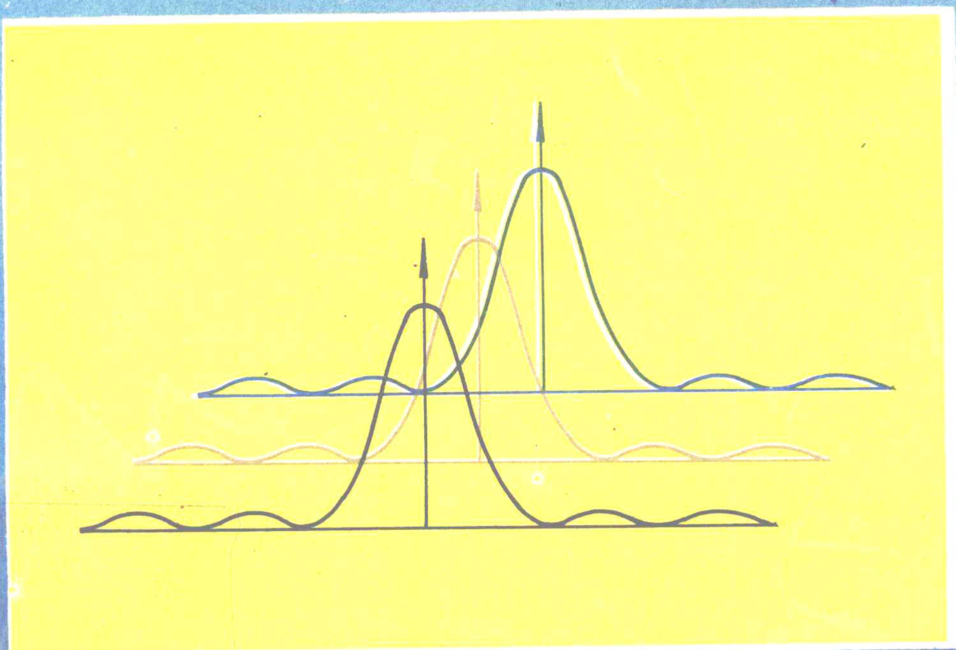
信息传输基础

闻懋生　张传生　编



西安交通大学出版社

信息传输基础

闻懋生　张传生　编

西安交通大学出版社

内容简介

本书以信息传输系统模型为基线，较全面系统地讲述了信息传输的基本原理。全书共分十章，内容包括：绪论、确定信号分析、随机信号和噪声分析、信号设计导论、幅度调制、角度调制、脉冲编码调制、数字信号基带传输、数字调制及信息论基本知识。

本书阐述以物理概念为主，强调工程实用，对基本公式和定理的数学推导力求简洁，结论明确。各章附有习题。此书适于高等学校的无线电技术专业，通信工程专业及其他电子类本科生教材，也可作为从事通信和电子系统领域科研、生产工程技术人员的参考书。

(陕)新登字 007 号

信息传输基础
闻懋生　张传生　编
责任编辑　白居宪　张文武

西安交通大学出版社出版
(西安市咸宁路 28 号　邮政编码 710049)
陕西省新华书店经销
西安市向阳印刷厂印装
开本 787×1092　1/16　印张 19.625　字数:477 千字
1993 年 12 月 1 版　　1993 年 12 月第 1 次印刷
印数:1——3000
ISBN7-5605-0612-7/TN·36　定价:16.00 元

前　　言

目前，通信技术的发展日新月异，信息传输原理和技术在各类工业部门的应用也日趋广泛。本书以信息传输模型为基线，围绕调制理论和系统的抗噪声性能的分析对信息传输中的基本问题进行了详细介绍。全书共分十章。第一、二、三章主要介绍了信息传输系统模型，信息量的概念，随机过程和噪声的概念及其研究的基本方法；第四章介绍了由信号在噪声中的最优提取引出的匹配滤波及信号设计问题；第五、六章对目前应用仍较广泛的模拟调制进行了介绍；第~~七、八、九~~章讲述了数字通信的基本内容，主要介绍了模拟信号的脉冲编码调制(PCM. Δm)，数字基带传输系统及数字调制系统；~~第十章~~扼要介绍了信息论的基本知识，从而使读者对信息传输中的两大主要指标——有效性和可靠性的提高找到了统一的理论依据，以此作为全书的结束。每章附有一定数量的习题。全书教学时间为 90～100 学时。

