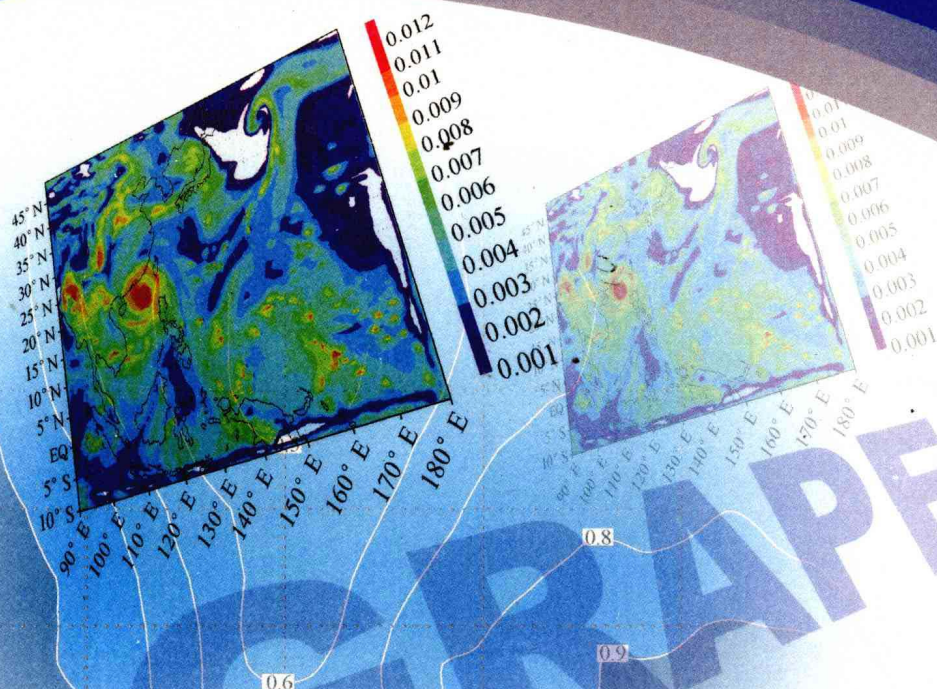


数值预报系统 GRAPES的科学设计与应用

薛纪善 陈德辉 等著



科学出版社
www.sciencep.com

数值预报系统 GRAPES 的 科学设计与应用

薛纪善 陈德辉 等著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书为国家“十五”科技攻关重点项目研究成果。全书详细叙述了数值天气预报系统的科学设计方案及其在实际数值预报业务与研究中的应用,内容包括资料变分同化系统、一体化模式动力框架、模式的物理过程、模式的并行计算的科学方案,以及所建立的区域中尺度与全球预报系统的结构和在国家级与区域级业务数值预报中心运行的结果,并将本系统移植与运行中的关键技术问题作为本书的附录,供系统应用者参考。

本书主要读者对象为在地球科学领域从事天气、气候、海洋等数值模式、资料同化与数值模拟研究的科学工作者,气象业务部门从事天气预报业务与技术开发的科技人员,计算机科学领域从事并行运算方法研究与技术开发的科技人员,以及高等院校相关学科领域的教师与研究生。

图书在版编目(CIP)数据

数值预报系统 GRAPES 的科学设计与应用/薛纪善,陈德辉等著. —北京:科学出版社,2008

ISBN 978-7-03-021859-9

I. 数… II. ①薛…②陈… III. 数值天气预报-气象业务自动化系统-研究 IV. P456.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 063594 号

责任编辑:王剑虹 王日臣 / 责任校对:朱光光
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

盛 大 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 6 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2008 年 6 月第一次印刷 印张:24 3/4 插 11

印数:1—2 000

字数:489 000

定价:58.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

序

中国是世界上气象灾害种类最多、发生最频繁的国家之一。在进入 21 世纪的 5 年里,仅因暴雨造成的洪涝成灾面积就达到 1.92 亿亩(1 亩 $\approx$ 667m²),受灾人口 1.61 亿,死亡 1510 人,直接经济损失 1006 亿元。单以 2005 年而言,珠江流域的暴雨引发了百年不遇的洪涝灾害,辽河流域发生了近十多年来的最大洪灾,汉江、渭河发生严重秋汛;台风频繁袭击我国,特别是海棠、麦莎、泰利、卡努四个强台风登陆我国,从南到北影响我国沿海广大地区,造成巨大的经济损失,部分地区还因暴雨引发严重的地质灾害;12 月初开始,地处山东半岛的烟台和威海等地又先后遭受 3 次强暴风雪的袭击。对灾害性天气的准确预报,无论对政府部署、指挥社会的防灾抗灾,还是个人有效地采取防灾措施都有着重要的意义。因此,灾害性天气预报已经成为社会最关注的热点之一。

