经济数学

（线性代数）

赵 军 主编

北京商学院院编教材

中国财政经济出版社

北京商学院院编教材

经济数学
（线性代数）

赵军 主编
李晋明 副主编

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济数学：线性代数/赵军主编．—北京：中国财政经济出版社，1996．12

北京商学院院编教材

ISBN 7-5005-3254-7

Ⅰ．经… Ⅱ．赵… Ⅲ．①经济数学-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材 Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 18167 号

中国财政经济出版社 出版

社址：北京海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100036

北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销

850×1168 毫米　32 开　9 印张　214 000 字

1997 年 2 月第 1 版　2001 年 6 月北京第 3 次印刷

印数：9021—12020 定价：11.00 元

ISBN 7-5005-3254-7/F・3026

编 写 说 明

为加强我院教材建设，提高教材质量，促进学科与专业发展，满足学院教学及社会需要，我院教材委员会自1993年起，有步骤有计划地陆续组织编写出版了北京商学院院编教材。我院院编教材实行主编负责制和专家署名审定制。本教材既可以作为高等院校财经类各专业本、专科的教学用书，也可作为电大、夜大和各类职工大学的理工科学生学习及辅导教师参考用书。

《经济数学》（线性代数）教材由我院赵军副教授主编，由北京理工大学葛渭高教授审定。

在教材的编写过程中得到了有关领导和许多专家、学者的大力支持，在此一并致谢。教材内容中如有缺点疏漏之处，敬请各界专家、读者予以指正，以便进一步修改完善。

北京商学院教材委员会

1996年6月

前　言

本书是根据国家教委针对高等院校财经类专业核心课程颁布的《经济数学基础》教学大纲，结合北京商学院数学教研室部分教师长期从事财经类各专业《线性代数》课程教学的经验与体会，并参考近年来国内外有关教材的内容集体编写而成的。

本书可供财经类各类、各层次院校的学生使用，在使用本教材过程中，应根据各专业的具体教学需要，制定相应的学时，选用适当的内容，但一般应不低于50学时. 书中*号部分，专科学生可以作为选学内容；**号部分，文科（本科）学生可以作为选学内容；而理工科学生则应学习本教材的全部内容。

参加本书编写工作的有贾汉复（第一章）、赵军（第二章、第四章的§4.3和§4.4）、李晋明（第三章、第四章的§4.1和§4.2）、柏金群（第五章）等同志，本书由赵军博士负责统稿，李晋明负责配置各章习题。

本书由北京理工大学应用数学系葛渭高教授审定。

在本书编写过程中，始终得到了北京商学院数学教研室全体教师的大力支持，他们为本书提出了许多宝贵的意见，在此一并表示衷心的感谢。

限于编者的水平，也由于编写时间比较仓促，教材中一定存在不妥之处，希望读者批评指正，以便今后修改，使其趋于完善。

编　者

1996年6月

目　　录

第一章　行　列　式

本章从二、三阶行列式出发，引出 n 阶行列式的概念，进而讨论 n 阶行列式的性质与计算方法，最后给出能利用行列式求解的 n 元 n 个线性方程的方程组的克莱姆法则.

§1.1　行列式的概念

本节首先讨论 n 级排列的逆序数. 通过对二、三阶行列式的观察，给出 n 阶行列式的定义.

一、排列与逆序数

由自然数 1、2、…、n 组成的不重复的有序数组，称为一个 n 级排列.

例如，由 1 和 2 组成的二级排列有：12，21；由 1、2、3 组成的三级排列有：123，231，132，213，321，312.

又如，1234 和 3214 都是四级排列，而 41235 是一个五级排列.

由此可见，有两个不同的二级排列，有六个不同的三级排列.

一般地，由数码 1、2、…、n 所构成的不同的 n 级排列的总数为：$n!=1\times2\times\cdots\times(n-1)\times n$ 个. 所有这些排列中只有一种排列"$1\ 2\cdots n$"是按自然顺序排列的，称之为自然顺序排列. 如：

二级排列中的“1 2”和三级排列中的“1 2 3”都是自然顺序排列.

定义 1.1.1 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，若有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面（$i_s<i_t$），则称 i_t 和 i_s 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总和数，称为该排列的逆序数. 记为

$$N(i_1i_2\cdots i_n)$$

逆序数是奇数的排列称为奇排列，是偶数的排列称为偶排列.

