HANGHAILEIZHUANYESHUXUE

航海类专业数学

任　英　主编

大连海事大学出版社

航海类专业数学

任 英 主编

大连海事大学出版社

内 容 简 介

本书的内容包括：函数、极限与连续，一元函数微分学及其应用，一元函数积分学及其应用，多元函数微分学及其应用，多元函数积分学及其应用，无穷级数，微分方程。

本书按照适当降低理论深度，突出微积分中实用的分析和运算方法，着重基本技能的训练而不过分追求技巧的思想，使之适应本书的使用要求。本书可作为成人高等教育以及高等职业教育教材。

图书在版编目(CIP)数据

航海类专业数学/ 任英主编．—大连 ：大连海事大学出版社，2008.9
ISBN 978-7-5632-2239-1

Ⅰ．航…　Ⅱ．任…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 151048 号

大连海事大学出版社出版

地址：大连市凌海路 1 号　邮政编码：116026　电话：0411-84728394　传真：0411-84727996

http://www.dmupress.com　E-mail:cbs@dmupress.com

大连力佳印务有限公司印装　大连海事大学出版社发行

2008 年 9 月第 1 版　2008 年 9 月第 1 次印刷

幅面尺寸：185 mm×260 mm　印张：15.5

字数：385 千　印数：1～2250 册

责任编辑：董玉洁　版式设计：冰　清

封面设计：晴　阳　责任校对：佳　南

ISBN 978-7-5632-2239-1　定价：26.00 元

前　言

本书是依据航海类高等教育自学考试大纲编写的。在本书的编写过程中，一方面我们针对航海类职业教育的特点，从为航海类专业基础知识做好铺垫的目的出发，按照循序渐进的原则，以学生易于接受的方式展开各章节的数学内容，适当降低纯理论难度，淡化复杂的理论推导，充分利用几何直观帮助学生理解相关概念和理论，尽量做到通俗易懂，易于启发，便于学生自学。另一方面，也注意恰当地运用严格的数学语言和推理，切实保证教材中知识结构的系统性与严谨性。在各章节后面配有习题以便于学生复习、巩固和掌握各章重点知识。

本教材是以航海类专业自学考试为对象，学时数为 40～62 学时的自考教材，教师可以根据不同专业特点进行取舍。本书主要内容包括：一元微积分学、多元微积分、无穷级数、微分方程。

本教材由任英主编并统稿，参加本教材编写的有王昕（第 1 章）、张会生（第 2 章）、任英（第 3 章）、王科伦（第 4 章）、杨艳冰（第 5 章）、王兰芝（第 6 章）、田晓娟（第 7 章），桑琳教授审阅了全书。

虽然编者在教材编写工作中非常认真、努力，但由于时间仓促，教材中难免有不妥和疏漏之处，恳请专家及广大师生和读者批评指正，以期不断完善。

编　者

2008 年 9 月

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

人们了解自然、研究事物总是通过量与量之间的关系进行的，量与量之间的一种重要关系就是函数关系. 函数是数学最基本的概念之一，是微积分学研究的对象，它刻画的是运动变化过程中变量之间相互联系相互依赖的关系；极限是刻画在变化过程中一个变量随另一个变量变化的趋势，它既是一个重要概念，又是研究微积分的重要工具和思想方法；连续性是函数的重要性质，它是大千世界广泛存在的渐变现象的客观反映和数学描述，连续函数是微积分研究的主要对象. 因此，函数、极限与函数的连续性是微积分的理论基础. 本章主要介绍函数、极限与连续的基本概念与性质.

§1.1　函数

一、常量与变量

在自然界和科学技术领域，常常会遇到各种不同的量，其中有些量在整个过程中不发生变化，既保持固定的数值，这种量称为常量，例如圆周率 π，重力加速度 g 等等；还有一些量在整个过程中是变化的，也就是可以取不同值，这种量称为变量，如圆的半径 r，一天中海水的温度 T，船舶在整个航程中的航行速度 v 等等. 习惯上用 a,b,c 等表示常量，用 x,y,z 等表示变量.

二、区间与邻域

1. 区间

一元微积分中常用的数集及其简明表示符号：

开区间：$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$；

闭区间：$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$；

左半开区间（或右半闭区间）$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$；

右半开区间（或左半闭区间）$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$.

