



公共基础课“十一五”规划教材

应用数学基础教程

YINGYONG SHUXUE JICHU JIAOCHENG

杜吉佩 〇 主编

 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



机械工业出版社

主审 杨尚俊

机械工业出版社

本书是按教育部组织制定的《高职高专教育基础课教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》以及工科类专业特点和实际需要精心编写的。本书总的编写原则是注重实际应用,淡化数学理论的推导,强化数学应用能力的培养,突出数学模型的建立方法及数学工具的正确使用。内容的选取以“必需、够用”为度,尽量做到有所创新。从宏观框架到微观处理都作了许多大胆的创新。本书的主要内容有:空间向量与空间解析几何初步、极限与连续、微分学及应用、积分学及应用、多元函数微分学及应用、无穷级数及应用、微分方程及应用,共需要56~100学时。我们为本书配备了学习指导书。为提高课堂教学效果,为教师应用多媒体授课提供方便,本书还配有课堂教学课件。

本书的适用面比较宽,既可以作为高中起点的高职院校教材,也可作为中职起点的教材;如果与中职数学教材(如薛吉伟主编,机械工业出版社出版的中职《数学》)联用,还可作为五年制高等职业教育的教材;也可供成人高等职业教育参考。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础教程/杜吉佩主编. —北京:机械工业出版社, 2008. 10

公共基础课“十一五”规划教材

ISBN 978-7-111-24947-4

I. 应… II. 杜… III. 应用数学—高等学校—教材
IV. 029

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第127251号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

责任编辑:宋学敏 朱红波 孙志强 李 宁

责任校对:樊钟英 封面设计:王伟光

责任印制:洪汉军

北京铭成印刷有限公司印刷

2008年10月第1版第1次印刷

169mm×239mm·17.25印张·333千字

0001—3000册

标准书号:ISBN 978-7-111-24947-4

定价:25.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

销售服务热线电话:(010)68326294

购书热线电话:(010)88379639 88379641 88379643

编辑热线电话:(010)88379199

封面无防伪标均为盗版

前 言

本书是按教育部组织制定的《高职高专教育基础课教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》以及工科类专业特点和实际需要精心编写的。

本书总的编写原则是注重实际应用,淡化数学理论的推导,强化数学应用能力的培养,突出数学模型的建立方法及数学工具的正确使用。内容的选取以“必需、够用”为度,尽量做到有所创新。从宏观框架到微观处理都作了许多大胆的创新。本书具体内容的编排由浅入深、由易到难、由具体到抽象、按循序渐进的原则进行,并努力做到概念清楚,条理清晰,语言精练,易教易学,便于理解与掌握。

本书的编写体例适应学生的年龄特征和心理特点,符合高职这一学生层次的认知规律的发展;在语言表述上,力求通俗易懂,增强趣味性和可读性。教材的主要特色如下:

(1) **适用对象宽泛** 本书的适用面比较宽,既可以作为高中起点的高职院校教材,也可作为中职起点的教材;如果与中职数学教材(如薛吉伟主编,机械工业出版社出版的中职《数学》)联用,还可作为五年制高等职业教育教材;也可供成人高等职业教育参考使用。

(2) **数学知识新的整合** 本书特别注意与高中(中职)阶段数学教学内容的衔接,结合高职教育的教学特点及编者多年从事工科数学教学的经验,对教学内容进行了整合。

① 向量代数与空间解析几何放在第一章,并用与平面向量和平面解析几何对比的方法进行表述。这样处理有助于与中学的平面向量和平面解析几何的衔接。

② 将数列的极限作为函数极限的特例提出。

③ 将导数与微分和导数的应用整合为一章,叫做微分学及应用,给出研究函数的性态和数值计算两个方面的应用;将不定积分和定积分及它们的应用整合为一章,叫做积分学及应用,介绍积分学在几何学上的应用和物理上的应用。