由于全球气候变化,极端天气气候事件增多,对经济、社会发展和人民生命财产安全的危害也持续增加,严重影响着全球可持续发展战略目标的实现。在全球气候持续变暖和区域气候环境变化的作用下,中国生态与环境显得相当脆弱,水资源危机日益突出,公共安全受到挑战,对气象灾害的防御也显得更加紧迫,灾害性天气预报的重要性也就更为突出。

除了防灾减灾以外,随着国家的经济发展和人民生活质量的不断提高,人们对于天气预报提出了更多、更细的需求,例如,重大社会活动的气象保障、空气质量的预报等。北京已经获得 2008 年奥林匹克运动会的举办权,中国将围绕“绿色奥运、科技奥运和人文奥运”三大主题开展工作。奥运气象预报服务是一项新的任务和挑战,更是一份重要的责任,而其基础则是高精度的定点、定时、定量的气象预报。

高质量的气象预报对于减灾防灾,提高生活质量,加强国防安全,促进国民经济持续增长与社会发展有重要意义,作为当代科学技术发展主要成就之一的数值天气预报是提高气象预测水平的主要科学途径,发展我国数值预报系统使之满足国家多方面对气象服务的需求是一项重要的气象科技发展任务,也是实施“公共气象、安全气象、资源气象”战略思想的重要方面。

改革开放以来,我国的数值天气预报取得了长足的发展。经过几代科学家的努力,我们已经建立起完整的数值预报业务体系,在预报业务与服务中发挥了重要作用。但与先进国家相比,差距还很大,也不能完全满足国家的需求。因此,进入 21 世纪以后,中国气象局党组把发展我国的数值预报技术当作气象科技创新的最重要领域,并于 2001 年成立了数值预报创新基地,集中数值预报科研方面的人力、

财力和物力,开展数值预报的技术创新研究。这一想法得到了科技部的大力支持,“十五”期间设立了国家重点科技攻关项目“中国气象数值预报系统技术创新研究”,进行我国新一代全球中期天气预报和区域中尺度天气预报业务系统的研究开发。项目吸收了中国科学院、高等院校、部队等多个部门的科技力量,还开展了广泛的国际合作。整个研究开发工作在充分吸收国际最新科技成果的同时,自始至终坚持自主创新。从模式框架的整体设计到计算程序的开发与系统调试,都是完全由中国科学家自己完成的。经过五年的努力,新的全球资料同化与中期预报试验系统、中尺度同化与预报试验系统等都已经建立起来,并且通过相当长时间的业务环境运行试验,证实了具有改进我国业务数值预报的巨大潜力。这些成果从根本上缩短了我国与发达国家在数值天气预报模式发展技术上的差距。

《数值预报系统 GRAPES 的科学设计与应用》专著是“十五”科技攻关项目“中国气象数值预报系统技术创新研究”的理论研究成果的一部分,它的编辑完成,给中国的广大气象及相关学科读者提供了一份富有特色的专业参考资料。该书从资料处理、资料同化,到数值模式、产品解释应用,进行了完整的介绍分析,既有详实的理论设计介绍,又有应用报告,还涉及软件工程技术问题;既可以作为 GRAPES 用户的新一代数值预报系统理论技术手册和指南,也可以作为从事数值预报工作的科技和业务人员以及高等院校和科研院所师生的参考材料。

我国科技发展的经验,特别是“两弹一星”与航天事业的成功经验告诉我们,只有自主研究,开发创新,才能真正实现技术的跨越,使中国由科技大国成为科技强国的梦想得以实现。我国气象数值预报的发展也需要走自主创新发展的道路,才可能赶上世界先进国家的行列,从根本上缩短我国与发达国家在气象科学技术上的差距,最终跻身于国际先进的行列。我相信,广大数值预报的科技人员心怀一份光荣的历史使命感和义不容辞的责任感,团结协作和共同努力,在过去科技成果的基础上,经过不懈努力,一定能够在数值预报的发展上取得更大突破,并在防灾减灾、社会公众服务及国防建设等工作中发挥越来越大的作用。

中国科学院院士

秦大河

前 言

自 20 世纪 50 年代美国等国家率先建立数值天气预报业务以来,随着数值预报理论与方法的进一步发展以及计算机、大气遥感等科学技术的飞速进步,数值预报质量不断提高,并已经成为制作中、短期天气预报的最有效的科学方法。在数值预报模式基础上发展起来的大气数值模拟也已经成为大气科学研究的主要手段之一。数值天气预报在一定程度上反映了一个国家气象科技的综合水平,各发达国家都十分重视数值预报系统的持续发展,把它作为推进气象科技进步的重点之一。