上述四个区间的长度都是有限长的，长度为 $b-a$，因此把它们统称为有限区间，a,b 分别叫做这些区间的左端点与右端点. 上述区间在数轴上表示如图 1-1.

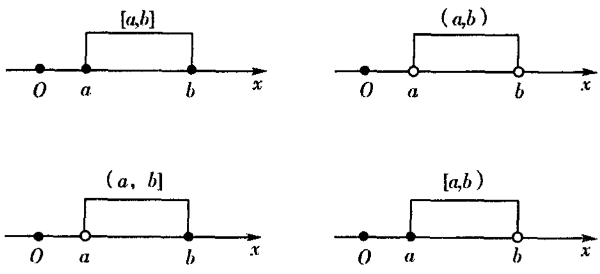

图 1-1

下列区间统称为无穷区间(图 1-2):

$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$;

$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$;

$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$;

$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$;

$(-\infty,+\infty)=R$.

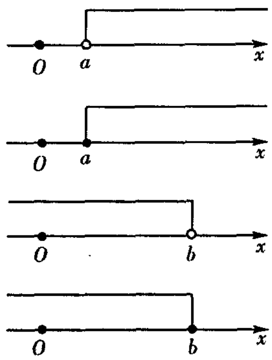

图 1-2

2. 邻域

实数集与实数轴上的点是一一对应的,因此实数 x_0 也可以称为数轴上的点 x_0. 有时要讨论数轴上某点附近的性质,为此引入邻域的概念.

设 $x_0\in R,\delta>0$,称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域,记为 $U(x_0,\delta)$,即

$$U(x_0,\delta)=\{x||x-x_0|<\delta\}$$

称为点 x_0 邻域的中心,δ 称为邻域的半径(图 1-3).

开区间 $(x_0-\delta,x_0)$,$(x_0,x_0+\delta)$ 分别称为点 x_0 的左邻域和右邻域,而

$$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$$

称为点 x_0 的去心邻域(图 1-4),记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}.$$

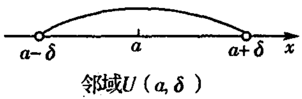

图 1-3

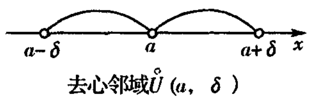

图 1-4

三、函数的概念及其表示法

通常,一些客观事物反映出的变量往往不是孤立的,它们常常相互依赖并按一定规律变化,这就是变量之间的函数关系,让我们先看几个例子.

例 1 圆的面积公式 $S=\pi r^2$ 给出了面积 S 与圆的半径 r 之间的关系,圆的半径 r 确定了,圆的面积 S 也就确定了.

例 2 自由落体运动中,物体下落的时间 t 与下落的距离 h 都是变量,它们之间满足关系 $h=\frac{1}{2}gt^2$,其中 g 是重力加速度,若物体落地时刻为 T,则当 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任取一值时,按上式确定的规律,h 有确定的一个值与之对应.

例 3 厦门港是我国东南沿海的重要港口,下表给出了厦门港 1995 至 2003 年集装箱吞吐量随年份变化的关系:

年份	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
吞吐量(万 TEU)	30.9	40.0	54.6	67.0	84.9	108.0	129.3	175.4	233.0

显然,表中给出了年份与集装箱吞吐量之间的对应关系.

从以上三个例子可以看出,用公式、表格或图形都能表示两个变量之间的依赖关系,这种依赖关系称为函数关系.下面给出函数的定义.

定义 1　设 x 与 y 是两个变量，若对于 x 的每一个取值，按照某一规则 f 都有一个确定的 y 值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，自变量 x 的所有取值的集合称为函数的定义域，记为 D，因变量 y 的相应的值的集合称为函数的值域，记为 $R(f)$.

平面直角坐标系中的点集 $\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形，一个函数的图形通常是一条曲线，$y=f(x)$ 也叫做这条曲线的方程.