例如，在五级排列 25413 中，1 前面有 2、4、5，构成三个逆序；3 前面有 4、5，构成两个逆序；4 前面有 5，构成一个逆序，所以排到 25413 的逆序总和数为 $N(25413)=3+2+1=6$，是偶排列. 而 $N(23415)=3$，则排列 23415 是奇排列.

由于自然序排列的逆序数是零，即

$$N(1\ 2\cdots n)=0,$$

故所有自然序排列都是偶排列.

若 n 级排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 是由 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 仅变换其中数码 i_s 与 i_t 的位置而得到的，则这样的变换称为一次对换，记成

$$i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n \xrightarrow{(i_s,\ i_t)} i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$$

例如，

$$25413 \xrightarrow{(5,\ 3)} 23415$$

由 $N(25413)=6$ 和 $N(23415)=3$ 知，偶排列 25413 经过一次 3 与 5 位置的对换变成了奇排列 23415.

一般地有下列定理

定理 1.1.1 任意一个排列经过一次对换后，奇偶性改变.

证明：(1) 首先讨论对换相邻两个数码的特殊情形. 设排列为 $AijB$，其中 A、B 表示除 i、j 两个数码外其余的数码，经过对

换 i 与 j 两个数码后，排列变成 $AjiB$，即

$$AijB \xrightarrow{(i,\ j)} AjiB$$

比较对换前后两个排列的逆序，显然 A、B 中数码的次序没有变动，并且 i、j 与 A、B 中数码的次序也没有改变，而仅仅是改变了 i 与 j 的次序. 因此，当 $i<j$ 时，$N(AjiB)=N(AijB)+1$；当 $i>j$ 时，$N(AjiB)=N(AijB)-1$，所以它们的奇偶性相反.

（2）一般情况下，设排列 $Aik_1k_2\cdots k_sjB$，经过 i 与 j 的对换变成 $Ajk_1k_2\cdots k_siB$，即

$$Aik_1k_2\cdots k_sjB \xrightarrow{(i,\ j)} Ajk_1k_2\cdots k_siB$$

新排列可以由原排列中将数码 i 依次与 k_1、k_2、…、k_s、j 作 $s+1$ 次相邻对换变成 $Ak_1k_2\cdots k_sjiB$，再将 j 依次与 k_s、k_{s-1}、…、k_2、k_1 作 s 次相邻对换而得到. 即

$$Aik_1k_2\cdots k_sjB$$

$$\left.\begin{array}{l}\xrightarrow{(i,k_1)} Ak_1ik_2\cdots k_sjB\\ \xrightarrow{(i,k_2)} Ak_1k_2i\cdots k_sjB\\ \quad\cdots\qquad\quad\cdots\\ \xrightarrow{(i,k_s)} Ak_1k_2\cdots k_sijB\\ \xrightarrow{(i,j)} Ak_1k_2\cdots k_sjiB\end{array}\right\}S+1\text{ 次相邻对换}$$

$$\left.\begin{array}{l}\xrightarrow{(j,k_s)} Ak_1k_2\cdots jk_siB\\ \quad\cdots\qquad\quad\cdots\\ \xrightarrow{(j,k_1)} Ajk_1k_2\cdots k_siB\end{array}\right\}S\text{ 次相邻对换}$$

故新排列 $Ajk_1k_2\cdots k_siB$ 是由原排列 $Aik_1k_2\cdots k_sjB$ 经过 $2S+1$ 次相邻对换而得到的. 由（1）的结论知，它改变了奇数次的奇偶

性，即原来为奇排列，现为偶排列；原来为偶排列，现为奇排列，所以新排列与原排列的奇偶性相反.

定理 1.1.2 在所有 n ($n>1$) 级排列中，奇偶排列各占一半.

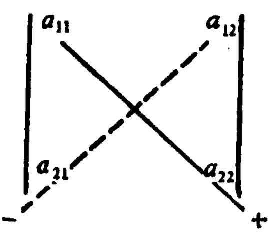
证明：只需证明在所有的 n 级排列中，奇排列的个数与偶排列的个数相同.

