面向21世纪高等学校教材

离散数学

主编　李　珊
主审　江兆林

中国矿业大学出版社

China University of Mining and Technology Press

面向21世纪高等学校教材

离散数学

主　编　李　珊

副主编　李中方　邢文生　张曙光

编　委　牛惠芳　石漂漂　杜冬高

　　　　吴　琼　徐华伟

主　审　江兆林

中国矿业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/李珊主编. -徐州:中国矿业大学出版社,
2004.6
面向21世纪高等学校教材
ISBN 7-81070-893-7

Ⅰ.离… Ⅱ.李… Ⅲ.离散数学-高等学校-教材 Ⅳ.O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第052400号

书　　名　离散数学
主　　编　李　珊
责任编辑　姜　华
网　　址　http://www.cumtp.com　E-mail:cumtpvip@cumtp.com
出版发行　中国矿业大学出版社
　　　　　(江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编221008)
印　　刷　临沂市第二印刷厂
经　　销　新华书店
开　　本　850×1168 1/32　印张14.5　字数370千字
版次印次　2004年6月第1版　2004年6月第1次印刷
印　　数　1-4100册
定　　价　23.00元

前　言

离散数学是高等院校计算机专业及其他相关专业的一门重要基础课。这门课程在现代科学中的重要性日益增强，它不仅是计算机专业的必修课，也是其他相关专业工程技术人员必备的基础知识。

为全面贯彻教育部关于全面实施《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》，有必要对高等教育教学内容和课程体系进行系统改革，尽快编写出面向21世纪的离散数学教材，这也是每位热心于离散数学教学内容改革的老师最为关心的事。为此，我们特意组织编写了这部面向21世纪的离散数学教材。该教材尽可能从内容上和方法上反映近年来教师们在离散数学这门课程的教学和科研中取得的最新成果。

与同类教材相比，本教材体现了如下特点：(1)注重面向21世纪课程教材体系；(2)淡化某些繁杂形式，注重核心内容，但简而不略；(3)采用现代数学符号系统，渗透现代数学的思想与方法；(4)注重与相关学科，特别是与计算机科学和工程科学的联系；(5)每节后配有巩固性习题，便于教师有针对性地布置作业；每章配有复习参考题，供习题课教师选用及学生练习用；并且在书末给出习题、复习参考题的答案和部分详解。

本教材不但可作为高等理工科院校计算机类、工程类的本、专科学生的教材，也可作为师范类院校数学专业及其他相关专业学

生的教材或教学参考书。

临沂师范学院教授江兆林博士主审本书,并提出了许多宝贵意见,在此,我们表示衷心的感谢!

本书由主编整体设计,提出选题,作者分工执笔。编写任务分工如下:李珊(第5、6章及答案),李中方(3.1节至3.6节),邢文生(2.1节至2.6节),张曙光(习题3.6、复习参考题三及第3章的答案),牛惠芳(4.1节至4.8节),石溧溧(复习参考题一及第1章的答案),杜冬高(复习参考题四及第4章的答案),吴琼(复习参考题二、第2章的答案、第7章及答案),徐华伟(1.1节至1.8节)。初稿完成后,由编委会对其进行了认真的修正、统稿,在此期间听取了各方面的意见和建议,最后由主编定稿。因此,本书是大家分工合作,共同努力的成果。

由于我们水平有限,加之时间仓促,缺点、错误在所难免,恳请读者批评指正。

编　者

2004年5月

目　录

第 1 章　数理逻辑 …… (1)
1.1　命题 …… (1)
习题　1.1 …… (8)
1.2　重言式 …… (9)
习题　1.2 …… (18)
1.3　范式 …… (19)
习题　1.3 …… (29)
1.4　联结词的扩充与归约 …… (29)
习题　1.4 …… (33)
1.5　推理规则和证明方法 …… (33)
习题　1.5 …… (38)
1.6　谓词和量词 …… (40)
习题　1.6 …… (46)
1.7　永真公式 …… (47)
习题　1.7 …… (57)
1.8　谓词演算的推理规则 …… (59)
习题　1.8 …… (63)
复习参考题一 …… (65)
第 2 章　集合论与无限集合 …… (75)
2.1　基本概念 …… (76)
习题　2.1 …… (79)
2.2　集合的运算 …… (81)
习题　2.2 …… (90)