(3) **内容适度更新** 根据信息时代的要求,对教学内容作了适度更新。由于计算机等新技术的飞速发展,离散数学的重要作用越来越被人们所认识,我们将离散数学一些知识渗透到本书中。例如,用对应的观点定义函数,去理解函数的概念。

(4) **设计的参与性** 在本书正文中,我们灵活安排了想一想、做一做、试

一试等相关内容,以利于学生主动参与本课程教学的全过程,激发其学习兴趣,培养举一反三的能力及创新精神。

(5) 数学知识的应用性 本书中对所有讨论的问题,大多以生产、生活、科学技术中实例引入,以展示数学应用的广泛性,并将建立实际问题的数学模型的方法渗透到本书之中。使得学生通过本课程的教学,掌握应用数学知识建立数学模型的简单方法,培养其数学综合素质及应用所学知识去分析与解决实际问题的能力。

本书安排了六个数学实验,以软件包 Mathematica 4.0 为蓝本,学生通过系统的数学实验课的学习,使其基本具备利用计算工具进行数学计算的能力。为便于读者掌握一种计算软件,在附录 A 中简单介绍了软件包 Mathematica 4.0 的使用方法。

(6) 知识处理的先进性 高等数学是以微积分为主线展开讨论的。微积分学的朴素思想就是在局部范围内以“直”代“曲”,在整体上通过求和与取极限,由“直”又回到了“曲”,因此说极限是微积分学的基础与工具。在处理极限这部分内容上,我们突出了它的工具作用,采用直观描述的方法定义极限,而没有用精确定义。只要求读者掌握简单的计算极限的方法,不要求进行复杂的计算与证明。因而,在微积分学的应用中,我们删去了洛必达法则,作这样的处理是希望读者能很好地理解极限的概念及求极限的过程,并作为工具来解决一些实际问题。同时,也体现了降低理论推理、强化实践能力的培养,注重实际应用的高等职业教育教学原则。

在微分学这部分内容中,我们打破了传统的以导数为主线的处理方法,重点突出了微分的重要地位。在导数与微分的关系上,采取先定义微分,然后再引入导数的次序,这符合数学发展的历史,也符合人们的认识规律,使读者对微分先入为主,留有深刻的印象。在给出计算法则上,则是求微分与求导数并重。

一元函数积分学中,我们先给出定积分的概念、性质,通过微积分学基本定理实现定积分与原函数(不定积分)微分建立联系。

这两部分内容通过这样处理,使得脉络清晰,主线突出。

将在微积分学中有重要应用的“微元法”始终贯穿于微分学、积分学以及微分方程之中,希望读者能学会使用“微元法”来解决一些工程技术中的实际问题。

(7) 习题设计的系统性与科学性 本书的练习题的设计充分体现了系统性与科学性。

本书中每节后都配有一定数量的课堂练习题。练习题中的第一题均设计为简答题。通过简答题给出本节中读者应掌握的知识内容。其目的是帮助读者理解基本概念、基本公式、基本法则、基本定理,起到对知识温故知新的作用。

我们为本书配备了学习指导书。它是以章为单位编写的,包括五个方面内容。一是本章的学习目标,以明确本章应掌握的知识内容;二是本章的重点与难点解析,指导读者掌握重点内容,突破难点内容;三是质疑与解惑,旨在指导读者澄清模糊认识,明晰知识结构;四是典型例题选解,通过对典型问题的剖析,帮助读者掌握知识体系,学会分析问题与解决问题的思想方法;五是自我检测题,供读者检测本章知识内容的学习效果。