本书在内容阐述上以物理概念为主，强调了工程的实际应用，对于基本定理和公式的数学推导力求严谨简洁、结论明确。针对无线电专业大学本科期间大部分学生并未学过随机过程的特点，本书从确定信号分析开始，深入浅出地介绍了随机过程和噪声的概念及其研究方法，与后续各章中分析的各类通信系统抗噪声性能的计算紧密结合，前后呼应。在调制理论中侧重于数字通信基本内容的讲述，并适量地介绍了最新的各种数字调制方式。

本书的主要对象是无线电技术、通信工程、计算机通信和其他电子类专业的本科生。本书也可作为通信和电子系统领域从事科研、生产的工程技术人员的参考书。读者应具备概率论、电路、信号与系统、电子线路等方面的先行知识。

本书由闻懋生和张传生编写。闻懋生编写第一、二、三、五、六章，张传生编写第四、七、八、九、十章。西安电子科技大学詹道庸副教授仔细审阅了全书，并提出了十分宝贵的意见，作者谨此表示衷心的感谢。

由于作者水平和学识所限，书中不妥和错误之处在所难免，恳切希望各位读者、同行专家批评指正。

作者
一九九三年十二月于
西安交通大学

目　录

第一章 绪论

信息传输是所有通信系统的基本功能，信息传输基础是研究以电的形式进行信息传输的原理和问题，就其实质性的内容而言，与通信系统原理无根本区别。

电子通信技术从1838年莫尔斯发明电报开始，随后一个半世纪中已有了飞跃的进步。当前，电话、无线电、电视已成为现代化生活中必不可少的组成部分。长距离的报文、数据、声音和图象跨越全球，通过洲际网络，计算机之间可进行联网通信。可以预计在未来的几十年中，新的通信技术将如雨后春笋，移动通信、个人通信、移动卫星通信、多媒体终端、多媒体通信、超高速同步数字序列(SDH)光纤通信、异步转移模式(ATM)综合交换以及各种智能化通信技术等等将会走向实用。国外研究进展表明，Gb/s(吉比/秒)级光纤通信、B-ISDN(宽带综合业务数字网)、HDTV(高清晰度电视)以及智能网技术都将在90年代中期走向实用化，使新一代通信网技术全面趋于成熟。由此导致本世纪最后10年至下世纪初10年间，世界通信网将发生历史性换代，使任何人(Whoever)随时(Whenever)随地(Wherever)能同任何他人(Whomever)实现任何方式(Whatever)的所谓“5个W”的理想通信境界逐步走向现实。

通信系统内容非常广泛，发展速度日新月异。本书将从抽象的观点来讨论信息传输的基本原理，而不可能对具体的通信系统作专门介绍，在原理的讨论中，甚至很少涉及通信网的概念。我们知道，培养高质量、高水平的通信人才，只能由整个教学计划及学位层次来决定，而不可能由某一门课程来概括。因此我们将从一般性的概述开始，在后续各章对信息传输中各个共同性的问题作逐一讨论。

1.1 信息和信息量

我们研究信息传输系统之前，首先会遇到关于消息、信号、信息和信息量的概念问题。

日常生活中经常会应用“消息”、“情报”、“信息”的概念，但含意模糊、概念混淆，当然更无法对它们进行定量的量测。

在科学技术中，消息的传输是以信号的形式来完成的。信号代表消息，消息是信源产生的信息的物理表现，因此，消息携带信息。消息传输的目的是传输信息。信息的概念比较抽象，信息是指消息中包含的待知的内容，严格地讲，信息是指消息中的不确定性。确定的或具有必然结果的消息并不携带信息。由概率论知，消息中事件发生的不确定性可以用其出现的概率来描述，因此，信息可以定义为消息中事件发生的概率函数。

消息中信息的多少可以用信息量去衡量。因此信息量与消息中事件发生概率有密切关系。我们可以直观地发现，消息的信息量与消息中事件发生概率 P 成反比。消息中事件发生概率愈小，不可能发生的事件发生了，消息的信息量就相当大。相反地如果消息中事件发生的概率愈大，愈接近于必然事件($P=1$)，几乎肯定发生的事件发生了，则消息的信息量就愈小，愈接近于0。另外，我们还可以看到，若干个互相独立事件构成的消息，所含的信息量等于各独立事

