安徽省高等学校“十一五”省级规划教材

数学建模

Mathematical Modeling

杨桂元 黄己立／主编

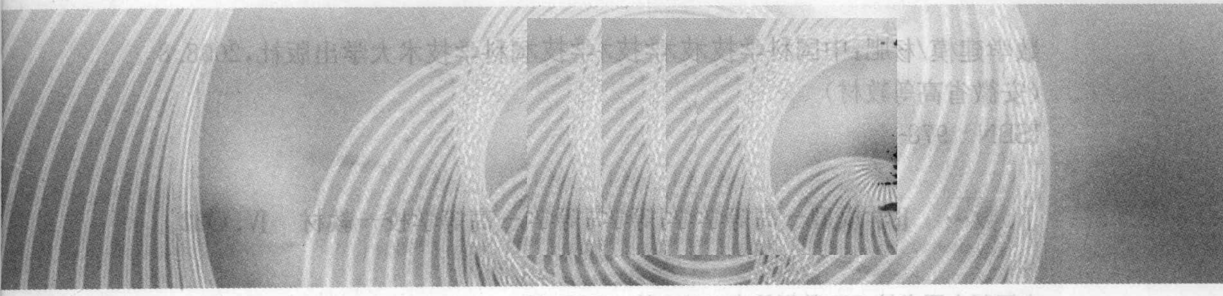
中国科学技术大学出版社

安徽省高等学校“十一五”省级规划教材

数学建模

Mathematical Modeling

杨桂元 黄已立/主编



中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

全书分5章：第1章，线性规划模型及应用；第2章，模糊数学模型及应用；第3章，层次分析模型及应用；第4章，微分方程模型及应用；第5章，图论模型及应用。

本书可作为高等院校各专业本科生及相关专业研究生“数学建模”课程教材，特别适用于数学建模竞赛培训，也可供工程技术人员和经济管理人员学习和参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模/杨桂元，黄己立主编．—合肥：中国科学技术大学出版社，2008.8
(安徽省高等学校“十一五”省级规划教材)
ISBN 978-7-312-02340-8

Ⅰ.数…　Ⅱ.①杨…②黄…　Ⅲ.数学模型—高等学校—教材　Ⅳ.O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第111968号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号，邮编：230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷　合肥晓星印刷有限责任公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710 mm×960 mm　1/16
印张　17.25
字数　336千
版次　2008年8月第1版
印次　2008年8月第1次印刷
定价　28.00元

前　言

本教材是作者在多年来为省内部分高校理工类、财经管理类本科生开设“数学建模”课程和数学建模竞赛培训的自编讲义和教学实践基础上，加上多年指导数学建模竞赛和对数学建模方法的研究，参考国内外相关资料反复修改而成。

围绕数学建模竞赛进行的一系列活动，对大学生综合素质和创新能力的培养起到了很大的作用。数学建模的教学、培训、集训和竞赛，通过对学生进行“补课”，补充一些在课堂教学中没有的内容，如最优化方法、模糊数学方法、图论与优化方法、多目标决策方法、微分方程与差分方程建模方法、建模与优化软件的应用等，使学生的收获很大，分析问题、解决问题的能力和创新能力大为增强。特别是经过参赛的“洗礼”，培养了参赛学生的运用学过的数学知识和计算机(包括选择合适的数学软件)分析和解决实际问题的能力，面对复杂事物的想象力、洞察力、创造力和独立进行研究的能力，团结合作精神和进行协调的组织能力，勇于参与的竞争意识和不怕困难、奋力攻关的顽强意志，查阅文献、收集资料及撰写科技论文的文字表达的能力。数学建模本身就是一个创造性的思维过程。从数学建模的教学内容、教学方法，到数学建模竞赛活动的培训等，都是围绕着培养创新人才这个核心内容进行的。其内容取材于实际，方法结合于实际，结果应用于实际。“创新是一个民族进步的灵魂，是国家兴旺发达的不竭动力”，通过数学建模的教学和培训，有利于培养学生的创造性的思维能力、创造性的洞察能力和创造性的科研能力等，这些都是创新人才所必备的能力。知识创新、方法创新、结果创新、应用创新，无不在数学建模的过程中得到体现，这正是数学建模的创新作用所在。

本书在内容的处理上，遵循如下原则：强调实用性、逻辑性和学生的“可接受性”。本着突出建模思想、重视基本概念、强化解题方法的原则，配合数学软件的介绍和使用，将数学建模过程中解决问题的“算法”的基本理论和数学软件相结合；强调实用性，结合一些大学生数学建模竞赛题目，加强建模求解全过程的基本训练，提高教材的可读性。另外，教材中各章内容相对独立，便于教师选用和学生阅读，以最优化模型为基础，适当选择了一些能反映数学发展新方向的综合性实际问题作为案例。