为提高课堂教学效果,为教师应用多媒体授课提供方便,本书配有课堂教学课件。

参加本书编写的有阜新高等专科学校原玉杰、陈强,渤海船舶职业学院杜吉佩。全书的结构设计、统稿、定稿由杜吉佩完成,教学课件由杜妍制作。

安徽大学杨尚俊教授仔细审阅了本书的初稿,提出了许多有价值的修改建议,在此表示衷心感谢。

在本书的编写过程中,得到编者所在院校领导的大力支持,以及有关专家与同行的帮助,编者在此一并致谢。

限于编者的水平,不当之处,恳请读者提出宝贵意见。

编者

目 录

前言

第 1 章 空间向量与空间解析几何初步	1
1.1 空间向量及线性运算	1
1.2 空间直角坐标系 空间向量的坐标表示	4
1.3 空间向量的数量积与向量积	9
1.4 空间的曲面方程与曲线方程	13
1.5 空间的平面与直线	18
第 2 章 极限与连续	26
2.1 函数	26
数学实验一 求函数值, 作函数图形	39
2.2 函数的极限	42
2.3 无穷小与无穷大	51
2.4 函数的连续性	56
第 3 章 微分学及应用	64
3.1 微分与导数	64
3.2 求导数的方法	70
3.3 高阶导数	81
数学实验二 极限及导数的求法	83
3.4 中值定理 函数单调性的判别	85
3.5 函数的极值与最值	89
3.6 函数图形的描绘	94
3.7 一元函数微分学在数值计算中的应用	98
第 4 章 积分学及应用	105
4.1 定积分的概念	105
4.2 定积分的基本性质和微积分基本定理	109
4.3 不定积分	114
4.4 主要积分方法	117
4.5 定积分的计算	125
4.6 反常积分	129
4.7 定积分应用举例	132
数学实验三 积分及运算	141
第 5 章 多元函数微积分学及应用	143

5.1 二元函数	143
5.2 多元函数微分学	151
5.3 多元函数微分学的应用	158
5.4 二重积分	163
5.5 二重积分的应用	173
第6章 无穷级数及应用	179
6.1 数项级数	179
6.2 数项级数的审敛方法	184
6.3 幂级数	189
6.4 傅里叶级数	197
6.5 任意区间上的函数展开为傅里叶级数	204
数学实验四 级数与傅里叶级数	209
第7章 微分方程及应用	212
7.1 微分方程的概念	212
7.2 一阶微分方程	216
7.3 二阶常系数线性微分方程	220
数学实验五 微分方程及解法	225
7.4 微分方程应用举例	227
数学实验六 综合实验举例	235
附录	240
附录 A Mathematica 软件操作简介	240
附录 B 简易积分表	257
参考文献	267

第1章 空间向量与空间解析几何初步

平面向量和平面解析几何,其目的是在二维空间中用代数的方法来研究平面曲线问题,而在实际生产、生活中,我们所见到的多是三维空间中的图形和几何体.本章中,我们类似地建立空间向量和空间解析几何的理论,以使用代数的方法来研究三维空间中的几何问题.本章主要解决如下两个问题:

- (1) 已知点的几何轨迹,如何建立它的代数方程;
- (2) 已知代数方程,如何来确定它的几何轨迹.

1.1 空间向量及线性运算

1.1.1 空间向量

向量是研究几何问题的基本工具.大家知道,在我们日常生活、生产中所遇到的量大致可分为两类.一类是取定单位后,它的数值就完全确定了,这类量叫做数量,如质量、面积、长度、温度等;另一类是不仅有大小,而且有方向,这种量叫做向量,如力、位移、速度等.

同平面向量的情形一样,把空间中既有大小又有方向的量叫做空间向量.空间向量可以用空间中的有向线段来表示,有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.

在空间中,长度相等且方向相同的有向线段所表示的向量叫做相等向量.例如,将向量 $\overrightarrow{AB}$ 平行移动到 $\overrightarrow{CD}$,再把 $\overrightarrow{CD}$ 平等移动到 $\overrightarrow{EF}$,显然 $\overrightarrow{AB}$ 的长度等于 $\overrightarrow{CD}$ 的长度且方向相同,所以,向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}$ 相等.同理,向量 $\overrightarrow{CD}$ 与向量 $\overrightarrow{EF}$ 相等.故 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ 表示的是同一向量,记作 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.

如果一组向量用同一起点的有向线段表示后,这些有向线段都在同条直线上,我们就称这组向量是共线的,否则称是不共线的.

