 **R**,是无限集.

3. (1)不正确　(2)正确　(3)不正确　(4)不正确　(5)正确　(6)正确　(7)正确　(8)正确

练习B

1. (1) $\notin$　(2) $\in$　(3) $\notin$　(4) $\notin$　(5) $\notin$　(6) $\in$　(7) $\in$　(8) $\in$

2. (1)不正确　(2)不正确　(3)不正确　(4)正确　(5)不正确

最新5年高考名题诠解

1. (2006年辽宁高考,理5文8) 设 $\oplus$ 是 **R** 上的一个运算,A 是 **R** 的非空子集.若对任意 $a、b\in A$,有 $a\oplus b\in A$,则称 A 对运算 $\oplus$ 封闭,下列数集对加法、减法、乘法和除法(除数不等于零)四则运算都封闭的是(　　).

A. 自然数集　　B. 整数集

C. 有理数集　　D. 无理数集

[解析]　令 $a=1,b=2,\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$,可排除A、B.

令 $a=\sqrt{2},b=3\sqrt{2},\frac{a}{b}=\frac{1}{3}$,可排除D.

[答案]　C

2. (2006年山东高考,理1文1) 定义集合运算:$A\odot B=\{z|z=xy(x+y),x\in A,y\in B\}$.设集合 $A=\{0,1\}$,$B=\{2,3\}$,则集合 $A\odot B$ 的所有元素之和为(　　).

A. 0　　B. 6　　C. 12　　D. 18

[解析]　$\because A=\{0,1\},B=\{2,3\}$,

$\therefore A\odot B=\{0,6,12\}$.

故所有元素之和为 $0+6+12=18$.

[答案]　D

3. (2005年湖北高考,理1文1) 设 $P、Q$ 为两个非空实数集合,定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$.若 $P=\{0,2,5\}$,$Q=\{1,2,6\}$,则 $P+Q$ 中元素的个数是(　　).

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

[解析]　穷举法,$P+Q=\{1,2,3,4,6,7,8,11\}$.

[答案]　B

1.1.2 集合的表示方法

知识·能力聚焦

1. 集合的表示方法

(1)列举法.就是把集合中的元素一一列举出来的方法,置于大括号内.例如,由方程 $x^2=4$ 的所有的解组成的集合,可以表示为 $\{-2,2\}$.

[注意] ①用列举法表示集合时,集合中元素的列举与元素顺序无关,即符合集合的无序性.如用列举法表示甲、乙两个足球队比赛时所有甲方队员组成的集合等.

②在集合的书写上,要注意规范性,如关于 x 的方程 $x-a=0$ 的解集应写成 $\{a\}$,而不是 a.

(2)描述法.就是用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合的方法.描述法有两种不同的表示形式.

形式一:将说明元素性质的一句话写在大括号内,即文字描述法.

[例] 高一(1)班全体同学所有的集合,可表示为{高一(1)班的同学};整数集可表示为{整数}.

[注意] 以下表示高一(1)班所有同学所组成的集合是错误的.

①{高一(1)班的同学组成的集合},

②{高一(1)班的所有同学}.

(3)在表示集合时,我们用大括号"{ }",它本身便带有"所有的……"或"……的全体(全部)"之意.所以①中"集合"二字含全部之意,应删去;②中"所有"二字应去掉.

形式二:在大括号内,首先写出集合元素的表现形式(称之为代表元素)和它的范围,再画一条竖线(或一个冒号,或一个分号),然后写上元素所满足的条件(性质),即符号描述法.其基本形式如下:

$\{x\in A \mid x$ 具有性质 $p\}$,或 $\{x\in A: x$ 具有性质 $p\}$,或 $\{x\in A; x$ 具有性质 $p\}$.

[例1] 方程 $x^2-3x-10=0$ 的所有实数解所组成的集合(称为方程的解集),可表示为 $\{x\in\mathbf{R} \mid x^2-3x-10=0\}$.

[例2] 由函数 $y=2x+1$ 图象上的所有点的坐标所组成的集合,可表示为 $\{(x,y)\mid y=2x+1\}$.

[说明] ①中学阶段,我们一般是在实数集中讨论问题,在不易误解的情况下,表示集合时无需注明 $x\in\mathbf{R}$.

②在数学中,常用第二种形式来表示集合,它较第一种更简捷、更严密.