件信息量的和。综上所见，我们很容易从直观感觉中得到结论：消息中信息量与消息中事件发生概率倒数的对数函数成比例。

$$I \sim \log(1/P) \tag{1.1}$$

式中，P 是消息事件发生的概率；I 便是从这个事件发生的消息中得到的信息量。

但是，上述得到的关于消息中信息量的概念还不能直接应用到工程实践中。因为上述定义的消息的信息量与消息的重要程度有关。往往 5 分钟的重要新闻节目广播比一个小时文娱节目的信息量大得多。这就无法客观地来衡量各种消息的信息量。因此，工程上定义消息的信息量应和消息的重要程度无关。客观地认为，消息的信息量应与传输消息的时间成正比。也就是说，应该认为通话两分钟的信息量比通话一分钟大一倍。另外，在工程中，信源发出的消息有两大类，即离散消息和连续消息。因此还必须结合具体的信源来对信息量加以定义。由于传输与连续消息相对应的连续信号时，可按抽样定理仅需考察传送这些离散的抽样所包含的信息，一旦对抽样值的量化电平确定后，消息的信息量的计算与离散消息信息量的计算并无不同。因此，我们这里仅讨论离散消息的信息量的定义。

信源发出离散消息，例如，A、B、C、D 四个消息。这里消息指的是一个符号。若干个单个消息(符号)的组合可组成消息序列，如由 4 个消息组成 $N=9$ 的消息序列：$ABDCCDBAA$ 代表一则消息。因此消息的信息量指的是单个符号的信息量，如 A 的信息量或 B 的信息量。消息序列的信息量指的是一则消息的信息量或每个消息的平均信息量。

定义消息的信息量，我们可以统一采用相同码元宽度的二进制脉冲传送该消息为出发点。如 A、B 两个消息之一需要传送，可以用一个二进制脉冲来传送。如 A 用 0V 码元代表；B 用相同宽度的 1V 码元来代表。

A、B、C、D 四个消息之一需要传送，可以用两个二进制脉冲来传送。如 A 对应为 00 两个码元；B 用 01 代表；C 用 10 代表；D 用 11 代表。每个消息亦可用一个四进制脉冲来传送，如四进制脉冲有四个电平，分别为 0、1、2、3V，其中每个电平代表欲传送的一个消息。

M 个消息之一需要传送，可以用一个 M 进制脉冲传送，亦可以用 $\log_2 M$ 个二进制脉冲来传送。

现在，我们首先定义等概率发生的消息的信息量。

两个等概率消息之一需要传送，可以用一个二进制脉冲来传输，则每个消息的信息量为 1，单位是比特(bit)。

四个等概率消息之一需要传送，可以用一个四进制脉冲亦可以用两个二进制脉冲来传送。我们以码元宽度相同的二进制脉冲传送为准，又由于传送四个消息之一的时间比传送两个消息之一的时间长一倍，因此信息量也大一倍，这正好等于由四进制脉冲归算为二进制脉冲传送的脉冲数。因而，四个等概率消息之一的消息的信息量，应为 $\log_2 4$ 比特，即 2 比特。

按此推广，M 个等概率消息之一需要传输，可以用一个 M 进制脉冲来传输，也可用 $\log_2 M$ 个二进制脉冲来传输，每个消息的信息量为 $\log_2 M$ 比特。

由此可对等概出现的消息的信息量得到结论：

等概出现的消息的信息量等于该消息发生概率的倒数的对数函数(以 2 为底)。这是因为 M 个等概消息，则每个消息的发生概率为 $P=1/M$，而每个消息的信息量 I 应为：

$$I = \log_2 M = \log_2\left(\frac{1}{P}\right) \tag{1.2}$$

同时可见，M 个等概率消息，每个消息的信息量 I 正好等于传输 M 个消息之一所需要的最少的二进制脉冲个数。

我们进一步讨论非等概消息及平均信息量问题。

如果信源发出 M 个消息：$A_1, A_2, \cdots, A_M$；

每个消息对应的概率为：$P_1, P_2, \cdots, P_M$。其中，$P_1 \neq P_2 \cdots \neq P_M$。

设信源发出的消息组成消息序列进行传输。由 M 个消息可以组成 N 个消息组合成的若干个消息序列，如 $M=4$ 的四个消息为 A_1, A_2, A_3, A_4，组成 $N=100$ 的某一个消息序列 $S_1 = A_1A_2A_4A_3A_2\cdots$，则 A_1, A_2, A_3, A_4 必在 S_1 中重复出现多次。若设在 S_1 中