如果一组向量用同一起点的有向线段表示后,这些向量都位于同一平面内,则称这组向量是共面的,否则称不共面的.例如,在图 1-1a 中, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ 是共面的,而在图 1-1b 中,这三个向量是不共面的.

例 1 指出图 1-2 中的所有共面向量.

解 共面向量分别是

- (1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$;

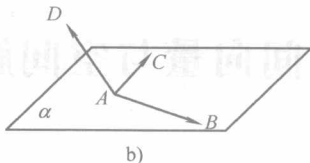
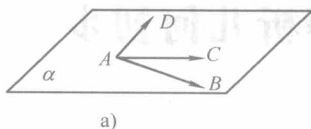


图 1-1

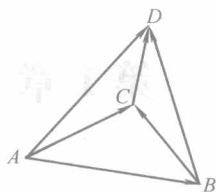


图 1-2

$$(2) \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CD};$$

$$(3) \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC};$$

$$(4) \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}.$$

一共有四组共面向量.

同平面向量一样, 向量 a 的大小叫做向量的模(长度), 记作 $|a|$. 其模为 1 的向量, 叫做单位向量. 与向量 a 方向相同的单位向量记作 e_a , 显然 $|e_a| = 1$. 与向量 a 大小相等、方向相反的向量, 叫做向量 a 的负向量, 记作 $-a$. 模为零的向量, 叫做零向量, 记作 0 . 零向量的方向是任意的.

1.1.2 向量的加法与减法

同平面向量一样, 两个向量 a 与 b 的和, 适用于三角形法则和平行四边形法则, a 与 b 的和记作 $a+b$, 可以证明, 向量的加法符合如下的算律:

$$(1) a+b=b+a;$$

$$(2) (a+b)+c=a+(b+c);$$

$$(3) a+0=0+a=a, a+(-a)=(-a)+a=0.$$

同平面向量一样, 可以用负向量来定义向量的减法为

$$a-b=a+(-b).$$

向量的减法也同样适用于三角形法则, 即

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.$$

注意 两向量方向相同和相反时, 它们的和可由三角形法则确定. 当方向相同时, 和向量的方向与这两向量的方向相同, 模为两向量的模的和; 当两向量的方向相反时, 和向量的方向与模较大的向量的方向相同, 其模为二者的差.

例 2 已知向量 a, b, c , 求向量 $a+b, b-c$.

解 如图 1-3 所示. 在空间中任取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA}=a$, 以 A 为起点作 $\overrightarrow{AB}=b$, 则 $\overrightarrow{OB}=a+b$; 作 $\overrightarrow{CB}=c$, 则 $\overrightarrow{AC}=b-c$.

例 3 如图 1-2 中的空间四边形, 设 $\overrightarrow{AB}=a, \overrightarrow{BC}=b, \overrightarrow{CD}=c, \overrightarrow{AD}=d$.

(1) 试用向量 a, b 表示向量 $\overrightarrow{AC}$;

(2) 用 a, d 表示向量 $\overrightarrow{BD}$;

(3) 求 a, b, c, d 的关系.

解 由向量的和与差的三角形法则, 有

$$(1) \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}, \text{ 所以 } \vec{AC} = a + b;$$

$$(2) \vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB} = d - a;$$

$$(3) \vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}, \text{ 所以 } d = a + b + c.$$

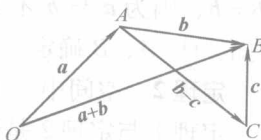
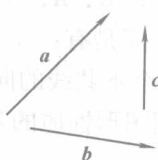


图 1-3

1.1.3 向量的数乘

同平面向量一样, 空间向量也可以定义数乘向量运算, 它的意义与平面向量数乘的意义相同.

任意非零向量 a 都可以表示为 $a = |a|e_a$ 或 $e_a = a/|a|$.