我国是国际上开展数值预报研究较早的国家之一,但直至 20 世纪 70 年代后期才起步建立数值预报业务系统,比发达国家晚了整整 1/4 个世纪。加上当时数值预报业务的支撑条件,如计算机与资料库等都与国外有很大差距。因此,为了在短时间内建立起我国数值预报业务以满足当时的业务与服务需求,主要采取通过移植国外业务模式与相关软件的发展策略。通过这一途径到 20 世纪 80 年代末至 90 年代初,我国的数值预报业务体系已经基本建立起来,包括国家级的全球同化与中期预报系统、中国区域资料同化与降水预报系统、热带气旋预报系统,以及部分区域中心的有限区同化预报系统和局地高分辨中尺度预报系统,以后又开展了集合预报等业务系统。90 年代初我国跻身少数能够发布中期数值预报的国家,这在国际气象界引起了强烈反响。就数值预报业务的完整性与提供的产品来说,到 90 年代中期我国已与先进国家基本相同。

数值预报逐渐成为业务天气预报的重要基础,在气象业务与服务中发挥了重要的作用。但由于我国的数值预报业务化起步晚,长期以来支撑条件又不足,加上研究规模很小、基础薄弱,科技水平及业务运行效果与先进国家相比存在很大差距;到新世纪之初,随着我国科技实力的增强,数值预报的支撑条件已经大大改善,为我国数值预报的发展提供了前所未有的机遇。与之相比,我国数值预报技术发展速度慢,国际上数值预报的新科学成就不能被有效利用并产生业务效益的问题凸现出来;而社会对气象预报的需求却大大增加,我国的数值预报面临着重大的挑战。如何利用国家经济发展提供的有利条件,促进数值预报的跨越发展,满足对高质量预报的需求,成为科学家与管理部门共同关注的问题。

1999 年中国气象局组织了一批数值预报业务与科研第一线的人员,对国际数值预报的发展动向与我国的成就及问题进行了比较全面的调研。其后形成的报告在充分肯定我国数值预报发展成就的同时,也指出了我国数值预报发展中存在的主要问题。其中最重要的是三个方面:由于缺乏先进的同化技术,无法使用大

量涌现的遥感资料,致使数值预报的初值误差很大;对数值预报模式缺乏针对东亚季风区的天气过程的深层优化,致使模式对我国的重要天气过程的模拟预报能力偏低;多个互不相关的业务系统在同一个业务中心同时运行,致使系统的运行维持与升级的周期长,远远落后于计算机与气象现代化发展的速度。而这些问题的产生与我国的业务数值预报基本上建立在从发达国家移植的模式或系统的基础上,自我创新能力弱有很大关系。一方面新技术的获取在很大程度上受到供方的制约,我们不可能集约化地组织自己的发展;另一方面我们也缺乏对引进系统进行深层次优化的能力。尽管在我国数值预报业务发展的初期,这是不可避免的,但要推进我国数值预报的进一步发展就必须加大数值预报的自主发展与创新。

纵观近 20 年数值预报的发展,有三个最引人瞩目,也是影响最深远的变化。第一是资料变分同化方案的发展,使大量遥感资料被同化到数值预报模式,基本解决了数值预报缺乏观测资料的问题。第二是数值预报模式包含的动力与物理过程不断向真实大气逼近,由于分辨率的提高与计算方法的改进使模式对大气的动力学简化大大减小,因而描写中小尺度动力过程的误差减小。模式包含的物理、化学过程也愈来愈丰富,特别是云内的微物理过程被显式地引入到数值预报模式,大气与地球其他圈层模式的耦合提高了模式对复杂物理过程描述的能力。第三是充分利用计算机技术发展所提供的机遇,集约化地发展数值预报系统,大大缩短了系统的升级周期。相比之下,我国恰在这三个方面表现出发展的滞后。因此,要实现我国数值预报的跨越发展,应该通过自主研究与开发,首先在数值预报发展的以下几个关键科学技术问题上取得突破:以遥感资料为主要对象的资料三维与四维变分同化系统的发展;多尺度通用非静力动力模式内核的发展;以云和降水为核心,包括陆气、海气相互作用的,面向东亚季风区特点的模式物理过程方案的发展;与当代高性能计算机的体系结构相适应的数值预报的计算机程序实现方案,特别是并行计算与程序的标准化、模块化。

20 世纪 90 年代后期我国数值预报自主发展的紧迫性引起了广泛的关注,当时立项的国家重大基础研究计划项目“我国重大天气灾害的形成机理和预测理论研究”首先开始了对我国新数值预报模式的前期研究。2001 年科技部与中国气象局共同支持了为期五年的“中国气象数值预报系统技术创新研究”项目,并把它列入国家“十五”科技攻关计划的重点之一。这一项目的目标是在可预见的 21 世纪初叶高性能巨型计算机能力和可获取的高时空分辨率气象观测资料条件下,充分吸收国内外的研究新成果,自主开发建立一套具有持续自主创新能力的天气数值预报新体系,包括资料四维变分同化系统、有限区域中尺度数值预报系统、全球中期天气数值预报系统以及环境支持系统,其技术性能达到国际同期先进水平。通过项目的实施,一个新的全球与区域同化预报系统(global-regional assimilation and prediction system, GRAPES)已经建立起来并基本具备了业务应用能力。