A_1 出现 N_1 次，A_1 出现的频率为 N_1/N；

A_2 出现 N_2 次，A_2 出现的频率为 N_2/N；

A_3 出现 N_3 次，A_3 出现的频率为 N_3/N；

A_4 出现 N_4 次，A_4 出现的频率为 N_4/N；

一般而言，M 个消息，则 A_M 出现 N_M 次，A_M 出现的频率为 N_M/N。

由概率论知，当 $N \to \infty$，A_i 出现的频率 N_i/N 收敛于 A_i 发生的概率 P_i。

信源发出 M 个非等概消息，发生消息序列 S_1 的概率应是 S_1 中各个消息分别多次发生的联合概率，在各个消息的发生是独立的条件下，消息序列 S_1 的发生概率 $P(S_1)$ 为：

$$P(S_1) = \underbrace{P_1 \cdot P_1 \cdot P_1 \cdots P_1}_{NP_1} \underbrace{P_2 \cdot P_2 \cdot P_2 \cdots P_2}_{NP_2} \cdots \underbrace{P_M \cdot P_M \cdot P_M \cdots P_M}_{NP_M}$$

$$= \prod_{i=1}^{M} P_i^{NP_i} \tag{1.3}$$

应该注意到，由 $A_1, A_2, \cdots, A_M$ M 个消息可以组成若干个长度为 N 个消息组成的序列，如 S_1 序列，S_2 序列，S_3 序列，……，由于 N 很大，在 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 各序列中，$A_1, A_2, \cdots, A_M$ 出现的次数可以设为相同，由上述可知，$P(S_1) = P(S_2) = \cdots = P(S_m)$. 因此，消息序列 S_1 的信息量 I 为：

$$I = \log_2 \frac{1}{P(S_1)} = \log_2\left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{M} P_i^{NP_i}}\right) = N\sum_{i=1}^{M} P_i \log_2\left(\frac{1}{P_i}\right)$$

$$= -N\sum_{i=1}^{M} P_i \log_2 P_i \tag{1.4}$$

序列中每个消息的平均信息量 $\bar{I}$ 为：

$$\bar{I} = I/N = \sum_{i=1}^{M} P_i \log_2(1/P_i) = -\sum_{i=1}^{M} P_i \log_2 P_i \tag{1.5}$$

式(1.5)是不难理解的。信源发出 M 个非等概消息，其中任一消息 A_i 可以看成是一个随机变量，它的发生概率为 P_i，它具有的信息量为 $\log_2(1/P_i)$ 比特，则 M 个消息中每个消息的平均信息量 $\bar{I}$ 应等于各个消息各自的信息量以各自的概率加权相加。因此，M 个非等概消息中每个消息的信息量等于该消息的发生概率的倒数的对数函数。即概率 P_i 的消息 A_i 具有的信息量 I 为：

$$I = \log_2\left(\frac{1}{P_i}\right)$$

由此可知，信源发出 M 个离散消息 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_i, \cdots, A_M$，在消息为等概率及非等概率的两种情况下，每个消息的信息量总是等于该消息发生概率倒数的对数。在消息为等概率下，

每个消息的信息量与平均信息量相同；而在非等概率下，每个消息的信息量与平均信息量不等，通常用平均信息量来表示消息的信息量。平均信息量 $\bar{I}$ 称之为信源的熵或平均熵。

关于信息量的更严密的论述及讨论，将在本教材的最后一章中进行。

1.2 信息传输系统模型

信息传输系统模型可以分为两类。一类是接收对象获得信源给出的原消息或其信息实质。图 1.1 表示这一类系统模型。电话、电报、广播、电视系统均属此类模型。

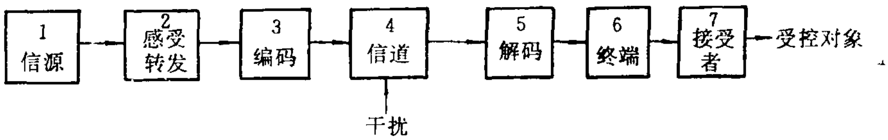


图 1.1 信息传输系统模型之一

另一类模型，如图 1.2 示。此类系统使接收者获得中介体的参数，从而了解中介体。雷达、声纳和地震法勘探系统就属于此类模型。

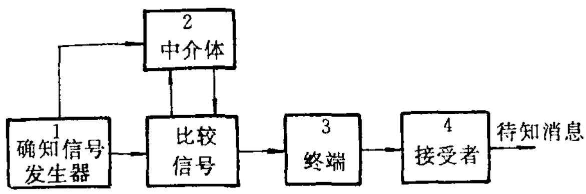


图 1.2 信息传输系统模型之二

现在对两类模型予以概括性的介绍。

第一类模型图 1.1 中，方框 1 是信源。它有许多种具体类型。它可以代表某个人的想法，可以代表某幅活动或静止的图象，可以代表某个传感器的输出，也可以代表某些声响和某处的综合情况等。方框 2 是对于信源输出的一次感受转发，可称之为换能器。它的输出可能是电信号，亦可能是非电量的消息。方框 3 称为编码部分。它把从方框 2 给出的消息变换成适合于信道（方框 4）中传送的信号，以达到便于传送、传信可靠、迅速有效及安全的目的。方框 3 包括一次或二次真正的编码器和调制器，如图 1.3 所示。