易证, 数乘向量的运算满足下面的运算律:

$$(1) 1 \cdot a = a \cdot 1 = a;$$

$$(2) (-1)a = a(-1) = -a;$$

$$(3) la = al;$$

$$(4) (lm)a = l(ma);$$

$$(5) (l+m)a = la + ma;$$

$$(6) l(a+b) = la + lb.$$

其中 $l, m \in \mathbf{R}$.

由数乘向量的意义知, 它仅改变向量的长度或反转向量的方向. 因而, 数乘向量的结果与原向量是共线的, 于是有下面的定理.

定理 1 向量 a 与非零向量 b 共线的充分必要条件是存在唯一实数 l , 使得 $a = lb$.

例 4 a, b, c 为空间向量, 化简下列各式:

$$(1) 4(3a+b) - 3(a-3b) + 2a;$$

$$(2) 3(2a-3b+c) + 2(a+2b-3c).$$

$$\text{解 } (1) 4(3a+b) - 3(a-3b) + 2a = 12a + 4b - 3a + 9b + 2a = 11a + 13b.$$

$$(2) 3(2a-3b+c) + 2(a+2b-3c) = 6a - 9b + 3c + 2a + 4b - 6c = 8a - 5b - 3c.$$

与平面的情形一样, 在空间中, 一个点和一个非零向量确定一条直线, 这个非零向量叫做直线的方向向量, 记作 s .

在空间中, 任取一点 O 和两个不共线的向量 a, b , 以 O 为起点, 作 $\vec{OA} = a$,

$\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 因为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线, 于是 O, A, B 三点不共线, 由立体几何相关知识可知, O, A, B 确定一个平面, 于是有:

定理 2 空间中一个点和两个不共线的向量确定一个平面.

定理 1 与定理 2 是研究空间图形性质的基础.

练习 1-1

1. 简答题

(1) 什么叫空间向量? 怎样用几何方法表示空间向量?

(2) 什么叫共线向量? 怎样判别两空间向量是否共线?

(3) 已知两非零向量, 怎样求它们的和向量与差向量?

(4) 怎样求数与向量的积?

(5) 向量的加法与数乘向量都满足哪些运算规律?

2. 设 $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{a}$, 求 $\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w}$.

3. 应用两向量求和的三角形法则, 说明 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$, 并求出等号成立的条件.

4. 设 $\mathbf{u} = -\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$, 试用向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 表示 $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

5. 已知 $\triangle ABC$ 两边的向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$, D 是 $\overline{BC}$ 边上的中点, 试用 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 表示中线向量 $\overrightarrow{AD}$.

1.2 空间直角坐标系 空间向量的坐标表示

1.2.1 空间直角坐标系

同平面上一样, 在空间中也可以建立直角坐标系, 其方法是: 在空间中任选一点 O , 定出一个长度单位和经过点 O 的三条互相垂直的直线 Ox , Oy , Oz 构成的坐标系, 叫做空间直角坐标系, 记作 $Oxyz$. 点 O 叫做原点, Ox , Oy , Oz 分别叫做 x 轴, y 轴和 z 轴. 有时也分别叫做横轴, 纵轴和竖轴.

规定三个坐标轴的方向符合右手规则, 即右手握住 z 轴当右手四指从 x 轴正向转到 y 轴正向时, 大拇指竖起的方向即为 z 轴正向^①.

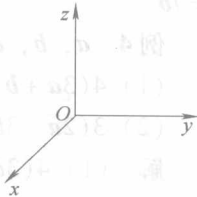


图 1-4

三个坐标轴所确定的三个平面 Oxy , Oxz , Oyz , 都叫做坐标平面.

^① 也有左手系, 规则同右手系.

三个坐标平面将空间分成八个部分, 每个部分叫做一个卦限.

位于 Oxy 坐标面上方的第 I, II, III, IV 象限分别叫做第 I, II, III, IV 卦限; 而位于 Oxy 平面下方的部分则分别叫做第 V, VI, VII, VIII 卦限. 如图 1-5 所示.

