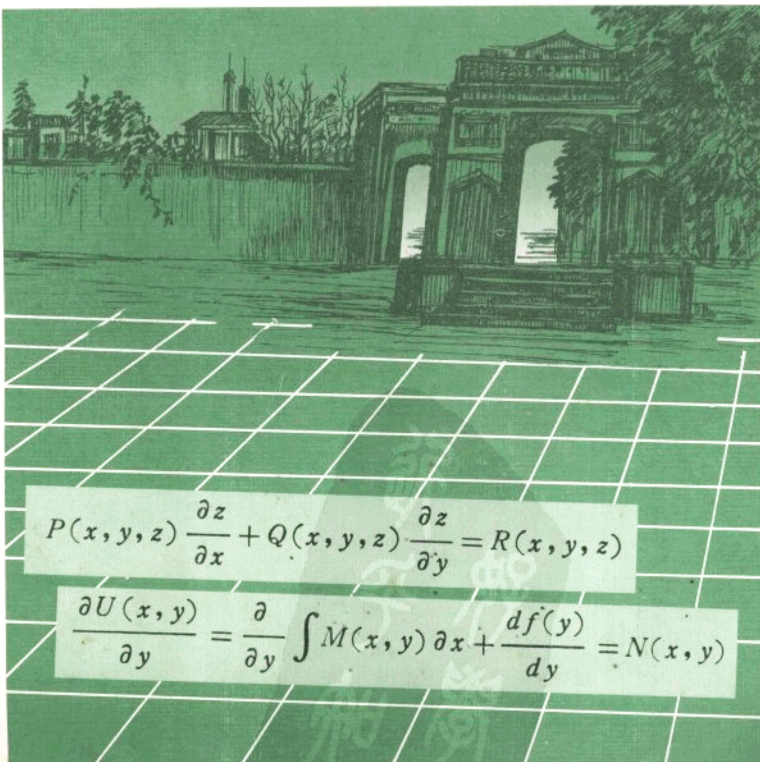
全華升學叢書

·插大、二技、學士後醫、研究所必備·

# 挑戰微積分(上)

蔣正明·蔣榮宗　編著




全華科技圖書股份有限公司 印行

# 我們的宗旨：

## 推展科技新知
## 帶動工業升級

## 爲學校教科書
## 推陳出新

感謝您選購全華圖書
希望本書能滿足您求知的慾望

「圖書之可貴，在其量也在其質」，量指圖書內容充實，質指資料新穎夠水準。我們本著這個原則，竭心盡力地爲國家科學中文化努力，貢獻給您這一本全是精華的"全華圖書"

爲保護您的眼睛，本公司特別採用不反光的米色印書紙!!

# 序　　言

「**怎樣獲得高分？**」幾乎我碰過的所有想參加微積分考試的學生這麼問我。微積分不同於一般科目；一考下來，分數差距甚大。這本書就是在作者有感於未來的新趨勢命題及滿足學生需求而完成的。

從資料的搜集——各大學院校期中考、轉學考、研究所、二技入試考、學士後醫考試及**Sears**、**Purcell**、**Anton**、**JK**、**Thomas 各版本原文書**——到精選題目與內容的編排，全都是作者的心血結晶；務期使學生循序漸進，建立起微積分的全部觀念，且在熟讀本書後，能夠在考場上獨佔鰲頭。

本書最大的特色，是**首創精彩的英文考題**，題題都可能是教授出題的題材。全書每章共分三部曲：

- **命題焦點**
- **典型考題**
- **挑戰試題**

文內無一個題目是多餘，也絕不浪費學生時間，完全是針對考試方向而編寫的（含物理學、經濟學、醫學上之應用），適合投考二技、學士後醫、研究所及大學院校轉學之理工商科學生。

本書撰寫期間承蒙中山大學電機系講師林吉聰，清大應數所李懋禎，臺大醫學系吳嘉隆，高雄醫學院蔡和鑫提供寶貴資料，就此一併致謝。語末，敬祝親愛的讀者諸君

**金榜題名！！**

蔣正明　走筆傅鐘下

# 目　　錄

# 7 數列與無窮級數 205

# 1 極限與連續

● 考題傾向與對策 ●

（微積分是利用極限的方法分析函數的特性。本章乃微積分的基礎，舉凡函數的定義及圖形的描繪，極限值的求法連續性的討論，是命題的焦點!! 務必熟練。本章是淡大、輔大、二技、東吳諸教授喜愛的題材，當然蔣老師也挺喜歡的!! 宜特別留意。演練之貫通之，定獲高分。