GRAPES 已经在我国几个主要的业务数值预报中心的业务中应用,业务部门的数值预报科技人员迫切需要有关该系统的科学原理、系统结构与运行的详细材料,作为引进、应用此系统的参考。同时 GRAPES 又是我国进入 21 世纪以来在大气科学领域的重要研究成果,引起国内外相关学科的研究人员广泛关注。为了促进成果的交流与 GRAPES 的应用,GRAPES 研究开发团队在系统研究开发基本完成后即着手撰写这本关于 GRAPES 的科学方案与运行、应用的专著。本书较详细、全面地叙述了 GRAPES 系统设计的科学方案与初步的运行结果,一方面可以供引进、移植 GRAPES 系统或使用基于 GRAPES 的数值预报产品的气象业务人员的参考;另一方面也可作为大气及相关学科的研究工作者了解我国进入 21 世纪以来在数值天气预报领域重要研究进展的参考,并可作为高等学校大气科学与相关专业的研究生的补充教材。全书共 8 章,其中第 1~4 章分别叙述了资料同化系统、预报模式动力框架、模式物理过程与软件架构的科学方案;第 5、6 章介绍了在以上成果基础上发展的全球中期与区域中尺度两个数值预报系统;第 7 章介绍了系统的业务应用;第 8 章是总结与展望,GRAPES 是一个还在继续发展中的系统,其业务应用也在扩展中。本书取材截至 2006 年,其后的进展与应用将在以后的出版物中逐步介绍。本书是在国家“十五”科技攻关项目“中国气象数值预报系统技术创新研究”(2001BA607B、2004BA607B)的技术报告基础上编写的,各章的撰稿人为:第 1 章,薛纪善;第 2 章,陈德辉、胡江林;第 3 章,徐国强、沈元芳、孙建;第 4 章,金之雁、伍湘君;第 5 章,沈学顺;第 6 章,杨学胜、张红亮;第 7 章,庄世宇、张耀棠、黄丽萍;第 8 章,薛纪善;附录,孙建、庄世宇、金之雁、薛纪善;万齐林、端义宏与梁旭东等提供了部分材料。各章初稿经薛纪善与陈德辉统稿成书,由薛纪善最后修改定稿。

本书在撰写过程中始终得到中国气象局领导的关心与支持,时任中国气象局局长的秦大河院士亲自为本书作序。本书的撰写也得到了中国气象局数值预报创新基地各位同仁与国家气象中心、国家卫星气象中心、广州热带海洋气象研究所、上海台风研究所等单位的大力支持。作者在此一并表示衷心的感谢。

目 录

序

前言

第 1 章 GRAPES 资料变分同化系统的科学设计与试验	1
1.1 引言	1
1.2 三维变分同化系统框架的理论设计与理想试验	2
1.3 同化系统中的观测算子	15
1.4 背景误差的统计与模型	19
1.5 非静力模式变量同化	31
1.6 同化-预报循环方案的设计	38
1.7 台风相关的特殊技术问题	43
1.8 三维变分初步试验结果分析	51
1.9 四维变分同化系统的发展与试验	54
1.10 小结	61
参考文献	61
本章附录 全球三维变分谱滤波算子的向量和矩阵表示	62
第 2 章 GRAPES 模式动力框架理论设计与试验	65
2.1 引言	65
2.2 基本方程组	67
2.3 时间离散方案	81
2.4 空间离散方案	98
2.5 离散化的模式方程组	104
2.6 边界条件的设置	117
2.7 有限区域模式的理想场试验	120
参考文献	129
本章附录 赫姆霍兹方程的 GCR 解法	132
第 3 章 模式的物理过程	137
3.1 引言	137

3.2	云和降水过程	137
3.3	辐射过程	153
3.4	边界层过程	162
3.5	陆面过程	166
3.6	地形重力波	168
3.7	物理过程程序结构设计及相互关系	170
3.8	物理过程的优选试验	171
3.9	本章小结	179
	参考文献	180
第 4 章	软件体系结构和并行处理	184
4.1	引言	184
4.2	软件体系结构	184
4.3	程序模块化编程规范	189
4.4	模式并行处理	198
	参考文献	204
第 5 章	中尺度数值预报系统 GRAPES_Meso	206
5.1	GRAPES_Meso 系统构成	206
5.2	GRAPES_Meso 实际资料试验	209
5.3	结束语	228
	参考文献	228
第 6 章	全球数值预报系统 GRAPES-Global	230
6.1	引言	230
6.2	全球资料同化系统及试验	231
6.3	GRAPES 全球动力模式框架与理想试验	249
6.4	GRAPES 全球模式试验系统	269
6.5	总结与讨论	297
	参考文献	298
第 7 章	基于 GRAPES 的数值预报业务	300
7.1	引言	300
7.2	中国区域降水预报系统	301
7.3	台风数值预报系统 GRAPES_TCM	311
7.4	华南/热带气象数值预报系统 GRAPES_TMM	320