2.3 归纳法和自然数…………………………………………(94)
习题 2.3 ……………………………………………………(97)
2.4 笛卡尔积………………………………………………(99)
习题 2.4 ……………………………………………………(102)
2.5 可数与不可数集合 ……………………………………(103)
习题 2.5 ……………………………………………………(110)
2.6 集合基数的比较 ………………………………………(111)
习题 2.6 ……………………………………………………(116)
复习参考题二…………………………………………………(117)
第3章 图论初步……………………………………………(123)
3.1 基本概念 ………………………………………………(123)
习题 3.1 ……………………………………………………(129)
3.2 路径与回路 ……………………………………………(130)
习题 3.2 ……………………………………………………(135)
3.3 图的矩阵表示 …………………………………………(137)
习题 3.3 ……………………………………………………(145)
3.4 二部图 …………………………………………………(146)
习题 3.4 ……………………………………………………(149)
3.5 平面图 …………………………………………………(150)
习题 3.5 ……………………………………………………(154)
3.6 树与有向树 ……………………………………………(156)
习题 3.6 ……………………………………………………(167)
复习参考题三…………………………………………………(169)
第4章 二元关系与特殊函数………………………………(176)
4.1 二元关系的基本概念 …………………………………(176)
习题 4.1 ……………………………………………………(181)
4.2 关系的合成 ……………………………………………(182)
习题 4.2 ……………………………………………………(187)

4.3 闭包运算 …………………………………………………… (188)
习题 4.3 …………………………………………………… (191)
4.4 次序关系 …………………………………………………… (192)
习题 4.4 …………………………………………………… (196)
4.5 等价关系和划分 …………………………………………… (197)
习题 4.5 …………………………………………………… (202)
4.6 函数的基本概念 …………………………………………… (203)
习题 4.6 …………………………………………………… (206)
4.7 特殊函数类 ……………………………………………… (207)
习题 4.7 …………………………………………………… (211)
4.8 逆函数 …………………………………………………… (211)
习题 4.8 …………………………………………………… (214)
复习参考题四…………………………………………………… (215)
第5章 代数系统…………………………………………… (220)
5.1 代数结构概述 ……………………………………………… (220)
习题 5.1 …………………………………………………… (227)
5.2 子代数 …………………………………………………… (229)
习题 5.2 …………………………………………………… (230)
5.3 同态与同余关系、商代数………………………………… (230)
习题 5.3 …………………………………………………… (235)
5.4 半群 ……………………………………………………… (236)
习题 5.4 …………………………………………………… (239)
5.5 群 ………………………………………………………… (240)
习题 5.5 …………………………………………………… (267)
5.6 环与域 …………………………………………………… (268)
习题 5.6 …………………………………………………… (274)
复习参考题五…………………………………………………… (275)

第 6 章　格与布尔代数 ………………………… (279)
6.1　格 ………………………… (279)
习题　6.1 ………………………… (286)
6.2　特殊的格 ………………………… (288)
习题　6.2 ………………………… (294)
6.3　布尔代数 ………………………… (295)
习题　6.3 ………………………… (300)
复习参考题六 ………………………… (301)
第 7 章　组合数学 ………………………… (303)
7.1　排列和组合 ………………………… (303)
7.2　重集的排列和组合 ………………………… (304)
习题　7.2 ………………………… (307)
7.3　抽屉原理 ………………………… (307)
习题　7.3 ………………………… (308)
7.4　容斥原理 ………………………… (309)
习题　7.4 ………………………… (312)
7.5　生成函数 ………………………… (312)
习题　7.5 ………………………… (316)
7.6　递归关系 ………………………… (317)
习题　7.6 ………………………… (322)
复习参考题七 ………………………… (323)
习题及复习参考题答案 ………………………… (324)
参考文献 ………………………… (456)

第 1 章　数 理 逻 辑

数理逻辑是用数学方法来研究推理的形式结构和推理规律的数学学科.它与数学的其他分支及计算机科学、人工智能、语言学等学科都有着密切的联系,并日益显示其重要作用和广泛的应用前景.

1.1　命　　题

数理逻辑研究的中心问题是推理,而推理的前提和结论都是表达判断的陈述句.因而,表达判断的陈述句构成了推理的基本单位.于是,称能判断真假的陈述句为命题.这种陈述句的判断只有两种可能,一种是正确的判断,一种是错误的判断.称判断为正确的命题的真值(或值)为真,称判断为错误的命题的真值为假,因而又可以称命题是具有唯一真值的陈述句.