群盲，摸象

## 命題焦點 1：極限的定義

1．直觀概念：（重要!! 常考）

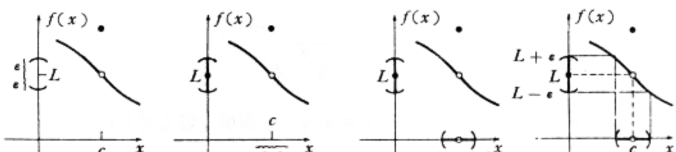
(1)若 $f$ 爲一函數，則 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=L$

(2)若函數 $f$ 在 $c$ 之極限存在，則必爲唯一的。

2．極限的定義（the definition of limit）：

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ 意指對每一個 $\varepsilon>0$（無論有多小），必存在一個對應的 $\delta>0$ 使得當 $0<|x-c|<\delta$ 時，$|f(x)-L|<\varepsilon$，意即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$0<|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

詮釋如下圖：




對每一個 $\varepsilon>0$　存在一個 $\delta>0$　$0<|x-c|<\delta$　$\Rightarrow$　$|f(x)-L|<\varepsilon$

**【典型考題 1.】**

求 $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x} = ?$　　（解念解析！）

Ans：含絕對值時必先考慮左右極限

(1) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$

(2) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$

∵左右極限不相等，故此題極限值不存在。

**【典型考題 2.】**

證明若 $c > 0$，$\lim_{x\to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$

《觀念分析》找 $\delta$ 使得

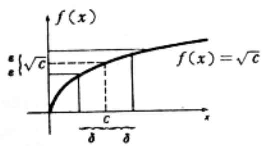
$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{c}| < \varepsilon$$

因

$$|\sqrt{x} - \sqrt{c}| = \left| \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{c})(\sqrt{x}+\sqrt{c})}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} \right| = \left| \frac{x-c}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} \right|$$

$$= \frac{|x-c|}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} \le \frac{|x-c|}{\sqrt{c}}$$

欲使後項小於 $\varepsilon$，必須滿足 $|x-c| < \varepsilon\sqrt{c}$（如下圖）




$\lim_{x\ c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$

《正式證明》任給 $\varepsilon > 0$，選取 $\delta = \varepsilon\sqrt{c}$，那麼，當 $0 < |x-c| < \delta$

$$\Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{c}| = \left| \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{c})(\sqrt{x}+\sqrt{c})}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} \right| = \left| \frac{x-c}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} \right|$$

$$= \frac{|x-c|}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} \le \frac{|x-c|}{\sqrt{c}} < \frac{\delta}{\sqrt{c}} = \varepsilon$$

## 命題焦點2：各種極限問題的求法

1．極限的基本定理（四則運算）：

若 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to c}g(x)=B$，則

(1) $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to c}f(x)+\lim\limits_{x\to c}g(x)=A+B$

(2) $\lim\limits_{x\to c}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to c}f(x)-\lim\limits_{x\to c}g(x)=A-B$

(3) $\lim\limits_{x\to c}(f(x)\,g(x))=\lim\limits_{x\to c}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to c}g(x)=AB$

(4) $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to c}f(x)}{\lim\limits_{x\to c}g(x)}=\dfrac{A}{B}$，當 $B\neq 0$

※對右極限與左極限亦有類同之結果。

2．夾擠定理（squeeze theorem）：

令 $f$，$g$ 及 $h$ 三個函數滿足 $f(x)\le g(x)\le h(x)$，對於所有 $x$ 接近 $c$，$x\neq c$，若 $\lim\limits_{x\to c}h(x)=\lim\limits_{x\to c}f(x)=L$，則 $\lim\limits_{x\to c}g(x)=L$。（太重要了!!）

3．兩個重要的極限值（特別留意）：

(1) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$

4．各種極限問題之解法

(1)一般型

求 $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ 的方法

Step 1：先檢查 $f$ 在 $x\to c^-$ 及 $x\to c^+$ 之定義是否相同。若不同，分別求其左右單邊極限以決定 $x\to c$ 時 $f$ 的極限是否存在。

Step 2：利用直接代入法，如果得出 0/0 的形式，則利用代數運算以改變分式的形式，使分母不爲零，然後再取 $x\to c$ 之極限。

(2)因式分解法（通分法）

Step 1：凡遇$\frac{0}{0}$或$\infty-\infty$的形式

Step 2：善用因式分解或通分法，以消去使分母爲 0 的因子。

(3)有理化法

技巧1：欲有理化$\sqrt{a}$，則乘上$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$。

技巧2：欲有理化$\sqrt{a}-\sqrt{b}$，則乘上$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$。