7.5 业务运行小结	327
7.6 在其他方面的应用	329
第8章 总结与展望	331
8.1 GRAPES 系统梗概	331
8.2 GRAPES 反映了我国数值预报科学水平的提高	334
8.3 GRAPES 的进一步发展	335
8.4 数值预报未来发展展望	342
附录	345
附录 A GRAPES 使用指南	345
附录 B GRAPES 3 维变分程序结构	347
附录 C GRAPES 模式程序结构	356
附录 D GRAPES 的解释应用	370
附录 E GRAPES 结果到 MICAPS 的转换程序	374

第 1 章 GRAPES 资料变分同化 系统的科学设计与试验

1.1 引 言

数值预报是数学物理中的一个典型的初值问题,模式积分的初值是根据初始时刻的气象观测资料通过特定的资料同化方案而形成的,因此资料同化在数值预报中占有特殊重要的地位。我国数值预报长期面临大片地区资料空缺,这是我国数值预报精度偏低的主要原因之一。国际上这一困难在近十年中因大量卫星遥感资料在数值预报中的定量应用而基本得以克服。全球与区域同化预报系统(global/regional assimilation and prediction system, GRAPES)的资料同化部分的主要发展目标就是通过建立对卫星观测资料的同化能力,提高我国数值预报初值质量。而卫星遥感资料在数值预报中的定量应用,不仅依赖于遥感技术的发展,也与 20 世纪 90 年代起资料变分同化技术的应用有密切关系。这一新的同化方法使与大气模式的基本状态变量呈现复杂的非线性关系的遥感观测资料,如卫星上获取的大气放射的不同频率的辐射强度数据的直接同化成为可能。发展 GRAPES 资料同化系统可以有不同的技术选择,但由于解决遥感资料的同化是发展新的同化与预报系统的最重要的目标之一,因此 GRAPES 的新同化系统采用变分方案。本章 1.2 节给出三维变分同化系统(GRAPES 3D-Var)框架的理论设计与理想试验的结果;1.3 节给出变分同化系统中各类观测算子,重点是卫星观测的大气辐射率的同化;1.4 节是关于背景场误差的统计与模型;1.5 节是在非静力模式同化中一些特殊问题的解决方案,这是由于 GRAPES 预报模式是非静力而产生的;1.6 节是同化-预报循环方案的设计;1.7 节是与台风相关的特殊技术问题;1.8 节是试验实例的分析;在 1.9 节讨论三维变分同化系统向四维变分同化系统(GRAPES 4D-Var)的扩展。这部分工作的技术开发已经基本完成,但由于本书的内容都是针对目前的已经业务应用的系统,所以只在本章其他内容的后面作简单的讨论。最后,在 1.10 节对目前存在的问题与进一步的工作做了简要的讨论。

1.2 三维变分同化系统框架的理论设计与理想试验

1.2.1 基本公式

以 $\mathbf{x}$ 表示数值预报模式的预报变量,它代表了大气状态,因此又可称为系统的状态变量,并以上标 b 表示背景场(一般取从上一同化时刻起始到本次同化的模式预报值),上标 a 表示分析场(即同化的结果)。大气状态 $\mathbf{x}$ 随着时间的变化可以写为

$$\mathbf{x}(t) = M(\mathbf{x}(t_0)) + \boldsymbol{\eta}(t) \quad (1.2.1)$$

式中, M 为预报模式; $\boldsymbol{\eta}(t)$ 为 t 时刻的模式误差; t 与 t_0 分别表示模式的预报时刻与起始时刻。

以 y^o 表示观测值,观测值与状态变量的关系为

$$y^o(t) = H(\mathbf{x}(t)) + \epsilon \quad (1.2.2)$$

式中, H 称为观测算子,它代表了观测值与大气状态的物理联系,对于不同的观测设备,有不同的表达,但应该是已知的; ϵ 代表观测误差。假设观测是在 $[t_0, t_1]$ 的时间区间内进行的,同化的目标是确定 t_0 时刻的模式状态 $\mathbf{x}(t_0)$,使由 $[t_0, t_1]$ 的时间区间内模式状态所求得的观测量与实际的观测的离差在考虑其他必要约束的前提下达到极小,也即求 $\mathbf{x}^a(t_0)$ 使以下的目标泛函 J 达到极小(Kayo Ide et al., 1997):

$$J(\mathbf{x}^a(t_0)) = \frac{1}{2} [\mathbf{x}^a(t_0) - \mathbf{x}^b(t_0)]^T \mathbf{B}^{-1} [\mathbf{x}^a(t_0) - \mathbf{x}^b(t_0)] + \frac{1}{2} \sum_i [y^o(t) - H(\mathbf{x}^a(t))]^T \mathbf{R}^{-1} [y^o(t) - H(\mathbf{x}^a(t))] \quad (1.2.3)$$