全书分5章：第1章，线性规划模型及应用；第2章，模糊数学模型及应用；第3

章，层次分析模型及应用；第 4 章，微分方程模型及应用；第 5 章，图论模型及应用。

本书由杨桂元、黄己立担任主编。安徽财经大学杨桂元编写第 1 章，李柏年编写第 2 章，唐晓静编写第 3 章，李天胜、汪凯编写第 4 章，安徽建筑工业学院黄己立、欧剑编写第 5 章。由杨桂元、黄己立总纂定稿。

本书可作为高等院校各专业本科生及相关专业研究生"数学建模"课程教材，特别适用于数学建模竞赛培训，也可供工程技术人员和经济管理人员学习和参考。

本书是安徽省高等学校"十一五"省级规划教材，也是安徽省高等学校省级教学研究项目"数学建模与大学生创新能力培养研究"(项目编号：2007jyxm282)的阶段性成果。安徽财经大学和安徽建筑工业学院各级领导和各位同仁给予了大力支持；在本书的编写过程中，编者参考了国内外大量的相关文献资料，在此一并表示衷心的感谢。

受编写者学识所限，教材中不当之处在所难免，敬请读者不吝批评指正。

作 者

2008 年 2 月 1 日

目　录

第 1 章　线性规划模型及应用

1-1　线性规划问题的数学模型及其解的性质

1-1-1　线性规划问题的数学模型

引例　某工厂生产一种型号的机床，每台机床上需要 2.9 m、2.1 m 和 1.5 m 长的三种轴各一根. 这些轴需要用同一种圆钢制作，圆钢的长度为 7.4 m. 如果要生产 100 台机床，应如何下料，才能使得用料最省.

分析　对于每一根长为 7.4 m 的圆钢，截成 2.9 m、2.1 m 和 1.5 m 长的毛坯，可以有若干种下料方式. 把它截成我们需要的长度，有 8 种下料方式，如表 1-1 所示.

表 1-1　下料方式及每种类型的数目

长度 \ 下料方式	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	需要量
2.9 m	2	1	1	1	0	0	0	0	100
2.1 m	0	2	1	0	3	2	1	0	100
1.5 m	1	0	1	3	0	2	3	4	100
余料	0.1	0.3	0.9	0	1.1	0.2	0.8	1.4	

下料方式是按从大到小、从长到短的顺序考虑的.

(1) 若考虑用 B_3 方式下料，需要用料 100 根.

(2) 若采用木工师傅的下料方法：先下最长的，再下次长的，最后下短的，如表 1-2 所示. 动一下脑筋，就可以节约用料 4 根，降低成本，但这仍然不是最好的下料方法.

表 1-2 木工师傅的下料情况

下料方式	下料根数	2.9 m 根数	2.1 m 根数	1.5 m 根数
B_1	50	100	0	50
B_5	33	0	99	0
B_8	12	0	0	48
B_6	1	0	2	2
合计	96	100	101	100

(3) 如果要我们安排下料，暂不排除 8 种下料方式中的任何一种，可通过建立数学模型(线性规划数学模型)进行求解，寻找最好的下料方案. 设用 B_1、B_2、B_3、B_4、B_5、B_6、B_7、B_8 方式下料的根数分别为 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6、x_7、x_8，则可以建立线性规划数学模型：

$$\min S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 100 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geqslant 100 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 \geqslant 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geqslant 0 \end{cases}$$

用 LINDO 软件求解，程序如下：

```
min   x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8
st
2x1+x2+x3+x4>=100
2x2+x3+3x5+2x6+x7>=100
x1+x3+3x4+2x6+3x7+4x8>=100
end
```

根据输出结果，得 $x_1=10, x_2=50, x_3=0, x_4=30, x_5=0, x_6=0, x_7=0, x_8=0$，$\min S=90$；或 $x_1=40, x_2=20, x_3=0, x_4=0, x_5=0, x_6=30, x_7=0, x_8=0$，$\min S=90$. 这就是最优的下料方案.

下料问题是经济管理中经常要遇到的问题，引例是条材下料问题，此外还有板材下料问题(如五金厂生产保险柜，裁缝下料，服装厂下料等)和更复杂的下料问题，请考虑一下，下料方式能不能用计算机来设计得更合理？本问题能不能将目标函数确定为余料最少？这都是值得读者思考的问题.

在生产管理和经营活动中，经常要考虑这样一类问题：如何合理地利用有限的人力、物力和财力等资源，以得到最好的经济效果. 下面分 5 个方面介绍典型的建立线性规划模型的方法.

1. 合理下料问题

例 1　某工厂生产一种型号的机床，每台机床上需要 2.9 m、2.1 m 和 1.5 m 长的三种轴分别为 1 根、2 根、1 根. 这些轴需要用同一种圆钢制作，圆钢的长度为 7.4 m. 如果要生产 100 台机床，应如何下料，才能使得用料最省.

