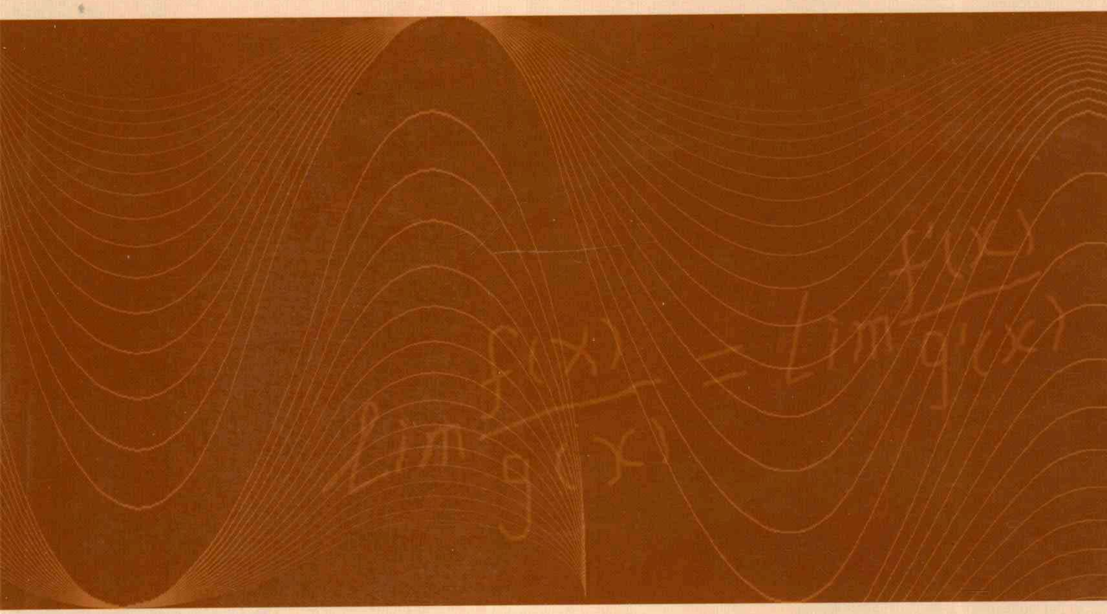
安徽省高等学校“十一五”省级规划教材配套辅导



医药高等数学
学习指导

主编　秦　侠　吴学森　陈　涛

中国科学技术大学出版社

安徽省高等学校“十一五”省级规划教材配套辅导

医药高等数学
学习指导

主　编　秦　侠　吴学森　陈　涛

副主编　刘国旗　孙　侠

编　委　（按姓氏笔画排序）

朱文婕　刘国旗　孙　侠

吴学森　陈　涛　周　睿

赵　妍　秦　侠　魏　杰

中国科学技术大学出版社

2008·合肥

内容简介

本书是与安徽省高等学校“十一五”省级规划教材《医药高等数学》配套的教学参考书，全书内容共分7章：函数、极限与连续；导数与微分；一元函数积分学；多元函数微积分；常微分方程；概率论基础；线性代数基础. 每一章均设有以下栏目：目的与要求；重点与难点；典型例题；习题参考答案；补充习题(附参考答案)；自测题(附参考答案). 其中典型例题和补充习题在难度上有所提高，题型灵活，解法多样.

本书可作为高等医学院校各专业《医药高等数学》教学的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

医药高等数学学习指导 / 秦侠，吴学森，陈涛主编. —合肥：中国科学技术大学出版社，2008.9
(安徽省高等学校“十一五”省级规划教材配套辅导)
ISBN 978-7-312-02382-8

Ⅰ. 医… Ⅱ. ①秦…②吴…③陈… Ⅲ. 医用数学：高等数学—医学院校—教学参考资料 Ⅳ. R311 O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第127522号

出版发行 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号，230026
http://press.ustc.edu.cn

印　　刷 合肥现代印务有限公司
经　　销 全国新华书店
开　　本 880 mm×1230 mm　1/32
印　　张 5.625
字　　数 180千
版　　次 2008年9月第1版
印　　次 2008年9月第1次印刷
定　　价 15.00元

前　言

本书是与安徽省高等学校“十一五”省级规划教材《医药高等数学》配套的教学参考书，与《医药高等数学》同步编写. 本书每一章均包括以下栏目：目的与要求；重点与难点；典型例题；(教材中)习题参考答案；补充习题(附补充习题参考答案)；自测题(附自测题参考答案). 其中典型例题和补充习题在难度上有所提高，题型灵活，解法多样，可满足部分学生考研的需要. 本书可作为高等医学院校各专业《医药高等数学》教学的参考书，使用对象主要是高等医学院校的本科生和七年制学生，同时也可供硕士生学习使用.