设点 P 为空间中任意一点, 过点 P 作三个平面, 分别垂直于 x 轴, y 轴, z 轴, 与 x 轴, y 轴, z 轴的交点依次为 M, N, Q . 设 M, N, Q 三点在 x 轴, y 轴, z 轴上的对应坐标分别是 x, y, z . (这就是说, 空间中任意一点 P 确定一组有序的实数 x, y, z). 反之, 在 x 轴, y 轴, z 轴上分别取坐标是 x, y, z 的三点 M, N, Q 并过这三点依次作垂直这三个轴的三个平面, 则这三个平面将相交于点 P (这也就是说, 一组有序的实数 x, y, z 唯一确定空间的一个点) 如图 1-6 所示. 这样一来, 空间中任意一点 P 与一组有序的实数 x, y, z 建立了一一对应的关系. 这组有序实数叫做点 P 的坐标. x 为点 P 的横坐标, y 为点 P 的纵坐标, z 为点 P 的竖坐标, 记作 $P(x, y, z)$.

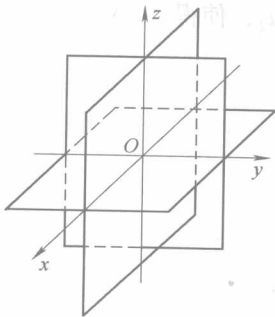


图 1-5

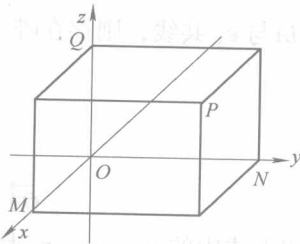


图 1-6

这样, 在这八个卦限内点 P 三个坐标符号特征是:

第 I 卦限 $x > 0, y > 0, z > 0$;

第 II 卦限 $x < 0, y > 0, z > 0$;

第 III 卦限 $x < 0, y < 0, z > 0$;

第 IV 卦限 $x > 0, y < 0, z > 0$;

第 V 卦限 $x > 0, y > 0, z < 0$;

第 VI 卦限 $x < 0, y > 0, z < 0$;

第 VII 卦限 $x < 0, y < 0, z < 0$;

第 VIII 卦限 $x > 0, y < 0, z < 0$.

原点的三个坐标均为零, 即 $O(0, 0, 0)$, x 轴上点的坐标为 $(x, 0, 0)$, y 轴上点的坐标为 $(0, y, 0)$, z 轴上点的坐标为 $(0, 0, z)$.

在 Oxy 平面上点的坐标为 $(x, y, 0)$, 在 Oxz 平面上点的坐标为 $(x, 0, z)$, 在

Oyz 平面上点的坐标为 $(0, y, z)$.

1.2.2 空间向量的分解定理

将平面向量的分解定理推广至空间向量, 就得到空间向量的分解定理, 该定理刻画了空间向量的结构.

如图 1-7 所示, 设 e_1, e_2, e_3 是三个不共面的向量, a 是空间的任意向量. 下面讨论 e_1, e_2, e_3 与 a 之间的关系. 设两个向量 e_1, e_2 确定平面 α , e_3 不在 α 内. 它们的起点都在点 O , 若向量 a 是零向量, 则 $0 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$. 下面设 $a \neq 0$, 若 a 与 e_3 共线, 则 $a = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \lambda e_3$; 若 a 与 e_3 不共线, 作 $\overrightarrow{OA} = a$, 则点 A 与 e_3 确定直线 l , 设 l 与平面 α 相交于点 M ; 连接 OM , 则 $\overrightarrow{OM}$ 在 α 平面内, 且因 e_1 与 e_2 不共线, 由平面向量分解定理可知, 存在唯一的实数 a_1 与 a_2 , 使得

$$\overrightarrow{OM} = a_1 e_1 + a_2 e_2.$$

又因为 $\overrightarrow{MA}$ 与 e_3 共线, 则存在唯一实数 a_3 , 使得

$$\overrightarrow{MA} = a_3 e_3.$$

又得

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA},$$

$$\overrightarrow{OA} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3.$$

可以证明上式中的 a_1, a_2, a_3 是唯一的. 于是有:

定理 在空间中, 任意取三个不共面的向量 e_1, e_2, e_3 , 则空间中每一个向量都可以唯一地表示成

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3. \quad (1-1)$$

此定理叫做空间向量的分解定理, 把三个不共面的向量叫做空间的一个基底, 系数 a_1, a_2, a_3 叫做向量 a 在基底 e_1, e_2, e_3 下的坐标, 记作 (a_1, a_2, a_3) .