式中, $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{R}$ 分别是背景误差与观测误差的协方差矩阵;上标 T 表示矩阵的转置, $\mathbf{x}^a(t), t_1 \geq t \geq t_0$ 由预报模式决定:

$$\mathbf{x}^a(t) = M(\mathbf{x}^a(t_0)) \quad (1.2.4)$$

本书只考虑一个时间的观测,所以略去式(1.2.3)右端第二项的时间求和,即考虑三维变分同化的问题。关于多时刻的观测同化将在关于四维变分同化系统的设计中讨论。这时,问题简写为

$$J(\mathbf{x}^a) = \frac{1}{2} [\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^b]^T \mathbf{B}^{-1} [\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^b] + \frac{1}{2} [y^o - H(\mathbf{x}^a)]^T \mathbf{R}^{-1} [y^o - H(\mathbf{x}^a)] \quad (1.2.5)$$

由于 $\mathbf{B}$ 是一个超大规模的矩阵,且接近病态,直接求解式(1.2.5)的极小化是有困难的,但是可以通过一系列的变量变换来优化目标泛函 J 的极小化计算。

1.2.2 变量变换

在 GRAPES 3D-Var 中只考虑数值预报系统的基本预报变量的分析,因此 x 由风场的两个水平分量(用 u, v 表示)、大气温度或位势高度(只取其中之一,以 m 表示)与水汽(以 h 表示)所构成。在本系统当前版本中,所有的预报变量都定义在相同的经、纬网格点上,但可以很容易地转到与预报模式一致的交错格点上。水汽的分析有特殊性,将留待专门的讨论,在本节中暂时将水汽 h 从状态变量中略去。引入流函数 ψ 与速度势 χ ,再假定 χ 与 m 都由与 ψ 平衡的部分及不平衡的部分组成(Derber and Bouttier, 1999),关于平衡关系将在后面讨论。以下标 u 与 r 分别表示不平衡与平衡部分,并记 $\chi_r = N(\psi)$, $m_r = M(\psi)$, 即

$$\begin{aligned}\chi &= N(\psi) + \chi_u \\ m &= M(\psi) + m_u\end{aligned}\quad (1.2.6)$$

由 ψ, χ_u, m_u 组成新的变量,以 x_c 表示,并将 x_c 与 x 的对应关系记为

$$x = \mathcal{P}(x_c) \quad (1.2.7)$$

式中,

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ N & \mathbf{I} & 0 \\ M & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ m \end{bmatrix}, \quad x_c = \begin{bmatrix} \psi \\ \chi_u \\ m_u \end{bmatrix} \quad (1.2.8)$$

式中, $\mathcal{P}$ 表示一种物理变换。可以认为新变量 x_c 的各个分量具有独立性。当背景场变量以 x_c 表示时,相应的误差协方差矩阵 B_c 将分裂为三个独立的矩阵,从而使问题的规模缩小。把式(1.2.7)代入式(1.2.5),得到

$$J(x_c^a) = \frac{1}{2} [x_c^a - x_c^b]^T \mathcal{P}^T B^{-1} \mathcal{P} [x_c^a - x_c^b] + \frac{1}{2} [y^o - H(x_c^a)]^T R^{-1} [y^o - H(x_c^a)] \quad (1.2.9)$$

可以证明

$$B_c^{-1} = \mathcal{P}^T B^{-1} \mathcal{P} \quad (1.2.10)$$

进一步引入新的变量 w , 有

$$x_c^a - x_c^b = U w \quad (1.2.11)$$

式中, U 由如下关系定义

$$B_c = U U^T \quad (1.2.12)$$

把式(1.2.11)、式(1.2.12)代入式(1.2.9)后得到

$$J(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} + \frac{1}{2} (\mathbf{H} \mathcal{P} \mathbf{U} \mathbf{w} + \mathbf{d})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H} \mathcal{P} \mathbf{U} \mathbf{w} + \mathbf{d}) \quad (1.2.13)$$

式中, $\mathbf{d} = (\mathbf{H}(\mathbf{x}^b) - \mathbf{y}^o)$, 习惯上将 $-\mathbf{d}$ 称为新息向量(innovation), 而 $\mathbf{H}$ 是 H 的切线性算子。至此, 同化问题成为以 $\mathbf{w}$ 作为控制变量求式(1.2.13)的极小化。 $\mathbf{w}$ 的引进使极小化问题的性状得到优化。根据极小化的需要, 给出 J 关于 $\mathbf{w}$ 的梯度

$$\nabla_{\mathbf{w}} J = \mathbf{w} + \mathbf{U}^T \mathcal{P}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H} \mathcal{P} \mathbf{U} \mathbf{w} + \mathbf{d}) \quad (1.2.14)$$