例 1.1　判断下列句子中哪些是命题.

(1) 2 是素数.

(2) $2+3=5$.

(3) 雪是黑色的.

(4) 明年春节是晴天.

(5) 5 能被 2 整除.

(6) 这朵小花多漂亮呀!

(7) 后天上午有课吗?

(8) 请随手关门!

(9) $x+y<3$.

(10) 地球外的星球上也有人.

解 在上述 10 个句子中,(6) 是感叹句,(7) 是疑问句,(8) 是祈使句,这三句话都不是陈述句,当然都不是命题.其余的 7 个句子都是陈述句,但(9) 不是命题,因为它没有确定的真值.当 $x=1,y=2$ 时,$1+2<3$ 不正确;当 $x=1,y=1$ 时,$1+1<3$ 正确.其余的 6 个陈述句都是命题.其中,(1),(2) 是真命题;(3),(5) 是假命题;(4) 的真值虽然现在还不知道,但到明年春节就知道了,因而是命题,它的真值是唯一的;(10) 的真值也是唯一的,只是我们还不知道而已,随着科学技术的发展,其真值会知道的,因而它也是命题.

从上例可以看出,判断一个句子是否为命题,首先要看它是否为陈述句,然后再看它的真值是否唯一.当然真值是否唯一与我们是否知道它的真值是两码事.

例 1.1 中给出的 6 个命题都是简单的陈述句,都不能分解成更简单的句子了,称这样的命题为简单命题,用小写英文字母

$$p,q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i,\cdots$$

表示,并将表示命题的符号放在该命题的前面,称为命题符号化.如

p: 2 是素数.

q: 5 能被 2 整除.

此时,p 是真命题,q 是假命题.

对于简单命题来讲,它的真值是确定的,因而又称为命题常项或命题常元.p,q 都是命题常项.

例 1.1 中(9) 不是命题,但当给定 x 与 y 确定的值之后,它的真值也就定下来了.这种真值变化的简单陈述句称为命题变项或命题变元,也用 $p,q,\cdots$ 表示.一个符号 p,它表示的是命题常项还是命题变项,可由上下文来确定.但注意,命题变项不是命题.

在数理逻辑中,将命题真值也符号化.一般用 1(或 T)表示“真”;用 0(或 F) 表示“假”.有时也用 1 表示真命题;用 0 表示假命题.

以上讨论的是简单命题.在数理逻辑中,主要是研究由简单命题用联结词联结而成的命题,称为复合命题.如

例 1.2 将下列命题符号化.

(1) 3 不是偶数.

(2) 2 是素数和偶数.

(3) 小芳学过英语或日语.

(4) 如果 $\angle A$ 和 $\angle B$ 是对顶角,那么 $\angle A = \angle B$.

解 这 4 个句子都是具有唯一真值的陈述句,都是命题,且都是由简单命题经过联结词的联结而形成的复合命题.

(1) 中命题也可说成"并非 3 是偶数",使用了联结词"并非".

(2) 中命题也可说成"2 是素数并且 2 是偶数",使用了联结词"并且".

(3) 中使用了联结词"或".

(4) 中使用了联结词"如果 …,那么 …".

除了上述 4 个联结词外,常用的还有"当且仅当".以上 5 种联结词也是自然语言中常用的联结词,但自然语言中有的联结词具有不精确性.如"或",有时表示相容性,有时表示排斥性.可是数理逻辑中不允许这样,因而,首先对联结词必须给出精确定义,并为了书写和推理方便,还要将联结词符号化.下面介绍 5 种常用联结词的符号表示及相应复合命题的定义.

定义 1.1 设 p 为任一命题,复合命题"非 p"称为 p 的否定式,记为 $\neg p$.

$\neg$ 为否定联结词.$\neg p$ 为真当且仅当 p 为假.

在例 1.2(1) 中,设 p 表示"3 是偶数",则 $\neg p$ 表示"3 不是偶数".显然,p 的真值为 0,$\neg p$ 的真值为 1.

定义 1.2 设 p, q 为两命题,复合命题"p 并且 q"称为 p 与 q 的合取式,记作 $p \wedge q$.

$\wedge$ 为合取联结词.$p \wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真.