1.2.3 空间向量的坐标表示

在空间直角坐标系内, 分别取与 x 轴, y 轴, z 轴正方向相同的单位向量 e_x, e_y, e_z , 由于它们不共面, 可以作为空间的一个基底. 由空间向量的分解定理, 任意由原点出发的向量 $\overrightarrow{OM} = a$ 都可以表示成 $a = x e_x + y e_y + z e_z$, 系数 x, y, z 叫做向量 $\overrightarrow{OM} = a$ 的坐标, 记作

$$a = (x, y, z). \quad (1-2)$$

式(1-2)叫做空间向量的坐标表示. 其中 x 叫做向量 a 在 x 轴上的坐标, y 叫

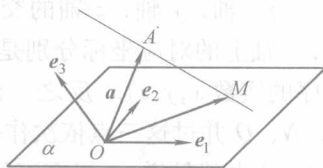


图 1-7

做向量 $\mathbf{a}$ 在 y 轴上的坐标, z 叫做向量 $\mathbf{a}$ 在 z 轴上的坐标.

如图 1-8 所示, 点 $M(x, y, z)$ 即是向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标. 于是, 在空间直角坐标系内每一向量都可以用三个有序实数唯一表示.

若向量 $\mathbf{a} = (x, y, z)$, 则

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

设 $\mathbf{a}$ 为非零向量, 它的方向可以由 $\mathbf{a}$ 与三条坐标轴的夹角 α, β, γ 所确定. 一般地, 这三个角叫做方向角. 一般用三个方向角的余弦来描述向量的方向. 如图 1-8 所示, 由几何知识可得

$$OA = |\overrightarrow{OM}| \cos \alpha, \quad OB = |\overrightarrow{OM}| \cos \beta, \quad OC = |\overrightarrow{OM}| \cos \gamma,$$

即

$$\cos \alpha = \frac{OA}{|\overrightarrow{OM}|}, \quad \cos \beta = \frac{OB}{|\overrightarrow{OM}|}, \quad \cos \gamma = \frac{OC}{|\overrightarrow{OM}|}.$$

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 叫做方向余弦.

用向量的坐标表示为

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

由上述三式可知

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (1-3)$$

常将与方向余弦成比例的一组实数 m, n, p 叫做方向数. 即若

$$\frac{m}{\cos \alpha} = \frac{n}{\cos \beta} = \frac{p}{\cos \gamma},$$

则 m, n, p 为方向数.

例 1 已知向量 $\mathbf{a}$ 与 x 轴和 y 轴的夹角分别为 60° 和 120° , 求向量 $\mathbf{a}$ 与 z 轴的夹角.

解 由式(1-3), 有 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, 则

$$\cos^2 \gamma = 1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta).$$

又 $\alpha = 60^\circ, \beta = 120^\circ$ 将其代入上式得

$$\begin{aligned} \cos^2 \gamma &= 1 - \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \right] \\ &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

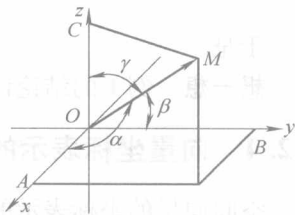


图 1-8

所以

$$\cos \gamma = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

于是

$$\gamma = 45^\circ \text{ 或 } \gamma = 135^\circ.$$

想一想 例 1 的结论说明了什么问题?