在函数定义中，最重要的是定义域与对应规则，给出一个函数时，必须同时说明这两个要素. 如果两个函数的定义域相同，对应规则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

如果函数关系是由一个公式表示的，则约定函数的定义域是使公式有意义的一切实数构成的集合，这样的定义域称为函数的自然定义域. 例如 $f(x)=\sqrt{x}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$；$f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+1}$ 的定义域为 $(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

如果函数是由实际关系确定的，则其定义域要由问题本身的意义来确定. 例如自由落体运动中，物体下落的距离 h 是下落时间 t 的函数：$h=\dfrac{1}{2}gt^2$. 如果开始下落的时刻是 $t=0$，落地时刻为 T，则该函数的定义域为 $[0,T]$. 若不考虑该问题的物理背景，函数 $h=\dfrac{1}{2}gt^2$ 的定义域为全体实数 $(-\infty,+\infty)$.

函数的表示法主要有三种：解析法（公式法）、表格法、图形法.

下面再举出一些函数的例子，以便加深对函数概念的理解.

例 4　常量函数

$$y=c$$

的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R(f)=\{c\}$，其图形如图 1-5 所示.

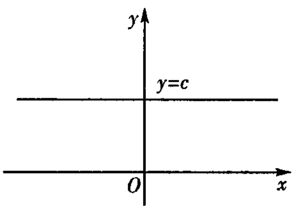

图 1-5

例 5　函数 $y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 称为符号函数，它的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R(f)=\{-1,0,1\}$，其图形如图 1-6 所示.

例 6　函数 $y=f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R(f)=[0,+\infty)$，它的图形如图 1-7 所示，称该函数为绝对值函数.

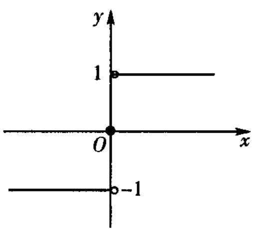

图 1-6

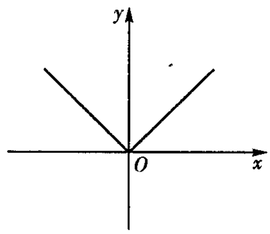

图 1-7

四、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，如果存在确定的常数 $M>0$，使得对于一切 $x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界. 如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 D 上无界.

在前面所列的函数中，例 4、例 5 是有界函数，例 6 是无界函数. 又如 $y=\sin x$ 在$D=(-\infty,+\infty)$ 是有界函数，因为

$$|\sin x|\leqslant 1$$

对任意实数都成立. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$内是无界函数，在$[1,2]$上却是有界函数，因为在$[1,2]$上，显然有$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 定义域为 D，区间 $I\in D$，如果对于 I 上的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的，如图 1-8 所示；如果对于 I 上的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的，如图 1-9 所示. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

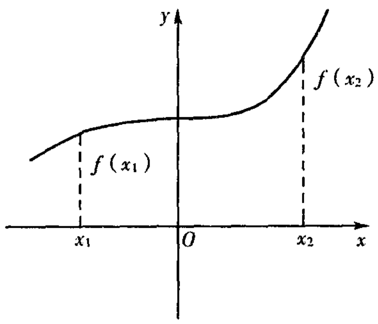

图 1-8

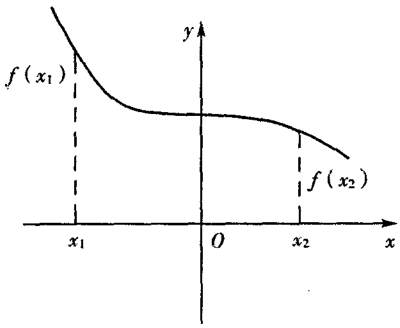

图 1-9

例 7 函数 $y=3x-1$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的，$f(x)=-x^3$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$内是单调减少的. $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0]$上单调递减，而在区间$[0,+\infty)$上却单调递增，所以 $y=x^2$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数.

函数的单调性是函数在一个有定义区间内的特征性质，在不同的区间上可能有不同的单调性. 即便在各个不同的区间内单调性相同，但在整个定义域内仍有可能不单调. 例如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，如图 1-10 所示，它在$(-\infty,0)$或$(0,+\infty)$上分别单调递减，但在整个定义域内，它不是单调函数.

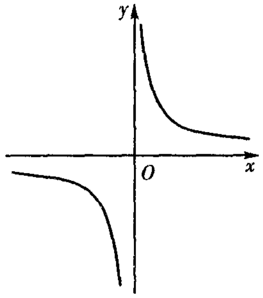

图 1-10

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，即对 $\forall x\in D$，有 $-x\in D$.