在例 1.2(2) 中,用 p 表示"2 是素数",q 表示"2 是偶数",则 $p \wedge q$ 表示"2 是素数和偶数".由于 p,q 的真值均为 1,所以 $p \wedge q$ 的真值也是 1.

$p \wedge q$ 表达的逻辑关系是 p 与 q 两个命题同时成立,因而,自然语言中常用的联结词"既 … 又 …","不仅 … 而且 …","虽然 … 但是 …" 等,都可以符号化为 $\wedge$. 如

例 1.3 将下列命题符号化.

(1) 小明既聪明又用功.

(2) 小明不但聪明,而且用功.

(3) 小明虽然聪明,但不用功.

(4) 小明不是不聪明,而是不用功.

解 令 p:小明聪明;q:小明用功.则

(1) $p \wedge q$;

(2) $p \wedge q$;

(3) $p \wedge \neg q$;

(4) $\neg(\neg p) \wedge \neg q$.

定义 1.3 设 p,q 为两命题,复合命题"p 或 q"称为 p 与 q 的析取式,记为 $p \vee q$.

$\vee$ 为析取联结词.$p \vee q$ 为真当且仅当 p 与 q 中至少一个为真.

显然,$p \vee q$ 表示的是一种相容性或.也就是说,当仅 p 为真,仅 q 为真,p 与 q 同时为真时,$p \vee q$ 都为真.

可是在自然语言中的"或"具有二义性,有时表示相容性或,有时表示排斥性或.如"派小王或小李中的一人去开会"就不能符号化为 $p \vee q$ 的形式,因这里是排斥或,但可以借助于联结词 $\neg$,$\wedge$,$\vee$ 共同来表达这种排斥或,即符号化为

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

的形式或

$$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

的形式.

定义 1.4 设 p, q 为两命题,复合命题"如果 p,那么 q"称作 p 与 q 的蕴涵式,记为 $p \to q$. 并称 p 为蕴涵式的前件,q 为蕴涵式的后件,$\to$ 称为蕴涵联结词.

$p \to q$ 为假当且仅当 p 为真且 q 为假.

$p \to q$ 表示的基本逻辑关系为:q 是 p 的必要条件,p 是 q 的充分条件. 因此,复合命题"只要 p 就 q","p 仅当 q","只有 q 才可能 p"等,都可以符号化为 $p \to q$ 的形式.

注意:在自然语言中,"如果 p 就 q"中的 p 与 q 往往有某种内在的联系,但在数理逻辑中,"$p \to q$"中的 p 与 q 不一定有什么内在联系;在数学中,"如果 p,则 q"往往表示前件 p 为真,后件 q 为真的推理关系,但在数理逻辑中,当前件 p 为假时,$p \to q$ 为真. 如

例 1.4 将下列命题符号化.

(1) 只要不下雨,我就骑自行车上班.

(2) 只有不下雨,我才骑自行车上班.

(3) 若 $2+2=4$,则太阳从东方升起.

(4) 若 $2+2\neq4$,则太阳从东方升起.

(5) 若 $2+2=4$,则太阳从西方升起.

(6) 若 $2+2\neq4$,则太阳从西方升起.

解 令 p:天下雨;q:我骑自行车上班. 则

(1) $\neg p$ 是 q 的充分条件,故符号化为 $\neg p \to q$;

(2) $\neg p$ 是 q 的必要条件,故符号化为 $q \to \neg p$.

注意:在使用蕴涵联结词时,一定要认真分析蕴涵式的前件与后件,然后组成蕴涵式. 还要注意同一命题的不同等价说法. 如"除非下雨,否则我就骑自行车上班"与(1) 等价. "如果下雨,我就不骑自行车上班"与(2) 等价.

令 p: $2+2=4$; q: 太阳从东方升起; r: 太阳从西方升起. 则

(3) $p \to q$;

(4) $\neg p \to q$;

(5) $p \to r$;

(6) $\neg p \to r$.

上述蕴涵式中,前件与后件之间无内在联系.由于 p,q,r 的真值都知道,故上述 4 个蕴涵式的真值分别为 1,1,0,1.

定义 1.5 设 p,q 为两命题,复合命题"p 当且仅当 q"称为 p 与 q 的等价式,记为 $p \leftrightarrow q$.

$\leftrightarrow$ 称为等价联结词.$p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p,q 真值相同.