本书的编写具有下列特点：

- 章节安排与教材《医药高等数学》完全一致，简明实用，便于学生课堂学习和课后复习.
- 以评析方式对教材的重点与难点做了进一步的总结，帮助学生把知识点理顺.
- 以适当的难度梯度选编典型例题和补充习题，满足学有余力的学生和考研学生课后学习、加强训练和提高能力的需要.
- 习题类型丰富，含选择题、判断题、填空题、计算题、证明题、应用题等，全方位训练学生，帮助学生提高解题能力.
- 每章一套 100 分的自测题及解答，满足学生对各章知

识的掌握程度的自我测评.

本书编写分工如下：第1章由孙侠编写，第2章由朱文婕和魏杰编写，第3章由陈涛编写，第4章由刘国旗编写，第5章由周睿和秦侠编写，第6章由吴学森编写，第7章由赵妍编写.

在本书编写过程中，得到中国科学技术大学出版社和安徽医科大学的大力支持，在此表示衷心的感谢.尽管我们努力了，但仍然会有缺陷与错误，真诚地希望在医药学界从事高等数学教研的同仁给予批评和指正.

秦　侠

2008年7月

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

【目的与要求】

1. 掌握:

(1) 函数的定义、表达式及函数值;基本初等函数的概念、性质及图形;复合函数及其分解.

(2) 极限的四则运算法则;利用两个重要极限求极限.

(3) 简单函数(包括分段函数)在一点的连续性,函数的间断点.

2. 熟悉:

(1) 函数的概念,函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性,反函数、初等函数、分段函数的概念;建立简单的实际问题中的函数关系.

(2) 极限的概念,极限的有关性质;无穷小量的概念,无穷小的运算法则.

(3) 初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质.

3. 了解:

(1) 极限的 $\varepsilon-N$, $\varepsilon-\delta$ 定义.

(2) 夹逼定理和单调有界定理.

(3) 无穷大的概念及性质.

【重点与难点】

1.1　函　　数

1. 函数关系的两大要素

定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域和对应法则都相

同，那么它们是相同的函数，否则就是不同的函数.

2. 基本初等函数

幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数.

3. 复合函数分解

把一个复合函数分解成几个简单函数很重要，分解出来的简单函数都是基本初等函数或是由基本初等函数经过四则运算得到的函数.

4. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合所构成的且仅用一个解析式表示的函数称为初等函数.

5. 分段函数

对于在定义域内根据自变量 x 的不同取值范围，函数 $f(x)$ 有不同解析表达式的函数称为分段函数.

本节内容是微积分的基础，要求熟记基本初等函数及其性质，要掌握初等函数的结构，特别是复合函数的复合过程. 复合函数的分解是一项基本技能，后面几章的复合函数求导，换元积分法和分部积分法等都是基于复合函数的分解.

1.2 极　　限

1. 函数的极限

函数的极限根据自变量的变化过程分为两类：

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 和 \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$.

注意：① 函数在自变量的某个变化过程中是否有极限存在，取决于在自变量的这个变化过程中函数是否有固定的变化趋势，而这个变化趋势与自变量的变化趋势和函数本身有关，而与函数在该点处是否有定义无关；② 相同的函数，如果自变量的变化趋势不同，则

极限不同.

2. 无穷小

(1) 无穷小的概念：无穷小是指在 x 的某种变化过程下以零为极限的函数. 任何一个非零常数，都不是无穷小，但是常数 0 可以看作无穷小.