(1) 若对 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；

(2) 若对 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

从几何特征来说，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称(如图 1-11).

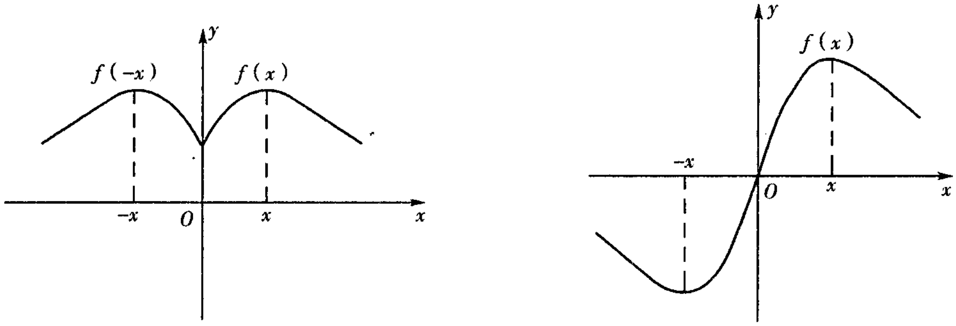

图 1-11

例 8 $f(x)=x^2$ 为偶函数，因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$. 同理 $y=x^4$, $y=\cos x$ 也都是偶函数；再如 $f(x)=x^3$ 为奇函数，因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$. 同理 $y=\sin x$, $y=\tan x$ 都是奇函数. 而 $f(x)=x^3+1$ 既不是偶函数，也不是奇函数，因为 $f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1\neq f(x)$，且 $f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1\neq -f(x)$，由此可知，不是任何函数都有奇偶性.

对于定义域相同的函数来说，有如下结论：

(1) 偶(奇) 函数的和为偶(奇) 函数；

(2) 两个偶(奇) 函数的积为偶函数；

(3) 一偶一奇两个函数的积为奇函数.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 定义域为 D，如果存在一个正数 l，使得对于任一 $x\in D$，有 $x\pm l\in D$，且 $f(x\pm l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $\sin x$, $\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$, $\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

五、反函数与复合函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 定义域为 D，值域为 $R(f)$，如果对于每一个 $y\in R(f)$，都有唯一的 $x\in D$ 与之对应，且满足 $f(x)=y$，则得到一个新的以 y 为自变量、x 为因变量的函数，称这个函数为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$. 相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

当我们把直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像描在同一直角坐标系下时，我们会发现，两图完全重合.

在数学上，我们总习惯用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，为了满足习惯记法的需要，最后我们会把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 记为 $y=f^{-1}(x)$. 这样在几何上，直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例如 $y=f(x)=x^2$, $x\in[0,+\infty)$

$y=f^{-1}(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$(如图 1-12).

例 9 求函数 $y=x^3+1$ 的反函数.

解 由 $y=x^3+1$,得 $x^3=y-1$,两边开立方得

$$x=\sqrt[3]{y-1}.$$

故得所求反函数为

$$y=\sqrt[3]{x-1}.$$

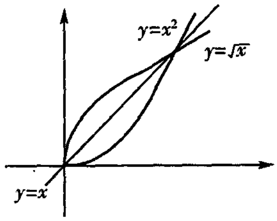

图 1-12

例 10 求函数 $y=1-e^{\frac{x-1}{2}}$ 的反函数.

解 由原式得 $e^{\frac{x-1}{2}}=1-y$,两边取对数得 $\frac{x-1}{2}=\ln(1-y)$,即 $x=1+2\ln(1-y)$.

故所求反函数为 $y=1+2\ln(1-x)$.

2.复合函数

设函数 $y=f(u)$ 定义域为 D_1,函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义,且 $R(g)\subset D_1$,则下式确定的函数 $y=f[g(x)],x\in D$ 称为由 $u=g(x)$ 和 $y=f(u)$ 构成的复合函数,它的定义域为 D,变量 u 称为中间变量,x 为自变量.

例 11 设 $y=f(u)=3\ln u,u=g(x)=1-x^2$,求复合函数 $y=f[g(x)]$ 及其定义域.