公式(1.2.13)的极小化问题可以通过适当选取的数值方案求解。当 $\mathbf{w}$ 求得后, 可以通过以下关系计算 $\mathbf{x}^a$

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^b + \mathcal{P} \mathbf{U} \mathbf{w} \quad (1.2.15)$$

1.2.3 动力平衡条件及其对非平衡分量的控制

式(1.2.7)定义的平衡关系代表了同化系统所隐含的动力学约束, 具体的形式可以基于单纯的动力学考虑, 也可以基于大量样本的统计结果, 或者是两者的混合。GRAPES 是一个新发展的系统, 在初期还缺乏大样本的统计结果, 故选用前者。目前只考虑流函数与位势高度的平衡, 即令 $N=0$ 。考虑到模式对低纬度地区与中尺度系统的适应性, 3D-Var 给出两种流函数与位势高度的平衡关系的选择, 即线性平衡与非线性平衡方程。当 m 选择为大气温度的变量时, 还需要在此基础上增加静力方程, 以建立温度与位势高度的变换关系。变换算子 $\mathcal{P}$ 中的 M 实际上是线性或非线性平衡方程以及对应温度分析时静力方程的求解器。对于非线性平衡方程, 式(1.2.13)需要修改为

$$J(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} + \frac{1}{2} (\mathbf{H} \mathcal{P} \mathbf{U} \mathbf{w} + \mathbf{d})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H} \mathcal{P} \mathbf{U} \mathbf{w} + \mathbf{d}) \quad (1.2.13')$$

式中, $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{P}$ 的切线性算子, 式(1.2.14)则应修改为

$$\nabla_{\mathbf{w}} J = \mathbf{w} + \mathbf{U}^T \mathcal{P}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H} \mathcal{P} \mathbf{U} \mathbf{w} + \mathbf{d}) \quad (1.2.14')$$

$\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{P}^T$ 所包含的算子 M 与 M^T 应理解为原求解器 M 的切线性及伴随算子。下面写出 M 的具体形式(Haltiner, 1971):

$$M_1(\psi) = \nabla^{-2} \left(\nabla \cdot (f \nabla \psi) - 2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (1.2.16)$$

$$M_2(\psi) = \nabla^{-2} (\nabla \cdot (f \nabla \psi)) \quad (1.2.17)$$

式(1.2.16)与式(1.2.17)分别对应于非线性与线性平衡方程, ∇^{-2} 表示 Poisson 方程的求解器。 M_1 的切线性算子 M_1 为

$$\mathbf{M}_1 = \nabla^{-2} \left(\nabla \cdot (f \nabla) - 4 \times \frac{\partial^2 \psi_b}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 \psi_b}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi_b}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \quad (1.2.18)$$

式中, ψ_b 是背景场的流函数。过去的研究表明在气流曲率大的情况下, 例如涡旋系统的分析, 用式(1.2.16)取代计算相对简单的式(1.2.17)是必要的, 它接近于梯度风或旋衡风平衡。由于式(1.2.18)中方程的系数与背景场有关, $\mathbf{M}_1$ 已经隐含着式(1.2.17)与气流相关的背景场误差结构, 这是与线性平衡的情况显著不同的。一般说背景场是处于准平衡状态的, 分析场的动力平衡程度主要表现在分析增量场, 即分析场与背景场的差。由前面的推导可知这主要取决于背景场误差中平衡部分与不平衡部分的方差比。对位势高度场, 其平衡部分的方差可以由风场导得, 为了保证分析结果同样基本处于准平衡状态, 3D-Var 将位势高度非平衡部分的方差控制在由风场导出的平衡部分的方差的为 0.1~0.5。这个比例随着纬度而变化。为此要对下面提到的实际统计结果做一定修正。