(2) 无穷小的性质：

① $\lim f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim[f(x)-A]=0$；

② 有限个无穷小的和、差、积仍是无穷小；

③ 有界变量(或常量)与无穷小的乘积仍是无穷小；

(3) 无穷小的比较：设 $\alpha=\alpha(x)$ 和 $\beta=\beta(x)$ 都是在自变量 x 的同一个变化过程下的无穷小，且 $\beta\neq 0$，在此过程下，

① $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是比 β 高阶的无穷小，或称 β 是比 α 低阶的无穷小；

② $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=C\ (C\neq 0)$，则称 α 和 β 是同阶无穷小.

特别地，当 $C=1$ 时，称 α 和 β 是等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.

3. 极限的四则运算法则

(1) $\lim[f(x)+g(x)]=\lim f(x)+\lim g(x)$；

(2) $\lim[f(x)-g(x)]=\lim f(x)-\lim g(x)$；

(3) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$；

(4) $\lim\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$.

4. 两个重要极限

第一重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

变换形式：设 $\alpha(x)$ 是某一过程中的无穷小，则 $\lim\limits_{\text{某过程}}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$.

第二重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

变换形式：设$\alpha(x)$是某一过程中的无穷小，则 $\lim\limits_{\text{某过程}}[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\mathrm{e}$.

本节的重点是要掌握求函数极限的几种方法：① 利用极限的四则运算法则求极限；② 利用两个重要极限求极限. 学习了后面的内容后，还有③ 利用连续性求极限，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$；④ 利用洛必塔法则求极限. 但在做题时，这些方法不是孤立的，经常是在一个问题中用到几种方法. 对于分段函数在分段点处的极限问题，必须根据定义考虑其左、右极限.

1.3 函数的连续性

1. 函数连续的概念

设函数 $f(x)$在点 x_0 及其邻域内有定义，则 $f(x)$在点 x_0 的连续性有如下三个等价定义：

(1) 如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续；

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$在点 x_0处连续；

(3) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$在点 x_0处连续.

根据连续的定义可知，$f(x)$在点 x_0处连续必须同时满足以下三个条件：

① 函数值 $f(x_0)$存在；

② 极限值 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

③ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

2. 间断点

(1) 间断点的判定：只要 $f(x)$不具备上面三个条件中的任何一个，点 x_0就是 $f(x)$的间断点.

(2) 间断点的分类：常分为第一类和第二类间断点. 设 x_0 是 $f(x)$的间断点，则

$$\begin{cases}\begin{array}{l}\text{第一类间断点：}\\ f(x_0^-)\text{和 } f(x_0^+)\\ \text{都存在}\end{array}\begin{cases}\text{可去间断点：}\begin{cases}f(x_0^-)=f(x_0^+)\neq f(x_0)\\ \text{或 } f(x_0^-)=f(x_0^+),\\ \text{但 } f(x_0)\text{不存在.}\end{cases}\\ \text{跳跃间断点：} f(x_0^-)\neq f(x_0^+)\end{cases}\\ \begin{array}{l}\text{第二类间断点：}\\ f(x_0^-)\text{或 } f(x_0^+)\\ \text{不存在}\end{array}\begin{cases}\text{无穷间断点：}\begin{cases}f(x_0^-)=\infty\\ \text{或 } f(x_0^+)=\infty\end{cases}\\ \text{振荡间断点}\\ \text{其他间断点}\end{cases}\end{cases}$$

3. 初等函数的连续性

初等函数在其定义域内都是连续的.

4. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上必能取到最大值和最小值.

(2) 介值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，c 是介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的常数，则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=c$.

(3) 零点定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

注意：三个定理条件相同，都是闭区间上的连续函数.

若条件不满足，结论可能成立，也可能不成立.

本节的重点是要掌握判断函数的连续性，关键是抓住连续性的定义，定义中三个条件之一不满足者必间断，多用于对分段函数连续性的判断. 在做题时，对于初等函数，定义区间就是连续区间；对于分段函数，要重点考察分段点处的连续性.

【典型例题】

例 1　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x<0\end{cases}$ 的奇偶性.

解 本题要求对函数和分段函数的概念有准确的理解.

$$f(-x)=\begin{cases}-x-1, & -x>0,\\ 0, & -x=0,\\ -x+1, & -x<0\end{cases}$$

$$=-\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0\end{cases}=-f(x),$$

故函数是奇函数.