解 复合函数 $y=f[g(x)]=3\ln(1-x^2)$,虽然 $u=g(x)=1-x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,但它不是 $y=f[g(x)]=3\ln(1-x^2)$ 的定义域,因为 $y=3\ln u$ 的定义域 D_1 为 $(0,+\infty)$,即 u 必须大于零,因此 $1-x^2>0$,即 $-1<x<1$,所以 $y=f[g(x)]$ 的定义域为 $(-1,1)$.

例 12 设 $f(x)=\frac{2}{2-x}$,求 $f[f(x)]$.

解 $f[f(x)]=\frac{2}{2-f(x)}=\frac{2}{2-\frac{2}{2-x}}=\frac{2-x}{1-x}$.

它的定义域是 $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

例 13 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2},g(x)=\sqrt{x^2+1}$,求 $f[g(x)],g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=\frac{1}{1+[g(x)]^2}=\frac{1}{2+x^2}$;

$$g[f(x)]=\sqrt{[f(x)]^2+1}=\sqrt{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{x^4+2x^2+2}}{1+x^2}.$$

六、函数的四则运算

设函数 $f(x),g(x)$ 都在 D 上有定义,则我们可以定义这两个函数的下列四则运算:

和(差)$f\pm g$:$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x),x\in D$;

积 $f\cdot g$:$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),x\in D$,特别地 $(kf)(x)=kf(x)$;

商 $\frac{f}{g}$:$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},x\in D$ 且 $g(x)\neq 0$.

例 14 多项式 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是由幂函数经过数乘运算及求和运算得到的,而有理函数

$$R(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$$

则是由两个多项式通过求商运算得到的.

七、初等函数

1. 基本初等函数

在初等数学中已经讲过以下几类函数:

幂函数:$y = x^{\mu}$($\mu \in R$ 是常数);

指数函数:$y = a^{x}$($a > 0$ 且 $a \neq 1$);

对数函数:$y = \log_{a}x$($a > 0$ 且 $a \neq 1$),特别当 $a = \mathrm{e}$ 时,记为 $y = \ln x$;

三角函数:如 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 等;

反三角函数:如 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$ 等.

以上五类函数统称为基本初等函数(图 1-13,图 1-14,图 1-15,图 1-16).

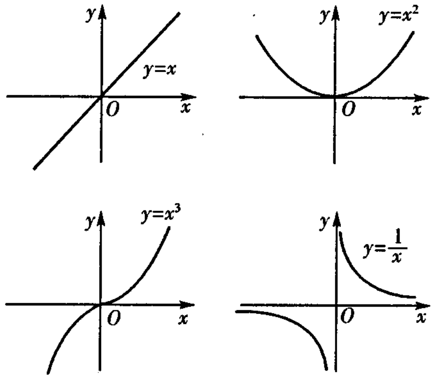

图 1-13

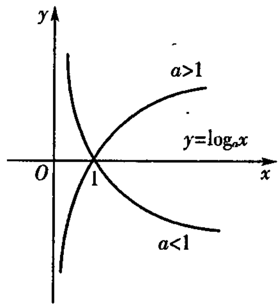

图 1-14

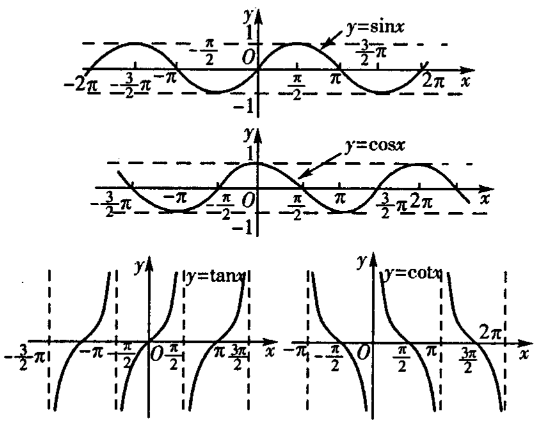

图 1-15

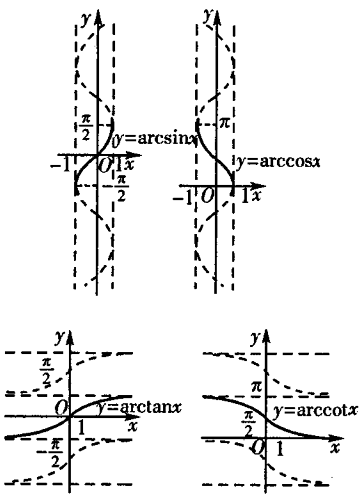

图 1-16

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成的,能用一个式子表示的函数称为初等函数.