技巧3：欲有理化$\sqrt{a}+\sqrt{b}$，則乘上$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$。

技巧4：欲有理化$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$，則乘上$\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}$。

(4)變數變換法（或稱置換法）

技巧1：無理函數化爲有理函數

技巧2：$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$，其中令 $t=-x$

技巧3：熟練$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{C}{x^p}=0$，（$C$：定值，$p>0$）

(5)夾擠定理

技巧1：切記$\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$　（要會證明!!）

技巧2：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

技巧3：高斯函數 $x-1<[x]\leq x$……

技巧4：三角函數$-1\leq\sin x\leq 1$及$-1\leq\cos x\leq 1$

技巧5：根式函數 $\begin{cases} b>a>0 \text{ 則 } \sqrt[n]{b^n}<\sqrt[n]{a^n+b^n}<\sqrt[n]{2b^n} \\ c>b>a>0 \text{ 則 } \sqrt[n]{c^n}<\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}<\sqrt[n]{3c^n} \end{cases}$

(6)綜合型

①已知一極限式成立，求未知常數。

②各類問題之混合，作適當的變型。

※※善用以上六大法寶，將受益無窮！

**【典型考題 3.】**

求下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}[4x-x^2]$　（74年成大轉學考）

(2) $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$　（73年淡大轉學考）

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-4}\right)$　（67台大轉學考）

Ans：(1)高斯函數：$n\leq x<n+1$，$n\in Z\Rightarrow[x]=n$

$$\lim_{x\to 2}[4x-x^2]=\lim_{x\to 2}[-(x^2-4x+4)+4]$$

$$=\lim_{x\to 2}[-(x-2)^2+4$$

$$=3$$

(2) $$\lim_{x\to 0} x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0} x\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x^2+1}}{|x|}$$

$$\because \lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{x^2+1}}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x^2+1}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x\sqrt{x^2+1}}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\sqrt{x^2+1}}{-x}=\lim_{x\to 0^-}-\sqrt{x^2+1}=-1$$

左極限≠右極限　$\therefore \lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 不存在

(3) $$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-4}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\cdot\frac{(x-4)+(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(x-3)(x-2)(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2}{(x-2)(x-4)}$$

$$=-2$$

【典型考題 4.】

求下列各函數之極限值：

(1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$ （74輔大轉學考）

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ （74東吳轉學考）

(3) $\lim_{x\to 27}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}-2}{x-27}$ （66交大管研所）

Ans：(1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}$

（有理化法）

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$=1$$

(3)利用變數變換法

令 $y=\sqrt[3]{x}$，當 $x\to 27$，則 $y\to 3$

$$\lim_{x\to 27}\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}-2}{x-27}=\lim_{y\to 3}\frac{\sqrt{1+y}-2}{y^3-27}$$

$$=\lim_{y\to3}\frac{\sqrt{1+y}-2}{y^3-27}\times\frac{\sqrt{1+y}+2}{\sqrt{1+y}+2}$$

$$=\lim_{y\to3}\frac{y-3}{(y-3)(y^2+3y+9)(\sqrt{1+y}+2)}$$

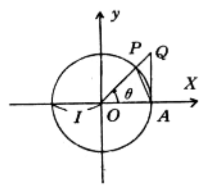
$$=\lim_{y\to3}\frac{1}{(y^2+3y+9)(\sqrt{1+y}+2)}$$

$$=\frac{1}{108}$$

**【典型考題 5.】**

利用夾擠定理證明 $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$

《證明》(1)設 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$




因　三角形OAP之面積＜扇形OAP之面積＜OAQ之面積

$\Rightarrow\ \dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\sin\theta<\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot\theta<\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\tan\theta$

$\Rightarrow\ \sin\theta<\theta<\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\Rightarrow\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}<\dfrac{1}{\theta}<\dfrac{1}{\sin\theta}$

$\Rightarrow\ \cos\theta<\dfrac{\sin\theta}{\theta}<1$

$\because\ \lim\limits_{\theta\to0^+}\cos\theta=\lim\limits_{\theta\to0^+}1=1$

$\therefore$ 由夾擠定理得知 $\lim\limits_{\theta\to0^+}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$