我们在教材 1.2.5 中介绍过等价无穷小代换,利用这些等价无穷小可以代换乘、除项中的因子,从而达到将复杂函数化简为较简单函数的目的.

(1) 等价无穷小代换法则:设在自变量 x 的同一个变化过程中,$\alpha(x)\sim\alpha'(x)$ 和 $\beta(x)\sim\beta'(x)$,且 $\lim\dfrac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$ 存在,则 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 存在,且 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\dfrac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$.

(2) 常见的等价无穷小有:当 $x\to0$ 时,$\sin x\sim x$,$\tan x\sim x$,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,$\ln(1+x)\sim x$,$e^x-1\sim x$,$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ ($\alpha\in\mathbf{R}$) 等.

灵活使用等价无穷小代换法则,可以简化极限的运算.

例 2 求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin 3x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{e^x-1}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{x}=3$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\dfrac{1}{x}=\infty$(不存在).

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}\cdot(2x)^2}{x\cdot 3x}=\dfrac{2}{3}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}\sin x}{x}=\dfrac{1}{2}$.

注意：等价无穷小代换只适用于乘除运算，不适用于加减运算，即一般地，

$$\lim\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\gamma(x)}\neq\lim\frac{\alpha'(x)-\beta'(x)}{\gamma(x)},$$

其中 $\gamma(x)\neq 0$.

例如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x+1}=0$，这里将分母中的 $\sin x$ 代换成 x 是不对的，因为 $\sin x$ 和其他部分是加减运算，而不是乘除运算.

例 3　求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点，并判断其类型.

解　函数 $f(x)$在点 $x=1$ 和 $x=2$ 处没有定义，所以点 $x=1$ 和 $x=2$ 是函数的间断点. 又因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}f(x)&=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}\\&=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}\\&=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x+1)}{(x-2)}\\&=-2=\lim_{x\to 1^+}f(x),\end{aligned}$$

但 $f(1)$无定义，故 $x=1$ 是 $f(x)$的可去间断点；而

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\infty,$$

故 $x=2$ 是 $f(x)$的无穷间断点.

例 4　讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$ 的连续性.

解 本题的关键是根据常用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n$ 求出 $f(x)$ 的一般表达式. 因为

$$\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ 1, & x=1,\\ \text{不存在}, & x=-1,\\ \infty, & |x|>1,\end{cases}$$

所以

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0.5, & x=1,\\ \text{无定义}, & x=-1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

故当 $|x|<1$ 时 $f(x)=1$, 连续;

当 $|x|>1$ 时 $f(x)=0$, 连续;

当 $x=-1$ 时 $f(x)$ 没有定义, $x=-1$ 是函数的间断点;

当 $x=1$ 时左极限

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}1=1,$$

右极限

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}0=0,$$

故函数在点 $x=1$ 处极限不存在,点 $x=1$ 是函数的间断点.

例 5 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续,且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$, 证明在$[0,1]$上至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=\xi$.

证 注意零点定理的条件 $f(a)f(b)$严格小于 0. 设

$$F(x)=f(x)-x,$$

则 $F(x)$在$[0,1]$上连续,

$$F(0)=f(0)\geqslant 0,\ F(1)=f(1)-1\leqslant 0.$$

若 $F(0)=0$ 或者 $F(1)=0$, 则 ξ 取 0 或 1;

若 $F(0)>0$ 且 $F(1)<0$, 由零点定理,至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=\xi$.

总之,在$[0,1]$上至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=\xi$.

【习题参考答案】

1. (1) $(2, +\infty)$；　(2) $[-1, 1)$；　(3) $(-1, 3]$；
(4) $[-1, 0)\cup(0, 1]$.

2. (1) $[-1, 0)\cup(0, 1]$；　(2) $(2k\pi, \pi+2k\pi)$.

3. (1) 不是,定义域不同；　(2) 不是,对应法则不同；　(3) 是.

4. (1) 偶函数；　(2) 奇函数；　(3) 不是偶函数,也不是奇函数；
(4) 不是偶函数,也不是奇函数.