等价式 $p \leftrightarrow q$ 所表达的逻辑关系是 p 与 q 互为充分必要条件.只要 p 与 q 的真值同为真或同为假,$p \leftrightarrow q$ 的真值就为真,否则 $p \leftrightarrow q$ 的真值为假.如

例 1.5 分析下列各命题的真值.

(1) $2+2=4$ 当且仅当 3 是奇数.

(2) $2+2=4$ 当且仅当 3 不是奇数.

(3) $2+2 \neq 4$ 当且仅当 3 是奇数.

(4) $2+2 \neq 4$ 当且仅当 3 不是奇数.

(5) 两圆的面积相等当且仅当它们的半径相等.

(6) 两角相等当且仅当它们是对顶角.

解 令 p: $2+2=4$;q: 3 是奇数;则 p,q 均为真命题.

(1) $p \leftrightarrow q$ 真值为 1;

(2) $p \leftrightarrow \neg q$ 真值为 0;

(3) $\neg p \leftrightarrow q$ 真值为 0;

(4) $\neg p \leftrightarrow \neg q$ 真值为 1;

(5) 因两圆面积相等与半径相等同为真或同为假,故该命题为真;

(6) 因相等的两角不一定是对顶角,故该命题为假.

以上 5 种常用联结词也称真值联结词或逻辑联结词.可以用这些联结词将各种各样的复合命题符号化,基本步骤为:

(1) 分析出各简单命题，将它们符号化；

(2) 使用合适的联结词，把简单命题逐个联结起来，组成复合命题的符号化表示.

例 1.6 将下列命题符号化.

(1) 小王是游泳冠军或百米赛跑冠军.

(2) 小丽现在在宿舍或在图书馆里.

(3) 选小王或小丽中的一人当班长.

(4) 如果我上街，我就去书店看看，除非我很累.

(5) 丁一是计算机系的学生，她生于 1978 年或 1979 年，她是三好学生.

解 (1) 令 p:小王是游泳冠军，q:小王是百米赛跑冠军.则 $p \vee q$.

(2) 这里是排斥或，因小丽在宿舍与在图书馆不能同时发生，因而也可符号化为 $p \vee q$.其中，令 p:小丽在宿舍，q:小丽在图书馆.

(3) 这里也是排斥或，令 p:选小王当班长，q:选小丽当班长.因 p 与 q 可同时为真，所以应符号化为$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$；而不应符号化为 $p \vee q$.

注意:在使用析取联结词时，首先应分析表达的是相容或还是排斥或.若是相容或，以及 p,q 不能同时为真的排斥或，都可符号化为 $p \vee q$ 的形式.若是排斥或，并且 p 与 q 可同时为真，就应符号化为$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$的形式.

(4) $\neg r \rightarrow (p \rightarrow q)$.其中，$p$:我上街，$q$:我去书店看看，$r$:我很累.也可化为$(\neg r \wedge p) \rightarrow q$.

(5) $p \wedge (q \vee r) \wedge s$.其中，$p$:丁一是计算机系学生，$q$:她生于 1978 年，$r$:她生于 1979 年，$s$:她是三好学生.

5 种联结词也称为逻辑运算符.它们与普通数的运算符一样，可以规定运算的优先级的顺序为$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$.如果出现的联

结词相同,又无括号时,则按从左到右顺序运算;若遇有括号时,先进行括号中的运算.

习　题　1.1

从给定的语句中,选出应填入下列叙述中 □ 内的正确答案.

1. 15 是素数.

2. 8 能被 2 整除,3 是偶数.

3. 你下午有课吗?若无课,请到我这儿来!

4. $3x + 4 > 0$.

5. 2 或是素数或是合数.

6. 这个男孩真勇敢呀!

7. 如果 $2 + 2 = 8$,则 5 是奇数.

8. 只有 4 是偶数,3 才能被 2 整除.

9. 明年"五一"是晴天.

10. 圆的面积等于半径的平方与 π 的乘积.

以上 10 个语句中,是简单命题的为 $\boxed{A}$,是复合命题的为 $\boxed{B}$,是真命题的为 $\boxed{C}$,是假命题的为 $\boxed{D}$,真值待定的命题是 $\boxed{E}$.

备选答案:

A:①1,4,8;②4,9,10,6;③1,9,10.

B:①3,10;②2,5,7,8;③7,8.

C:①2,5,9,10;②7,8,10;③5,7,8,10.

D:①1,2,8;②1,2;③1,5.

E:①4,9;②9;③7,8.