例如 $y = \sqrt{1 - x^2}, y = \sin^2 x, y = \sqrt{\cot \dfrac{x}{2}}$ 等都是初等函数.

在本课程中讨论的函数绝大多数都是初等函数，但也会出现一些非初等函数，分段函数就是常见的非初等函数. 所谓分段函数就是在函数的定义域的不同范围内要用不同的式子来表示对应关系的函数，例如：$f(x) = |x|$，$f(x) = \mathrm{sgn}x$ 等.

习题 1.1

1. 求下列各函数的自然定义域：

(1) $y = \sqrt{3x+2}$；　(2) $y = \dfrac{1}{1-x}$；

(3) $y = \dfrac{1}{x} + \sqrt{1-x^2}$；　(4) $y = \dfrac{2x}{x^2+3x+2}$；

(5) $y = \arcsin(x-3)$；　(6) $y = \sqrt{3-x} - \arctan\dfrac{1}{x}$；

(7) $y = \ln(2x+1)$；　(8) $y = e^{\frac{1}{x}}$.

2. 判定下列各对函数是否相同：

(1) $y = x$ 与 $y = \dfrac{x^2}{x}$；　(2) $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$；

(3) $y = 1$ 与 $y = \sin^2 x + \cos^2 x$；　(4) $y = \dfrac{1}{x-1}$ 与 $y = \dfrac{x+1}{x^2-1}$.

3. 由甲地至乙地行李托运费规定如下：不超过 50 公斤时，每公斤收费 0.45 元；超过 50 公斤时，超重部分每公斤收费 0.75 元. 写出行李重量 x 与费用 y 之间的函数关系.

4. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数？

(1) $f(x) = x^2(1-x^2)$；　(2) $f(x) = \sin x - \cos x + 1$；

(3) $f(x) = \dfrac{\sin^4 x\cos x}{1+x^2}$；　(4) $f(x) = \sqrt{1-x+x^2} - \sqrt{1+x+x^2}$；

(5) $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　(6) $f(x) = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$.

5. 下列函数中哪些是周期函数，对于周期函数，指出其周期：

(1) $y = \cos(x-2)$；　(2) $y = \cos 4x$；　(3) $y = 1 + \sin\pi x$；

(4) $y = x\sin x$；　(5) $y = \sin^2 x$；　(6) $y = \sin 3x + \tan x$.

6. 求下列函数的反函数：

(1) $y = \sqrt[3]{x+1}$；　(2) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$；　(3) $y = 2\sin 3x$；　(4) $y = e^{x+1} - 2$.

7. 下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求出这些函数分别对应于给定自变量 x_1, x_2 的函数值：

(1) $y = u^2, u = \sin x, x_1 = \dfrac{\pi}{6}, x_2 = \dfrac{\pi}{3}$；　(2) $y = \sin u, u = 2x, x_1 = \dfrac{\pi}{8}, x_2 = \dfrac{\pi}{4}$；

(3) $y = \sqrt{u}, u = 1 + x^2, x_1 = 1, x_2 = 2$；　(4) $y = u^2, u = e^x, x_1 = 0, x_2 = -1$.

8. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

(1) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2+1}$；　(2) $y = 3^{(\ln x+1)^2}$；

(3) $y=\sin^2(3x+1)$；　　(4) $y=\sqrt[3]{\log_a\cos^2 x}$.

9. 对下列每组函数求 $f+g$ 和 $f\cdot g$，并写出它们的定义域：

(1) $f(x)=x+1, g(x)=x^2+2x-1$；　　(2) $f(x)=\frac{1}{x-1}, g(x)=\frac{1}{2x+1}$；

(3) $f(x)=\sqrt{x+1}, g(x)=\sqrt{4-x}$；　　(4) $f(x)=\sqrt{x^2+1}, g(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$.

10. 证明：

(1) 两个奇函数的和是奇函数，两个偶函数的和是偶函数；

(2) 两个奇函数或两个偶函数的乘积是偶函数，一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数；

(3) 两个奇函数的复合是奇函数，两个偶函数或一个奇函数与一个偶函数的复合是偶函数.