5. $f[f(x)] = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x^4, & x \geqslant 0. \end{cases}$

6. (1) $y = e^u$, $u = x+2$；　(2) $y = \ln u$, $u = \sin v$, $v = \sqrt{x}$；
(3) $y = u^2$, $u = \arcsin v$, $v = 2x+1$；　(4) $y = \sqrt{u}$, $u = \tan v$, $v = x+1$.

7. (1) 2；　(2) 3；　(3) 不存在；　(4) 2；　(5) 0；　(6) $\dfrac{2^{20}}{3^{30}}$；
(7) -0.5；　(8) 0；　(9) $\dfrac{1}{4}$,令 $x = t^4$；　(10) -1.

8. (1) 无穷小；　(2) 无穷大；　(3) 无穷大；　(4) 无穷大.

9. (1) 同阶不等价；　(2) 同阶不等价；　(3) 等价.

10. 正确. 因为当 $x \to x_0$ 时

$$\ln[1+\alpha(x)] \sim \alpha(x),\ \ln[1+\sin\beta(x)] \sim \sin\beta(x) \sim \beta(x),$$

故 $\ln[1+\alpha(x)]$ 与 $\ln[1+\sin\beta(x)]$ 是等价无穷小.

11. (1) $\dfrac{2}{3}$；　(2) $\dfrac{2}{5}$；　(3) $\dfrac{1}{3}$；　(4) $\dfrac{4}{9}$；　(5) e^2；　(6) e^2；
(7) $e^{-\frac{1}{2}}$；　(8) e^{-6}.

12. 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$,左极限不等于右极限,所以符号函数在点 $x = 0$ 的极限不存在.

13. 因为对任意 x, y 有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$,则有

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f(\Delta x),\ f(0+\Delta x) - f(0) = f(\Delta x),$$

又因为 $f(x)$在 $x = 0$ 处连续,则

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(0+\Delta x)-f(0)=\lim_{\Delta x\to 0} f(\Delta x)=0,$$

所以

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)-f(x)=\lim_{\Delta x\to 0} f(\Delta x)=0,$$

故 $f(x)$在任意点 x 处连续.

14. 因为 $f(x)$在 $x=0$ 处连续,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左连续且右连续,即

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a+bx^2)=a=f(0),$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin bx}{x}=b=f(0),$$

故有 $a=b$.

15. $f(x)$处处连续,故在 $x=0$ 处连续,由连续的充分必要条件得

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x=1=f(0),\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+b)=b=f(0),$$

故 $a=b=1$.

16. (1) 当 $x<1$ 时, $f(x)=2x+1$;当 $x>1$ 时, $f(x)=2+x$, 均为初等函数,连续;当 $x=1$ 时,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x+1)=3=f(1),\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2+x)=3=f(1),$$

故 $f(x)$在点 $x=1$ 处也连续.

(2) 当 $x<-1$, $x>-1$ 时函数连续,但当 $x=-1$ 时不连续. (3) 连续.

17. (1) 间断点 $x=-1, 1$; (2) 间断点 $x=0, 1$.

18. 设辅助函数 $f(x)=x^5-2x^2+x+1$, 显然 $f(x)$在闭区间$[-1, 1]$上连续,且 $f(-1)f(1)=-3<0$, 则由零点定理可知,在区间$(-1, 1)$内至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$, 即方程 $x^5-2x^2+x+1=0$ 在$(-1, 1)$内至少有一个实根.

19. 构造辅助函数 $g(x)=f(x)-x$, 易知 $g(x)$在闭区间$[a, b]$上连续,且

$$g(a)=f(a)-a<0,\ g(b)=f(b)-b>0,\ g(a)g(b)<0,$$

则由零点定理可知,在区间(a, b)内至少存在一点 ξ,使得 $g(\xi)=0$, 即方程 $f(x)=x$ 在(a, b)内至少有一个实根.

20. (1) $\lim\limits_{n\to\infty} C_n(0)=\dfrac{a}{1-r}$, $\lim\limits_{n\to\infty} C_n(T)=\dfrac{ar}{1-r}$;

(2) $a=\alpha-\beta$, $T=\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{\alpha}{\beta}$.