解　关于下料方式的分析如引例，下料方式见表 1-1.

设用 B_1、B_2、B_3、B_4、B_5、B_6、B_7、B_8 方式下料的根数分别为 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6、x_7、x_8，则可以建立问题的线性规划数学模型：

$$\min S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 100 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geqslant 200 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 \geqslant 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geqslant 0. \end{cases}$$

读者可以利用 LINDO 软件求解，得 $x_1=0$，$x_2=80$，$x_3=0$，$x_4=20$，$x_5=0$，$x_6=20$，$x_7=0$，$x_8=0$，$\min S=120$.

一般下料问题：设用某种材料（条材或板材）下零件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的毛坯，根据过去的经验，在一件原料上有 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 共 n 种不同的下料方式，每种下料方式（当然是合理的下料方式）可得各种毛坯个数及每种零件的需要量如表 1-3 所示. 问：应怎样安排下料方式，才能使得既满足需要，又使得用料最省？

表 1-3　一般下料问题的基本数据

下料方式 / 零件规格	B_1	B_2	…	B_n	零件需要量
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m

设用 B_j 方式下料的数量为 $x_j\ (j=1,2,\cdots,n)$，则可建立线性规划问题数学模型：

$$\min S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \geqslant a_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \geqslant a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n \geqslant a_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

或者

$$\min S = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \geqslant a_i & (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 & (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

建立线性规划问题数学模型的基本要素：

① **决策变量** 明确问题中有待确定的未知变量(称为决策变量)，用数学符号来表示.

② **约束条件** 明确问题所有的限制条件(约束条件)，用决策变量的一组表达式(线性等式或线性不等式)来表示.

③ **目标函数** 明确解决问题的目的，并用决策变量的线性函数(称为目标函数)表示，按问题的要求，求其最大值或最小值.

我们把决策变量、约束条件、目标函数称为线性规划数学模型的三个基本要素.

从我们所建立的数学模型来看，目标函数是决策变量的线性函数，约束条件是决策变量的线性等式或不等式，因此我们称此为线性规划问题 Linear Programming(简记为 LP).

2. 资源合理利用(资源的最优配置)问题

例 2 某工厂要安排一种产品的生产，该产品有Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ 3 种型号. 生产这种产品均需要两种主要资源：原材料和劳动力. 每件产品所需资源数、现有资源数量以及每件产品的出售价格如表 1-4 所示. 假定该产品只要生产出来即可销售出去，试确定这三种产品的日产量以使总产值最大.

表 1-4 资源利用问题的数据

资源＼产品	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	现有资源数量
原材料(kg)	4	3	6	120 kg
劳动力(h)	2	4	5	100 h
价格(元)	4	5	3	

解 考虑三个要素：① 决策变量，② 约束条件，③ 目标函数.

设该厂计划日产产品Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ的数量分别为 x_1、x_2、x_3 件，则可建立线性规划数学模型：

$$\max S = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leqslant 120 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 100 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

通过 LINDO 求解,程序为:

```
max    4x1+5x2+3x3
st
4x1+3x2+6x3<=120
2x1+4x2+5x3<=100
end
```

得到最优解:$x_1=18, x_2=16, x_3=0, \max S=152$.

一般地,用 m 种原料 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 可以生产 n 种产品 $B_1, B_2, \cdots, B_n$. 现有原料数(可利用资源数量)、每单位产品所需原料数 c_{ij}(消耗系数)及每单位产品可得利润 $b_j (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$ 如表 1-5 所示. 问:应如何组织生产才能使总利润最大?

表 1-5　一般资源利用问题的数据

营养＼饲料	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	现有原料数
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
单位产品利润	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

设 x_j 表示生产产品 B_j 的数量$(j=1,2,\cdots,n)$,则可建立线性规划数学模型:

$$\max S = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \leqslant a_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \leqslant a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n \leqslant a_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

这种类型的资源利用(或者称为资源配置)问题是最常见的,而且在经济分析中是最重要的. 只要求出最优解,最优计划即可做出,并且可以进一步做经济分析和优化分析.

3. 配料问题(食谱问题)

例 3 某公司饲养实验用的动物以供出售. 已知这些动物的生长对饲料中 3 种营养成分(蛋白质,矿物质和维生素)特别敏感,每只动物每天至少需要蛋白质 70 g,矿物质 3 g,维生素 10 mg. 该公司能买到 5 种不同的饲料,每种饲料 1 kg 所含各种营养成分和成本如表 1-6 所示. 求既能满足动物生长需要,又使总成本最低的饲料配方.