(2)設 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<0$

則 $0<-\theta<\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(-\theta)<\dfrac{\sin(-\theta)}{-\theta}<1$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta<\frac{\sin\theta}{-\theta}<1$$

$\because \quad \lim\limits_{\theta\to0^-}\cos\theta=\lim\limits_{\theta\to0^-}1=1$

$\therefore$ 由夾擠定理知 $\lim\limits_{\theta\to0^-}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$

由(1)，(2)即得證 $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ （ $\theta$ 爲弧度 ）

**【典型考題 6.】**

試利用 $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ ，求下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x}\,\sin x}{x^{2/3}}$ （ 75 二技入試 ）

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{3x^4}$ （ 75 淡大轉學考 ）

Ans：(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x}\,\sin x}{x^{2/3}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\sin x\cdot x^{\frac{1}{3}}}{x^{2/3}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{\frac{5}{6}}\sin x}{x}$

$$=\left(\lim_{x\to0}x^{\frac{5}{6}}\right)\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=0\cdot1=0$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{3x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)^2=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{12}$

※注意：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=a$ ，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{x}=a$ （諸極限中之 $x$ 爲弧度）

**【典型考題 7.】**

求下列各函數之極限值：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$ （ 73 東吳轉學考 ）

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\cos x$ （ 69 二技入學考 ）

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]}{x}$ （ 67 台大轉學考 ）

(4) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left[\dfrac{1}{x}\right]$ （ 67 台大轉學考 ）

Ans：(1) $-1\le\sin\dfrac{1}{x}\le 1$ ，$\forall x\ne 0$

$\because\begin{cases}① \ x>0,\ -x\le x\sin\dfrac{1}{x}\le x\text{，且}\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0\\ \text{由夾擠定理知}\lim\limits_{x\to 0^+}x\sin\dfrac{1}{x}=0\\ ② \ x<0,\ -x\ge x\sin\dfrac{1}{x}\ge x\text{，且}\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0\end{cases}$

則 $\lim\limits_{x\to 0^-}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$ （注意：$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$ ，Why？）

(2) 由 $-1\le\cos x\le 1 \Rightarrow -e^{-x}\le e^{-x}\cos x\le e^{-x}$

$\because\lim\limits_{x\to\infty}(-e^{-x})=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=0\quad\therefore\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\cos x=0$

(3) $\because x-1<[x]\le x \Rightarrow \dfrac{x-1}{x}<[x]\le\dfrac{x}{x}$ （ $x>0$ ）

且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x}=1 \qquad \therefore \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]}{x}=1$

(4) $\because \dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\le\dfrac{1}{x} \Rightarrow x-x^2<x^2\left[\dfrac{1}{x}\right]\le x$ , $\forall x\neq 0$

由 $\lim\limits_{x\to 0}(x-x^2)=\lim\limits_{x\to 0}x=0 \qquad \therefore \lim\limits_{x\to 0}x^2\left[\dfrac{1}{x}\right]=0$

**【典型考題 8.】**

(1)函數 $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^3+cx+d}{x^2+x-2}$ 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$ , $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ 成立

試求 $a$ , $b$ , $c$ , $d$ 之值。 （75淡江轉學考）

(2)已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$ ,由 $a$ 及 $b$ 值。

Ans：(1) $\because \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+x+d}=1$ （存在）

$$原極限=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b+\dfrac{c}{x}+\dfrac{d}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}(ax+b)=1 \quad （存在）$$

$$\therefore \quad a=0 , b=1$$

又 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+cx+d}{x^2-x-2}=0$ （存在）

$\because \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+cx+d}{x^2+x-2}$ 爲 $\dfrac{0}{0}$ 之不定型，其極限存在

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}(x^2+cx+d)=1+c+d=0$ , $d=-c-1$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2+cx+d}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+cx-c-1}{x^2+x-2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)+c(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1+c)}{(x-1)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+1+c}{x+2}=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{2+c}{3}=0\ ,\ c=-2\ ,\ d=-c-1=1$$

(2) $\because\ \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-ax-b}{x}=c$$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-ax-b}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-ax-b}{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}}{1}$$

$$=(1-a)=0\qquad\therefore a=1$$

又 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x-b)=0\Rightarrow b=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$

$$=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)\cdot\frac{(\sqrt{x^2-x+1}+x)}{(\sqrt{x^2-x+1}+x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\frac{1}{2}$$

**【典型考題 9.】**

已知 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ ，試求

(1) $\lim\limits_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ （72 東吳轉學考）