名师诠释

◈[考题1] 用列举法把下列集合表示出来:

(1)$A=\left\{x\in\mathbf{N}\ \middle|\ \dfrac{6}{6-x}\in\mathbf{N}\right\}$;

(2)$B=\left\{\dfrac{6}{6-x}\in\mathbf{N}\ \middle|\ x\in\mathbf{N}\right\}$;

(3)$C=\{y\mid y=-x^2+4,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$;

(4)$D=\{(x,y)\mid y=-x^2+4,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$;

(5)$E=\left\{x\ \middle|\ \dfrac{p}{q}=x,p+q=5,p\in\mathbf{N},q\in\mathbf{N}^*\right\}$.

[解析] (1)$\because \dfrac{6}{6-x}\in\mathbf{N},x\in\mathbf{N},\therefore \begin{cases}\dfrac{6}{6-x}\geqslant 0,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}6-x>0,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$

$\therefore 0\leqslant x<6,\therefore x=0,1,2,3,4,5$.

当 $x=0,3,4,5$ 这4个自然数时,

$\dfrac{6}{6-x}=1,2,3,6$ 也是自然数,

$\therefore A=\{0,3,4,5\}$.

(2)由(1)知 $B=\{1,2,3,6\}$.

(3)由 $y=-x^2+4,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}$ 知,$0\leqslant y\leqslant 4$,

$\therefore x=0,1,2$ 时,$y=4,3,0$ 符合题意,

$\therefore C=\{0,3,4\}$.

(4)点 (x,y) 满足条件 $y=-x^2+4,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}$,

则有 $\begin{cases}x=0,\\ y=4,\end{cases}\begin{cases}x=1,\\ y=3,\end{cases}\begin{cases}x=2,\\ y=0.\end{cases}$

$\therefore D=\{(0,4),(1,3),(2,0)\}$.

(5)依题意知 $p+q=5,p\in\mathbf{N},q\in\mathbf{N}^*$,则

$\begin{cases}p=0,\\ q=5,\end{cases}\begin{cases}p=1,\\ q=4,\end{cases}\begin{cases}p=2,\\ q=3,\end{cases}\begin{cases}p=3,\\ q=2,\end{cases}\begin{cases}p=4,\\ q=1.\end{cases}$

x 要满足条件 $x=\dfrac{p}{q}$,$\therefore E=\left\{0,\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2},4\right\}$.

[点评] 列举法表示集合就是将集合中的元素不重复、不计次序、不遗漏地列出,元素之间用逗号隔开.解决此类问题的关键是找出集合中所有的具体元素.

◈[考题2] 用特征性质描述法表示下列集合:

(1)被5除余1的正整数集合;

(2)大于4的全体奇数构成的集合;

(3)坐标平面内,两坐标轴上点的集合;

(4)三角形的全体构成的集合.

[解析] (1)$\{x\mid x=5k+1,k\in\mathbf{N}\}$.

(2)$\{x\mid x=2k+1,k\geqslant 2,k\in\mathbf{N}\}$.

(3)$\{(x,y)\mid xy=0\}$.

(4)$\{x\mid x$ 是三角形$\}$.

[点评] (1)用特征描述法表示集合,首先应弄清楚集合的属性,是数集、点集还是其他的类型.一般地,数集用一个字母代表其元素,而点集则用一对有序数对来表示.

(4)图示法(维恩图).为了便于直观地认识集合,我们常常用平面上一条封闭曲线所围成的图形(如圆、矩形等)来表示一个集合,这就是维恩图.例如,集合$A=\{1,2,3,4\}$,可用图1-1-2-1所示的各图形表示.

图1-1-2-1

[注意]　表示集合的图形的形状与集合的性质没有任何关系,它仅仅是体现把集合中的元素都包括在内,而不是该集合的元素不包括在内.维恩图是集合的一种直观表示,可帮助我们理解、分析问题,但它不能作为严密的数学工具使用.图示法直观,一目了然,是解题时迅速作答的有效方法.

上述的集合表示法各有特点,根据不同的情况,可选择适当的方法来表示集合.总体来说,列举法与描述法能够准确、严密地表示出集合,列举法是表现集合外延的一种表示方法,而描述法则是体现集合内涵的一种表示方法.

2 方法·技巧平台

2.如何使用列举法表示集合

用列举法表示集合时,必须注意如下几点:(1)元素与元素之间必须用“,”隔开;(2)集合的元素必须是明确的;(3)不必考虑元素出现的先后顺序;(4)集合的元素不能重复;(5)集合的元素可以表示任何事物;(6)一般说来,列举法适用于有限集,但对于含有较多元素的无限集,如果构成该集合的元素具有明显的规律,也可用列举法表示,但必须把元素间的规律显示清楚后,才能用省略号表示,如$\mathbf{N}^*=\{1,2,3,\cdots\}$.