表 1-6 配料(食谱)问题的数据

营养＼饲料	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	营养最低要求
蛋白质(g)	0.3	2	1	0.6	1.8	70
矿物质(g)	0.1	0.05	0.02	0.2	0.05	3
维生素(mg)	0.05	0.1	0.02	0.2	0.08	10
成本(元)	0.2	0.7	0.4	0.3	0.5	

解 设需要 5 种饲料 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 的数量分别为 x_1、x_2、x_3、x_4、$x_5$kg,则可建立线性规划数学模型:

$$\min S = 0.2x_1 + 0.7x_2 + 0.4x_3 + 0.3x_4 + 0.5x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}0.3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0.6x_4 + 1.8x_5 \geqslant 70 \\ 0.1x_1 + 0.05x_2 + 0.02x_3 + 0.2x_4 + 0.05x_5 \geqslant 3 \\ 0.05x_1 + 0.1x_2 + 0.02x_3 + 0.2x_4 + 0.08x_5 \geqslant 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0\end{cases}$$

通过 LINDO 求解,程序为:

```
min    0.2x1+0.7x2+0.4x3+0.3x4+0.5x5
st
0.3x1+2x2+x3+0.6x4+1.8x5>=70
0.1x1+0.05x2+0.02x3+0.2x4+0.05x5>=3
0.05x1+0.1x2+0.02x3+0.2x4+0.08x5>=10
end
```

求解,得 $x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=39.74, x_5=25.64, \min S=24.74$.

说明:该模型还要增加约束 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \leqslant a$! 请读者思考一下,为什么?

一般地,用 n 种原料 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 制成具有 m 种成分 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的产品,其所含各种成分分别不少于 $a_1, a_2, \cdots, a_m$,各种原料的单价 b_j 以及各种原料所含成分的数量 $c_{ij}(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$如表 1-7 所示,应如何配料才能使总成本最小?

表 1-7　一般配料(食谱)问题的数据

成分 \ 原料	B_1	B_2	…	B_n	现有原料数
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
单价	b_1	b_2	…	b_n	

设需要原料 B_j 的数量为 x_j 单位($j=1,2,\cdots,n$),则可建立线性规划问题数学模型:

$$\min S=\sum_{j=1}^{n}b_jx_j$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n\geqslant a_1\\ c_{21}x_1+c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n\geqslant a_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ c_{m1}x_1+c_{m2}x_2+\cdots+c_{mn}x_n\geqslant a_m\\ x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\end{cases}$$

另外还要增加一个约束条件:$x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant a$(进行总量控制).

4. 运输问题

例 4　设有两个砖厂 A_1、A_2,其产量分别为 23 万块与 27 万块. 它们生产的砖供应 B_1、B_2、B_3 三个工地,其需要量分别为 17 万块、18 万块、15 万块. 自各产地 A_i 到各工地 B_j($i=1,2;j=1,2,3$)运价如表 1-8 所示. 应如何调运,才能使总运费最省?

表 1-8　运输问题的数据

	平衡表(万块)				运价表(元/万块)		
	B_1	B_2	B_3	供应量	B_1	B_2	B_3
A_1				23	50	60	70
A_2				27	60	110	60
需求量	17	18	15	50			

解　设砖厂 A_i 供应建筑工地 B_j 砖块的数量为 x_{ij}($i=1,2;j=1,2,3$),则可以建立线性规划问题的数学模型:

$$\min S = 50x_{11} + 60x_{12} + 70x_{13} + 60x_{21} + 110x_{22} + 60x_{23}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 23 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 27 \\ x_{11} + x_{21} = 18 \\ x_{12} + x_{22} = 17 \\ x_{13} + x_{23} = 15 \\ x_{ij} \geqslant 0 (i = 1,2; j = 1,2,3) \end{cases}$$

用 LINDO 编程：

```
min    50x 11+60x 12+70x 13+60x 21+110x 22+60x 23
st
x 11+x 12+x 13=23
x 21+x 22+x 23=27
x 11+x 21=18
x 12+x 22=17
x 13+x 23=15
end
```

通过求解得：$x_{11}=6, x_{12}=17, x_{13}=0, x_{21}=12, x_{22}=0, x_{23}=15$, minS=2940.

一般地，某种物资有 m 个产地 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，联合供应 n 个销地 $B_1, B_2, \cdots, B_n$，各产地产量 a_i、各销地销量 b_j、各产地到各销地的单位运价 $c_{ij}(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$ 如表 1-9 所示，应如何组织运输才能使得总运费最省？

表 1-9　一般运输问题的数据

平衡表						运价表			
	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量	B_1	B_2	$\cdots$	B_n
A_1					a_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}
A_2					a_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{1n}
$\cdots$					$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A_m					a_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}
销量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n					

设 x_{ij} 表示产地 A_i 供应销地 B_j 的数量$(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$.

当产销平衡($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$)时，数学模型为：