1.2.4 向量坐标表示的线性运算

空间向量的坐标表示的线性运算同平面向量坐标表示的线性运算一样, 即两个向量之和与差的坐标分别等于这两个向量对应的坐标的和与差; 实数与向量乘积的坐标等于这个实数乘以原向量对应的坐标. 设 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, 则

$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2). \quad (1-4)$$

特别地, $\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$.

例 2 已知 $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y + 3\mathbf{e}_z$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z$, 求 $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

解 由式(1-4), 得

$$\begin{aligned} 2\mathbf{a} + \mathbf{b} &= 2(2, -1, 3) + (1, 2, -1) = (4, -2, 6) + (1, 2, -1) \\ &= (4+1, -2+2, 6-1) = (5, 0, 5). \end{aligned}$$

即

$$2\mathbf{a} + \mathbf{b} = 5\mathbf{e}_x + 5\mathbf{e}_z.$$

$$\begin{aligned} 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} &= 3(2, -1, 3) - 2(1, 2, -1) = (6, -3, 9) - (2, 4, -2) \\ &= (6-2, -3-4, 9+2) = (4, -7, 11). \end{aligned}$$

即

$$3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = 4\mathbf{e}_x - 7\mathbf{e}_y + 11\mathbf{e}_z.$$

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 下面来求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示, 如图 1-9 所示.

向量 $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$,

由式(1-4), 得

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \end{aligned}$$

(1-5)

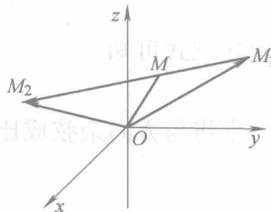


图 1-9

即, 自由向量的坐标表示等于此向量的终点坐标减去起点的对应坐标.

由向量的模的定义, 有

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1-6)$$

式(1-6)叫做空间两点间距离公式.

类似地, 空间线段 M_1M_2 的中点坐标为

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (1-7)$$

做一做 请读者依据图 1-9, 推导式(1-7).

例3 已知线段 M_1M_2 的中点坐标为 $(3, 2, -1)$, 端点 M_2 的坐标为 $(5, 6, 8)$, 求端点 M_1 的坐标.

解 令 (x_1, y_1, z_1) 记端点 M_1 的坐标, 由式(1-7), 得

$$3 = \frac{x_1 + 5}{2}, \quad 2 = \frac{y_1 + 6}{2}, \quad -1 = \frac{z_1 + 8}{2}.$$

解得 $x_1 = 1, y_1 = -2, z_1 = -10$,

所以端点 M_1 的坐标是: $(1, -2, -10)$.

练习 1-2

1. 简答题

(1) 请你说出空间向量分解定理的条件和结论.

(2) 空间直角坐标系是怎样建立的?

(3) 说出空间向量的坐标表示方法.

(4) 空间向量在坐标表示下怎样进行线性运算?

(5) 怎样求出空间中两点间的距离?

(6) 已知两个点的坐标, 怎样计算它的中点坐标?

2. 一个棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 取 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$ 为空间的一个基底, 分别求出 $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DD_1}, \overrightarrow{A_1D}, \overrightarrow{DB_1}, \overrightarrow{A_1C}$ 在该基底下的坐标.

3. 已知 $\mathbf{a} = (2, -1, -3), \mathbf{b} = (3, 1, 2)$, 求 $\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}, 3\mathbf{b}, 4\mathbf{a} + 3\mathbf{b}, 4\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

4. 设 $\mathbf{a} = (2, -1, -3)$, 试求与 $\mathbf{a}$ 同方向的单位向量.

1.3 空间向量的数量积与向量积

1.3.1 空间向量的数量积

在空间中任取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 把 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 组成的不大于 π 的角 (这个角与 O 点的选取无关), 叫做向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角, 记作 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. 于是,

$$0 \leq \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leq \pi, \text{ 且 } \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle.$$

同平面向量类似, 对空间中任意两个向量也可以引入一种结构性运算——数量积.

定义1 如果给定两空间向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 则定义实数 $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的数量积, 记作 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 即

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle. \quad (1-8)$$