用列举法表示集合其优点是集合中的元素清晰可见,一目了然,但对于无限集合且元素的规律又不太明显时,就显得力不从心.

3.如何使用描述法表示集合

描述法分为文字描述和符号描述.使用文字描述的关键是用文字把元素所具有的属性描述出来,如{自然数};用符号描述表示集合时应注意:

(1)弄清元素所具有的形式(即代表元素是什么),是数、还是有序实数对(点)、还是集合、还是其他形式?

(2)元素具有怎样的属性,当题目中用了其他字母来描述元素所具有的属性时,要去伪存真,而不能被表面的字母形式所迷惑.

(2)若描述部分出现元素记号以外的字母时,要对新字母说明其含义或指出取值范围,如(1)(2)小题.

◈[考题3]　用图示法表示集合$\{x\mid -2<x<5,x\in\mathbf{N}\}$.

[解析]　如图1-1-2-2.

图1-1-2-2

◈[考题4]　用适当的方法表示下列集合.

(1)非负奇数组成的集合;

(2)小于18的既是奇数又是质数的数组成的集合;

(3)方程$(x^2-1)(x^2+2x+1)=0$的解组成的集合;

(4)方程组$\begin{cases}x^2+x-1=0,\\x+y=1\end{cases}$的解集.

[解析]　表示集合应根据问题的不同情况,本着简洁直观的原则,严格按照列举法或描述法的模式来表达.

(1)描述法:$\{x\mid x=2n+1,x\in\mathbf{N}\}$或列举法:$\{1,3,5,7,\cdots\}$.

(2)列举法:$\{3,5,7,11,13,17\}$.

(3)列举法:$\{-1,1\}$.

(4)描述法:$\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases}x^2+x-1=0\\x+y=1\end{cases}\right\}$或列举法:$\left\{\left(\dfrac{-1-\sqrt5}{2},\dfrac{3+\sqrt5}{2}\right),\left(\dfrac{-1+\sqrt5}{2},\dfrac{3-\sqrt5}{2}\right)\right\}$.

[点评]　(3)小题不能写成$\{-1,1,1\}$的形式,(4)是方程组的解集,因此它们的代表元素是(x,y),(4)小题写成$\left\{\dfrac{-1-\sqrt5}{2},\dfrac{3+\sqrt5}{2},\dfrac{-1+\sqrt5}{2},\dfrac{3-\sqrt5}{2}\right\}$是错误的.

◈[考题5]　用列举法表示下列集合.

(1)$A=\{x\mid x=|x|,x\in\mathbf{Z}$且$x<5\}$;

(2)$B=\left\{x\ \middle|\ x=\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b},a,b\text{为非零实数}\right\}$;

(3)$C=\left\{x\ \middle|\ \dfrac{6}{3-x}\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{N}^*\right\}$.

[解析]　(1)$\because x=|x|$,$\therefore x\geqslant0$,又$x\in\mathbf{Z}$且$x<5$,

$\therefore\{x\mid x=|x|,x\in\mathbf{Z}$且$x<5\}$,用列举法表示:$\{0,1,2,3,4\}$.

(2)当$a>0,b>0$时,$x=2$;当$a<0,b<0$时,$x=-2$;当a、b异号时,$x=0$,$\therefore B=\{-2,0,2\}$.

(3)由题意知$3-x=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$,所以$x=2,4,1,5,0,6,-3,9$,又$\because x\in\mathbf{N}^*$,

$\therefore C=\{1,2,4,5,6,9\}$.

[点评]　在列举法中根据条件找出所有元素是解题的关键.

◈[考题6]　用描述法表示如图1-1-2-3中阴影部分(含边界)的点的坐标的集合.

[解析]　本题是用图象语言给出的问题,要求把图象语言转化为符号语言.

用描述法表示为$\left\{(x,y)\ \middle|\ -1\leqslant x\leqslant\dfrac32,-\dfrac12\leqslant y\leqslant1,且\ xy\geqslant0\right\}$.

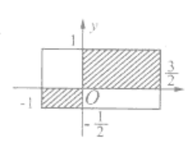


图1-1-2-3

[点评]　(1)首先要注意此问题的公共元素,(x,y)是点的坐标形式,然后仔细地观察、分析纵、横坐标满足的条件.