11. 对下列函数计算 $f(a+h)-f(a)$，并化简：

(1) $f(x)=3x+2$；　(2) $f(x)=x^2$；　(3) $f(x)=\frac{1}{x}$；　(4) $f(x)=\frac{1}{x+1}$.

12. 求下列函数的定义域与值域，并画出函数图形：

(1) $y=\sqrt{4-x^2}$；　(2) $y=|x|+x$；　(3) $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x<-1,\\ 3-x, & x\geqslant -1\end{cases}$.

§1.2　数列的极限

极限是微积分学中一个基本概念，微积分学的许多概念都是由极限引入的，因此它在微积分学中占有非常重要的地位，所以理解极限概念与掌握极限运算是非常重要的.

一、数列的概念

定义1　如果按照某种规则，对于每个 $n\in N^+$，对应着一个确定的实数 x_n，这些实数 x_n 按照下标 n 从小到大排列得到的一个序列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

叫做数列，简记为数列 $\{x_n\}$，或 $\{x_n\}_1^\infty$. 数列中的每一个数叫做数列的项，第 n 项 x_n 称为该数列的一般项. 例如：

(1) $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots$；

(2) $2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots$；

(3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$；

(4) $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots$；

(5) $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$

都是数列的例子，它们的一般项依次为

$$\frac{n+1}{n}, 2^n, \frac{1}{2^n}, (-1)^n, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}.$$

在几何上，数列$\{x_n\}$可以看作数轴上的一个动点，它依次取数轴上的点$x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots$

考察以上数列，当n无限增大时，它们的性态各不相同. 数列(1)与(3)的一般项随着n的无限增大，分别无限地逼近常数1和0；数列(4)的一般项随着n的增大，往返跳跃地取1与-1两个数值；数列(2)的一般项随着n的增大将无限增大.

我们关心的是，当n无限增大时，x_n的变化趋势怎样，特别是x_n是否可与某个确定的常数无限接近.

如果当n无限增大时，数列x_n的值无限地接近于确定的数值a，那么a叫做数列x_n的极限. 下面给出数列极限的定义.

二、数列极限的定义

定义 2 设$\{x_n\}$为一数列，如果存在常数a，对于任意给定的正数ε(不论它有多么小)，总存在正整数N，使得当$n > N$时，不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立，那么就称常数a是数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛于a，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a, (n \to \infty).$$

如果不存在这样的常数a，就说数列$\{x_n\}$没有极限，或者说$\{x_n\}$是发散的，习惯上也说$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在.

下面我们通过一个例题分析来加深对这个概念的理解.

设有数列$x_n = \dfrac{n+1}{n}$，不难看出，x_n与1的距离$|x_n - 1| = \dfrac{1}{n}$可以变得任意小，只要n充分大，比如：要使得$|x_n - 1| = \dfrac{1}{n} < 0.01$，就可以找到$N = 100$，当$n > 100$时，其后所有的项$x_{101}, x_{102}, x_{103}, \cdots$与1的距离都小于0.01(这就是说，大于100的$n$就够大了)；要使得$|x_n - 1| = \dfrac{1}{n} < 0.001$，可以找到$N = 1000$，当$n > 1000$(大于1000的$n$就够大了)，其以后所有的项$x_{1001}, x_{1002}, x_{1003}, \cdots$与1的距离都小于0.001.

例 1 利用定义证明$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.

证 $|x_n - a| = \left|\dfrac{n+1}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n}$，

为了使$|x_n - a|$小于任意给定的正数ε，只要

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \text{ 或 } n > \frac{1}{\varepsilon},$$

所以$\forall \varepsilon > 0$，取$N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当$n > N$时，就有

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

例 2 设$|q| < 1$，证明等比数列$q, q^2, q^3, \cdots, \cdots, q^n, \cdots$收敛于0.