1.2.4 湿度分析

关于湿度分析, 重要的问题是分析变量的选择以及与其他分析变量的关系。GRAPES 预报模式的湿度变量是比湿 q , 但不少关于湿度同化的研究认为以相对湿度为基础的变量的统计特征更符合同化系统的理论假定。为此系统提供了用比湿 q 与相对湿度 RH 作为控制变量的两种选择。前面已经假定控制变量的背景误差与其他变量是独立的, 当选取相对湿度 RH 作为控制变量时, 实际隐含着比湿与其他分析变量的相关性。以 $\mathbf{x}_s$ 表示状态变量, $\mathbf{x}_c$ 表示控制变量, 为简单起见, 略去风场, 并以 T 表示温度。则 $\mathbf{x}_s$ 与 $\mathbf{x}_c$ 分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s &= \begin{pmatrix} T \\ q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_c = \begin{pmatrix} T \\ \text{RH} \end{pmatrix} \\ J(\mathbf{x}_c) &= \tilde{J}(\mathbf{x}_s(\mathbf{x}_c)) \\ \nabla_{\mathbf{x}_c} J(\mathbf{x}_c) &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \mathbf{x}_c} \right)^T \nabla_{\mathbf{x}_s} \tilde{J}(\mathbf{x}_s) \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \mathbf{x}_c} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial T} & \frac{\partial T}{\partial \text{RH}} \\ \frac{\partial q}{\partial T} & \frac{\partial q}{\partial \text{RH}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial q}{\partial T} & \frac{\partial q}{\partial \text{RH}} \end{bmatrix} \quad (1.2.20)$$

矩阵中底下两个元素由以下关系求得

$$q = 0.01 q_s(T, p) \text{RH} \quad (1.2.21)$$

式中, q_s 是饱和比湿, 可以近似取气压 p 在分析中不变, 最后得到

$$\partial_T J = \partial_T \tilde{J} + 0.01RH \frac{\partial q_s}{\partial T} \partial_q \tilde{J} \quad (1.2.22)$$

$$\partial_{RH} J = 0.01q_s(T) \partial_q \tilde{J} \quad (1.2.23)$$

可见当控制变量选为相对湿度时,比湿的观测会对温度(或位势高度)的分析有影响。与之相反的情形是控制变量选为比湿,而观测量是相对湿度,相对湿度的观测也会对温度的分析有一定贡献。另外,相对湿度的量值分布是有界的($0 \leq RH \leq 100$),而比湿的量值分布范围相当大(甚至相差几个数量级)。由于影响因素较复杂,目前还没有足够的证据来帮助确定选取哪一种湿度变量对降水预报效果更好。有待做更多的试验。

1.2.5 数值求解方案

尽管在理论上可以由式(1.2.13)~式(1.2.15)求得 $\mathbf{x}^a$,但由于 $\mathbf{U}$ 的规模依然很大,实际求解需要进一步简化。为此,假定空间两点的背景误差协方差可以分解为只与两点的垂直坐标有关的垂直分量和只与两点的水平坐标有关的水平分量的乘积。这时 $\mathbf{B}_c$ 可以表示为

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{B}_h \otimes \mathbf{B}_v \quad (1.2.24)$$

式中,符号 $\otimes$ 表示克罗内克积(史荣昌,1996); $\mathbf{B}_h$ 与 $\mathbf{B}_v$ 分别是水平与垂直方向的协方差矩阵,且 $\mathbf{B}_h = \mathbf{U}_h \mathbf{U}_h^T$, $\mathbf{B}_v = \mathbf{U}_v \mathbf{U}_v^T$ 。结合式(1.2.12),容易证明 $\mathbf{U}$ 可以写成

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_h \otimes \mathbf{U}_v \quad (1.2.25)$$

将式(1.2.25)代入式(1.2.15),得到

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^b + \mathcal{P}(\mathbf{U}_h \otimes \mathbf{U}_v) \mathbf{w} \quad (1.2.26)$$

将 $\mathbf{w}$ 表示成一个矩阵的列展开,记为 $\mathbf{w} = cs(\boldsymbol{\Omega})$,这里 $\boldsymbol{\Omega}$ 的每一列代表了每一个水平格点上的控制变量的垂直分布,而每一行则表示了某个等压面上变量的水平分布。由克罗内克积的公式直接可得到

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^a &= \mathbf{x}^b + \mathcal{P}((\mathbf{U}_h \otimes \mathbf{U}_v) cs(\boldsymbol{\Omega})) \\ &= \mathbf{x}^b + \mathcal{P}(cs(\mathbf{U}_v \boldsymbol{\Omega} \mathbf{U}_h^T)) \\ &= \mathbf{x}^b + \mathcal{P}(cs(\mathbf{E} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{U}_h^T)) \\ &= \mathbf{x}^b + \mathcal{P}(rs(\mathbf{U}_h (\mathbf{E} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \boldsymbol{\Omega})^T))^T \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

式中, rs 是矩阵的行展开。 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是 $\mathbf{B}_v$ 的特征值构成的对角矩阵, $\mathbf{E}$ 是 $\mathbf{B}_v$ 的特征向量为列向量构成的矩阵,表示垂直方向的特征向量变换,可以证明 $\mathbf{E} \boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$ 是 $\mathbf{B}_v$ 的平方根 $\mathbf{U}_v$ 的一种解,推导中我们已经直接采用了这一表达式。一般说,模式的垂直分层数不超过 10^2 , $\mathbf{E}$ 的直接求解没有原则困难。但 $\mathbf{U}_h$ 是高阶矩阵,直接求取依然