第一次编码称为信源编码，目的在于提高通信的有效性。它把消息变成精炼的、无多余度的码字。例如电报，常将一些复合词合并编为一个码，如（几月）、（几日）等。有时也考虑把消息编成合理长度的码。如英语中字母 e 的出现概率最大，在莫尔斯（Morse）码中就编成最短的码。干扰主要发生在方框 4 的信道中，因此，信源编码并不考虑抗干扰问题。

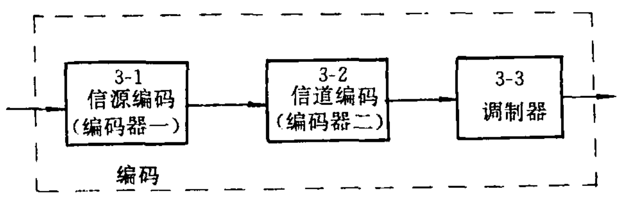


图 1.3 编码部分方框图

第二次编码称为信道编码，亦称为抗干扰编码或纠错编码。其目的是为了提高通信的可靠性。信道编码中，人为地加入多余度，使在干扰背景下，便于检出或纠正传错了的码元。

调制器的目的是为了将基带信号变换到适合于信道传送的形式，同时也是为了避开干扰（如避开强干扰频段）、对抗干扰（如频率分集）、多路复用以及保密等等采取的重要措施。通常调制器之前的信号称为基带信号，之后的信号称为已调信号或频带信号。它们均蕴含着原消