设共有 p 个奇排列，q 个偶排列，则有 $p+q=n!$. 对每个奇排列中的 1 与 2 对换，由定理 1.1.1，就可得到 p 个偶排列，故 $p<q$；同理可得 $q<p$，于是 $p=q$，即奇偶排列数相同，从而 $2p=p+q=n!$，$p=q=\frac{n!}{2}$.

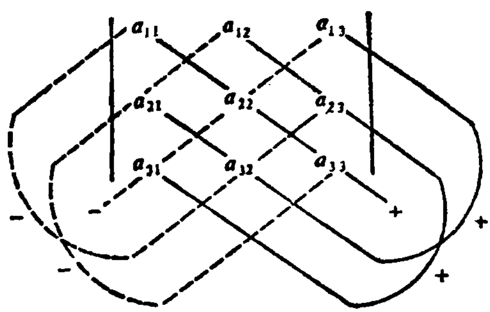
二、二阶、三阶行列式

二阶行列式的定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$



(a)



(b)

图 1.1

三阶行列式的定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

二阶、三阶行列式所表示的代数和中各乘积项及符号可以用图 1.1 所示方法来记忆：

观察二阶、三阶行列式所表示代数和的共性及规律，容易看出每个乘积项所含元素是按其第一足标自然序排列的.

二阶、三阶行列式的比较

	二阶行列式	三阶行列式
元素个数	$2^2=4$	$3^2=9$
乘积项个数	$2!\ =4$	$3!\ =6$
乘积项中元素的个数	2	3
乘积项中元素的来源	不同行、不同列	不同行、不同列
乘积项中元素第一足标的排列	1，2	1，2，3
乘积项中元素第二足标的排列	j_1，j_2	j_1，j_2，j_3
乘　积　项	$a_{1j_1}a_{2j_2}$	$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$
乘积项的符号（奇排列 / 偶排列）	$(-1)^{N(j_1j_2)}=\begin{cases}- \\ +\end{cases}$	$(-1)^{N(j_1j_2j_3)}=\begin{cases}- \\ +\end{cases}$
一般项	$(-1)^{N(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$	$(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$
代数和	$\sum\limits_{(j_1j_2)}(-1)^{N(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$	$\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2)} (-1)^{N(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2}$$

$$= (-1)^{N(12)}a_{11}a_{22} + (-1)^{N(21)}a_{12}a_{21}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3)} (-1)^{N(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

$$= (-1)^{N(123)}a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{N(312)}a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^{N(231)}a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+ (-1)^{N(132)}a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{N(213)}a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{N(321)}a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= (-1)^0a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^2a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^2a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^1a_{11}a_{23}$$

$$a_{32} + (-1)^1a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^3a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

例如，$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times2-3\times1=1$，

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\times1\times1=2.$$

三、n 阶行列式的定义

定义 1.1.2 用 n^2 个元素 a_{ij}（i，$j=1$，2，…，n）组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

称为 n 阶行列式，其中 a_{ij}称为它的元素，ij 称为元素 a_{ij}的足标，i 和 j 分别称为元素 a_{ij}的行标和列标．式（1.1）中的横排称为行，

纵排称为列．它表示所有可能取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和，各乘积项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 前面的正、负符号是：当 N（$j_1j_2\cdots j_n$）为偶数时取正号；为奇数时取负号．因此，n 阶行列式所表示的代数和的一般项（乘积项连同它的符号）可以写成

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.2}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有 n 级排列时，得到 n 阶行列式所表示的代数和的所有项，共有 $n!$ 个乘积项．

n 阶行列式有时简记为：$D=|(a_{ij})_n|=|(a_{ij})|$，即

$$D=|(a_{ij})|=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.3}$$

其中（$j_1j_2\cdots j_n$）表示不同 n 级排列的全体．

由定理 1.1.2 知，在 n 阶行列式表示的代数和中，冠以正号的乘积项与冠以负号的乘积项（不包括元素本身所带的正、负号）各占一半．

例如，四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

所表示的代数和中，有 $4!=24$ 项．其中乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 的行标排列为 1234，元素取自不同行；列标排列为 1234，元素取自不同列，且逆序数 $N(1234)=0$，即乘积项 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 前面应冠以正号，故 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 为 D 的一项．同样，$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 也是不同行，不同列元素的乘积，因逆序数 $N(4312)=5$，故 $-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 是 D 的一项．而乘积 $a_{12}a_{21}a_{31}a_{43}$ 中的 a_{21} 和 a_{31} 取自同一列，所以它不是 D 的一项．

例 1.1.1 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值.