证 $|x_n - a| = |q^n - 0| = |q^n|$，

为了使$|x_n - a|$小于任意给定的正数ε，只要

$$|q^n| = |q|^n < \varepsilon \text{ 或 } n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}.$$

所以 $\forall \varepsilon > 0$,取 $N = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right] + 1$,则当 $n > N$ 时,就有

$$|q^n - 0| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

三、数列极限的几何解释

数列$\{x_n\}$收敛于 a 的几何意义是,对于任意给定的正数 ε(不论它有多么小),总存在正整数 N,从第 N 项以后的项即 $x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}\cdots(n > N)$ 都落在点 a 的 ε 邻域$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$内,而前面的有限项(最多 N 项)可以不在$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$内,如图 1-17 所示.

也就是说,若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,那么数列$\{x_n\}$对应的点非常密集地"堆积"在点 a 的周围.(图 1-17)

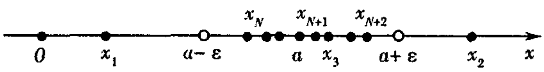

图 1-17

四、数列极限的性质

定理 1 (极限的唯一性)若数列$\{x_n\}$收敛,则其极限值唯一.

也就是说,如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$,则必有 $a = b$.

证明 反证法.

设数列$\{x_n\}$收敛,但极限不唯一,即$\{x_n\}$有极限 a 和 b,但 $a \neq b$. 不妨设 $a > b$,取 $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. 则根据极限定义及$\{x_n\}$以 a 为极限可知,$\exists N_1$,当 $n > N_1$ 时,有

$$|x_n - a| < \frac{a-b}{2},$$

而

$$a - \frac{a-b}{2} < x_n < a + \frac{a-b}{2},$$

从而有

$$x_n > \frac{a+b}{2}.$$

由于$\{x_n\}$以 b 为极限,对上述 $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$,存在 N_2. 当 $n > N_2$ 时,有

$$|x_n - b| < \frac{a-b}{2},$$

而

$$b - \frac{a-b}{2} < x_n < b + \frac{a-b}{2},$$

从而有

$$x_n < \frac{a+b}{2}.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，不等式 $x_n>\frac{a+b}{2}$，$x_n<\frac{a+b}{2}$ 同时成立，这显然是矛盾的，因此收敛数列的极限是唯一的。

定义 3 对于数列 $\{x_n\}$，如果存在着正数 M，使得对于一切 x_n 都满足不等式 $|x_n|\leqslant M$，则称数列 $\{x_n\}$ 是有界的；如果这样的正数 M 不存在，就说数列 $\{x_n\}$ 是无界的.

定理 2 （收敛数列的有界性）若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则一定存在 $M>0$，使得对任意的 n，有 $|x_n|\leqslant M$. 即收敛数列必有界.

证明 设 $\{x_n\}$ 收敛于 a，根据极限定义，对于 $\varepsilon=1$，存在 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<1$ 成立，于是，当 $n>N$ 时，有 $|x_n|=|(x_n-a)+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|$.

取 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|\}$，则对于一切 n 有 $|x_n|\leqslant M$. 所以 $\{x_n\}$ 有界.

这是数列收敛的必要条件，如果已知一个数列无界，则它一定不收敛. 比如：数列 $\{2^n\}$ 是无界数列，所以它是发散的. 反之，不一定成立，即数列有界，它不一定收敛. 比如：数列 $(-1)^n$ 有界，但它无极限.

定理 3 （收敛数列的保号性）设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $a>0$（或 $a<0$），则一定存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有不等式 $x_n>0$（或 $x_n<0$）恒成立.

习题 1.2

1. 观察下列数列的一般项的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$； (2) $\left\{\frac{n+2}{n+1}\right\}$； (3) $\left\{(-1)^n\frac{1}{2n}\right\}$； (4) $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$.

2. 根据数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

3. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

§1.3 函数的极限

本节研究函数的极限，由于数列 $\{x_n\}$ 是由整标函数 $f(n)$ 的全体函数值做成的，将数列的极限加以推广，便得到 $x\to\infty$ 时函数的极限.

一、当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

1. 当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限的概念

如果 $x>0$，且 x 无限增大，记为 $x\to+\infty$；如果 $x<0$，且 $|x|$ 无限增大，记为 $x\to-\infty$；如果 x 为任意实数，且 $|x|$ 无限增大，记为 $x\to\infty$.

如果在 $x\to\infty$ 的过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限地接近于一个固定常数 A，那么就说当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 以 A 为极限，精确地说，就是

定义 1 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在着正数 X，使得当 x 满足不等式 $|x|>X$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式