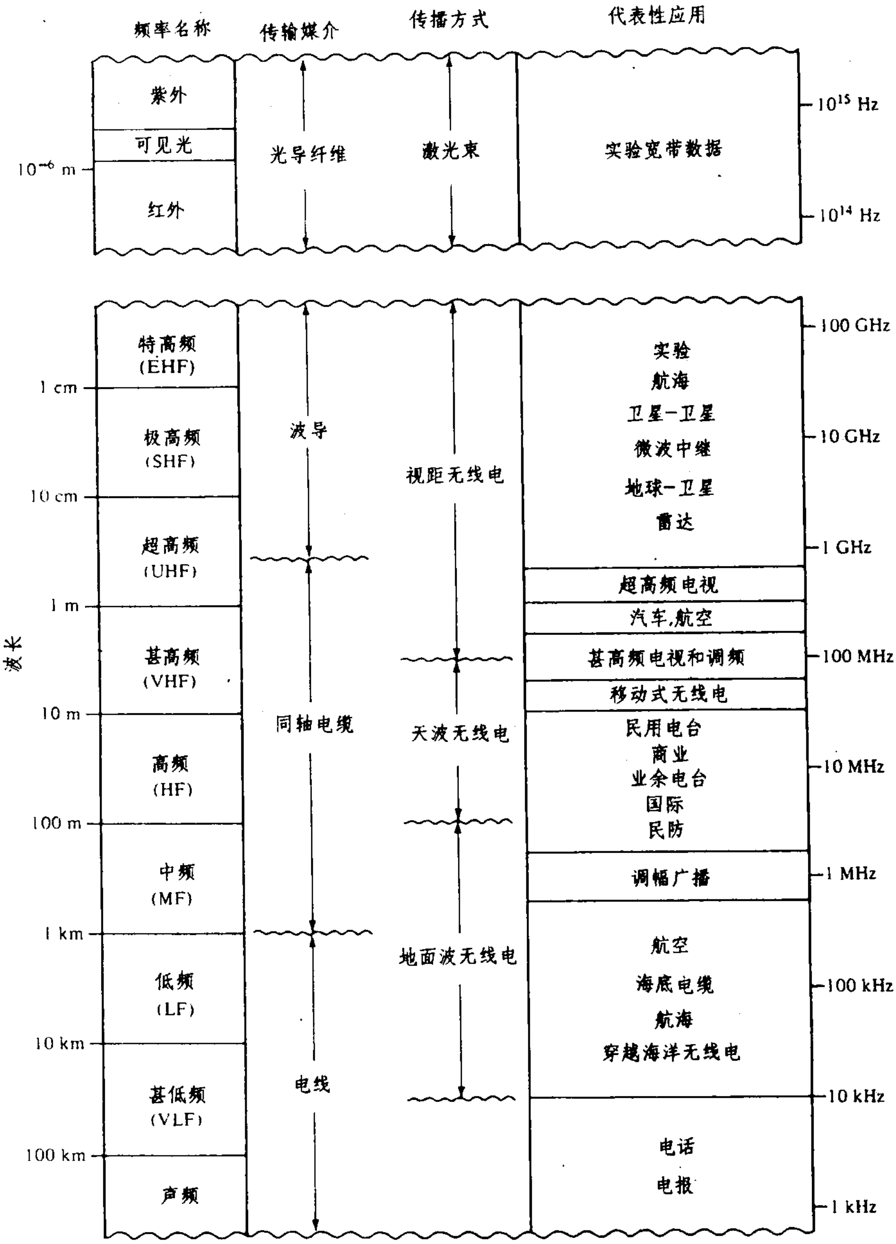


图 1.4 电磁波频谱

息,但是它们在形式上与原消息相比可以不同,甚至面目全非。由此可见,调制实质上是一种为了有效、可靠传输信息的信号处理方法。通过调制,把基带信号的频谱搬移到了载频位置。按电磁波理论,不同频率的电磁行波与传输介质、传播方式有密切关系。因此,对不同应用场合选用载波的范围也已有结论。作为参考,图 1.4 给出了一部分适合信号传输的电磁波频带,图中包括自由空间波长、频带名称、典型的传输媒介和传播方式。图中所指出的具有代表性的应用场合在国际上已获公认。

图 1.1 中方框 4 为信道。它常是干扰或噪声的主要来源之处,因为信道传输的中介体部分常跨越较长的距离,容易暴露于干扰之下。同时,长距离传输造成信号衰减,使得干扰的作用相对地严重。此外,传输中给的参数有时是相对稳定的,但有时是被调变的,例如短波信道、对

流层散射信道、在运动中的车、船运载体等所遇到的无线电信道，常是被随机地或确定地调变的，这些调变导致附加的干扰，如果调变过程表现为对于信道的参量的乘法，则造成的干扰称为乘性干扰。

图 1.1 中方框 5，它包括接收端的解调器及一次或两次解码部分，如图 1.5 所示。

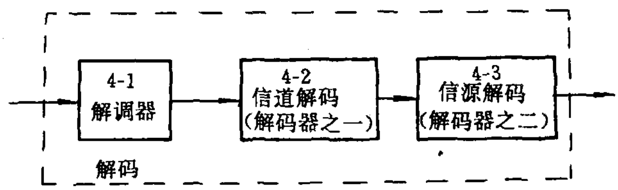


图 1.5　解码部分方框图

图 1.1 中方框 6 称为信号处理终端环节。它针对方框 3、4、5 乃至方框 2 所引入的畸变及干扰后果，予以最大程度的克服，力图恢复从信源发出的需要的消息。它的输出送向受信者——方框 7，以获得真正有用的信息，用于命令，控制和指挥某些事物，达到信息传输过程的最终目的。

总上，模型是针对两种情况讨论的。当信源给出的是连续消息并进行模拟信号的传输时，方框 3 及 5 可以不包括编码、解码部分，仅有调制、解调环节；当信源给出的是离散消息或对连续信号进行数字化后进行数字信号的传输时，则编码、解码环节是必不可少的。

应该指出，从通信系统的角度出发，图 1.1 中方框 2 及方框 3 组成一个发射机，方框 5 及方框 6 组成一个接收机，图中表示的是一个单向或称单工(SX)的传输系统。双向传输则要求每一端都有一个发射机和一个接收机。全双工(FDX)系统有一个允许同时进行双向传输的信道。半双工(HDX)系统可进行双向传输，但不能同时进行。

另一类信息传输系统模型如图 1.2 所示。

在这类系统模型中，人们关心的对象是关于中介体的某些数据信息。典型例子是雷达测距和测速、声纳以及地震法勘探等等。在这些系统中，信号源发出确知信号，信号经中介体传播，得到回收的信号，将回波信号与发出信号比较，可以得到关于中介体的一些有用数据。例如时差代表反射体距离，频差代表反射体经向速度，回波的组合反映中介体结构，而天线方向与回波强度的关系，提供关于反射体所在方向的数据等等。在这些系统中，当反射体距离比较远时，回波相对来说是微弱的，人们首先面临弱信号的检测问题。为了解决检测问题，涉及信号设计及相应的信号过滤问题。在从时差得知距离，从频差得知速度，由于回波信号被干扰侵入，所以又涉及关于信号参量的估计问题。总的来说，两类模型中迂到的基本理论问题是十分相近的。