解：设行列式的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

由于 D 中有许多元素为零，故只需考察有哪些项可能是非零的. 乘积项中第一个元素 a_{1j_1} 取自第一行，但第一行中只有 a_{11} 可能不为零，因而 $j_1=1$，即 D 中只有含 a_{11} 的那些项可能不为零，其它项均为零；乘积项中第二个元素 a_{2j_2} 取自第二行，而第二行中 a_{21} 和 a_{22} 可能均不为零，由于第一个元素 a_{11} 已取自第一列，故第二个元素不能再取自第一列，即不能取 a_{21}，所以第二个元素只能取 a_{22}，从而 $j_2=2$，即 D 中只含 $a_{11}a_{22}$ 的那些可能不为零，其它项均为零. 这样推下去，可得 $j_3=3$，$j_4=4$，…，$j_n=n$. 因此，D 中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项可能不为零，而其它项均为零. 又由于此项的列标排列的逆序数 $N(j_1j_2\cdots j_n)=N(12\cdots n)=0$，因此这一项应取正号，于是

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

称上面形式的行列式为下三角形行列式. 同理可得上三角形

行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地，有对角形行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

行列式的左上角到右下角的对角线称为主对角线.

由以上可知，三角形行列式及对角形行列式的值均等于主对角线上元素的乘积. 一个行列式若一行（或一列）中的元素皆为零，则由行列式的定义可知此行列式的值必为零.

在 n 阶行列式的定义中，决定各乘积项的符号规律还可以由下面的结论给出.

定理 1.1.3 n 阶行列式 $D=|(a_{ij})|$ 的一般项可以记成

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.4}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 级排列.

证明：由于 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列，因此式（1.4）中的 n 个元素是取自 D 的不同行不同列的元素.

若变换（1.4）式中两个元素 $a_{i_sj_s}$ 与 $a_{i_tj_t}$ 的位置，则行标排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n \xrightarrow{(i_s,\ i_t)} i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，列标排列 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n \xrightarrow{(j_s,\ j_t)} j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$. 由定理 1.1.1 知，行标排列与列标排列的逆序数奇偶性均已改变，但对换后，两下标排列的逆序数之和的奇偶性则

不变，即

$$(-1)^{N(i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)+N(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}=(-1)^{N(i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)+N(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}$$

故变换后乘积项的符号不变. 这样，我们总可以经过有限次交换（1.4）式中元素的位置，使其行标 $i_1i_2\cdots i_n$ 换成自然序排列，设此时列标排列为 $k_1k_2\cdots k_n$，则（1.4）式变为：

$$\begin{aligned}&(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}\\ =\ &(-1)^{N(12\cdots n)+N(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}\\ =\ &(-1)^{N(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}\end{aligned}$$

上述结果即为定义中 D 的一般项，也就是说 D 的一般项也可以记成（1.4）式的形式.

例 1.1.2 若 $(-1)^{N(i432k)+N(52j14)}a_{i5}a_{42}a_{3j}a_{21}a_{k4}$ 是五阶行列式 $|(a_{ij})|$ 的一般项，则 i、j、k 应取何值？此时该项的符号是什么？

解：由行列式的定义，每一项中的元素取自不同行不同列，故 $j=3$、$i=1$ 时 $k=5$，或 $i=5$ 时 $k=1$.

当 $i=1, j=3, k=5$ 时，$N(14325)+N(52314)=9$，所以 $-a_{15}a_{41}a_{33}a_{21}a_{54}$ 为 $|(a_{ij})|$ 的一般项.

当 $i=5, j=3, k=1$ 时，$N(54321)+N(52314)=16$，所以 $a_{55}a_{42}a_{33}a_{21}a_{14}$ 也是 $|(a_{ij})|$ 的一般项.

利用行列式的定义来计算行列式的值，有时是很繁琐的. 在下两节里，我们通过讨论行列式的性质，得到计算行列式的简便方法.

§1.2 行列式的性质

定义 1.2.1 将行列式 D 的行与列交换，得到的行列式，称