本书以图 1.1 信息传输系统模型为主，将讨论以下主要内容：对确知信号的认识和在统计意义下对随机信号和干扰的认识(第二章及第三章)；研究匹配滤波器理论和由此引出的优选信号问题(第四章)；模拟和数字的各类调制、解调的方案及其性能(第五、六、七、八、九章)；信源编码，信道编码和信息论基础(第十章)。对于信号检测、估计、过滤与预测等内容将在另外课程和教材中安排。

习　　题

1-1　有一组 12 个符号组成的消息，每个符号均有四种电平，设四种电平发生概率相等，试求这一组消息所含的信息量。若每秒传输 10 组消息，则一分钟传输多少信息量？

1-2　消息序列是由 4 种符号 0、1、2、3 组成，四种符号出现的概率分别为 3/8、1/4、1/4、1/8，

而且每个消息出现都是互相独立的，求下列长度为 57 个符号组成的消息序列"2 0 1 0 2 0 1 3 0 3 2 1 3 0 0 1 2 0 3 2 1 0 1 0 0 3 2 1 0 1 0 0 2 3 1 0 2 0 0 2 0 1 0 3 1 2 0 3 2 1 0 0 1 2 0 2 1 0"的信息量和每个消息的平均信息量。

1-3 某气象员用明码报告气象状态，有四种可能的消息：晴、云、雨、雾。若每个消息是等概率的，发送每个消息最少所需的二进制脉冲数是多少？又若该四个消息的概率分别为 1/4、1/8、1/8、1/2。此时，平均而言每个消息的信息量小于 2bit。因此可以应用平均而言小于 2bit 的码。试证明应用下列编码实际仅需 1.75bit/消息。

晴：10　　云：110　　雨：111　　雾：0

2　　3　　3　　1.

$\frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{8}\times 3 + \frac{1}{8}\times 3 + \frac{1}{2}\times 1$

$= \frac{7}{4} = 1.75$

~~2+2+3×3+3×3+1~~

第二章　确定信号的分析

信号分析是研究信息传输和处理的基础。因为信号代表了消息，而消息携带了信息，信息的传输和处理实际上是通过对信号的传输和处理来完成的。

确定信号是指确定的时间函数，该信号随时间变化的规律是确定的，在理论上总能找到一个确定的或近似的函数表达式来表示该信号随时间变化的规律。对于确定信号应该说不含有信息，因而也没有必要去传输。但是几种不同的确定信号之一需要传输，具有不确定性，它是信息传输的基本方法之一。同时，确定信号的分析方法又是随机信号分析的基础。因此，研究信息传输和处理，对确定信号的深入的认识是至关重要的。

2.1　信号及其正交展开变换

信号分析的最基本的方法是用一个完备、正交的函数系$\{u_k\}$展开信号$x(t)$，目的是为了揭示信号的实质以及便于研究$x(t)$在系统中的响应，从而了解信号，有效合理地去处理及传输信号。例如，用完备、正交的三角函数系对周期信号$x(t)$进行展开，就能得到$x(t)$的离散频谱，从而可以从时域和频域来研究信号$x(t)$。因而也就建立了信号具有频带性和信号频带宽度的概念，建立了信号波形及其所包含的频率分量之间的联系，建立了滤波器和波形变换等概念。现在我们对信号正交展开的一般问题作一回顾。

2.1.1　信号正交展开的一般表示

在任一区间(t_0,t_0+T)内，某函数系$\{u_k\}=\{u_0(t),u_1(t),\cdots\}$，互相正交。设信号$x(t)$分段连续，$x(t)$发生于$(t_0,t_0+T)$。则$x(t)$在该区间可以用$x(t)$在$\{u_k(t)\}$上各分量之和来表示，这称为$x(t)$在区间$(t_0,t_0+T)$上用某一正交函数$\{u_k(t)\}$的正交函数展开。

函数系$\{u_k(t)\}$在(t_0,t_0+T)上满足

$$\int_{t_0}^{t_0+T}u_k(t)u_l(t)dt=\begin{cases}c\neq 0, & 当\ l=k\\ 0, & 当\ l\neq k\end{cases}\tag{2.1}$$

称$\{u_k(t)\}$在区间(t_0,t_0+T)上正交的函数系。若$c=1$，称$\{u_k(t)\}$为标准化正交系。

正交函数系$\{u_k(t)\}$展开信号$x(t)$，表示为

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_ku_k(t)\tag{2.2}$$

式中，$u_k(t)$是属于正交函数系$\{u_k(t)\}$序号为k的函数，a_k是作如此展开时的一个特征量或系数。

因此，用函数系$\{u_k(t)\}$对$x(t)$作正交展开，实质上就是用$\{a_k\}$，$\{u_k(t)\}$作为序号k的函数来描述$x(t)$作为t的函数。

利用正交条件，特征量a_k很容易求得，对式(2.2)两边乘以$u_l(t)$，并在规定区间(t_0,t_0+T)积分，将有

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)u_l(t)dt = \int_{t_0}^{t_0+T}\sum_{k=0}^{\infty}a_k u_k(t)u_l(t)dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_{t_0}^{t_0+T}u_k(t)u_l(t)dt = a_l c$$

因而
$$a_l = \frac{1}{c}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)u_l(t)dt \tag{2.3}$$

或者有
$$a_k = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)u_k(t)dt}{\int_{t_0}^{t_0+T}u_k^2(t)dt} = \frac{1}{c}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)u_k(t)dt$$

式(2.1)、(2.2)及(2.3)一起，表示了用$\{u_k(t)\}$展开$x(t)$的关系。

我们如果在$x(t)$的展开式中，k取有限项N，则截断展开式$\hat{x}_N(t)$为

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{k=0}^{N}a_k u_k(t) \tag{2.4}$$

这时，$x(t)$与$\hat{x}_N(t)$在(t_0,t_0+T)的均方误差Q为

$$Q = \int_{t_0}^{t_0+T}[x(t) - \hat{x}_N(t)]^2dt \tag{2.5}$$

显然，恒有

$$Q \geqslant 0 \tag{2.6}$$

设$\{u_k(t)\}$为标准化正交系，则

$$\int_{t_0}^{t_0+T}[x(t) - \sum_{k=0}^{N}a_k u_k(t)]^2dt \geqslant 0 \tag{2.7}$$

即
$$\int_{t_0}^{t_0+T}x^2(t)dt - 2\sum_{k=0}^{N}a_k\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)u_k(t)dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_0+T}[\sum_{k=0}^{N}a_k u_k(t)]^2dt \geqslant 0$$

即
$$\int_{t_0}^{t_0+T}x^2(t)dt - 2\sum_{k=0}^{N}a_k^2 + \sum_{k=0}^{N}a_k^2 \geqslant 0$$

因而
$$\int_{t_0}^{t_0+T}x^2(t)dt \geqslant \sum_{k=0}^{N}a_k^2 \tag{2.8}$$

式中，积分与N无关，所以N取任意值不等式均成立，于是，有

$$\int_{t_0}^{t_0+T}x^2(t)dt \geqslant \sum_{k=0}^{\infty}a_k^2 \tag{2.9}$$

这个不等式，对于任何标准化的正交函数系都成立。这称为贝塞尔(Bessel)不等式。它说明一个事实：任意函数$x(t)$的式(2.2)型展开式中的系数的平方和总是收敛的。

当将$x(t)$作N段截断展开

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{k=0}^{N}a_k u_k(t)$$

在N段截断情况下，是否存在将系数改变为不同于式(2.3)的a_k值后，得到比$\hat{x}_N(t)$在均方意义下更接近$x(t)$的N段截断展开？

我们且设新的展开式为$\sum_{k=0}^{N}b_k u_k(t)$。我们假设它在均方意义下比$\hat{x}_N(t) = \sum_{k=0}^{N}a_k u_k(t)$更接近

$x(t)$。如果成立，截段展开 $\hat{x}_N(t)$ 就没有可以用之逼近 $x(t)$ 的价值。

设 $\sum_{k=0}^{N} b_k u_k(t)$ 与 $x(t)$ 的均方误差为 M

$$
\begin{aligned}
M &= \int_{t_0}^{t_0+T}[x(t) - \sum_{k=0}^{N} b_k u_k(t)]^2 dt \\
&= \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)dt - 2\sum_{k=0}^{N} b_k \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)u_k(t)dt \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_0+T}[\sum_{k=0}^{N} b_k u_k(t)]^2 dt
\end{aligned}
$$

当 $\{u_k(t)\}$ 为标准正交系，有

$$M = \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)dt - \sum_{k=0}^{N} a_k^2 + \sum_{k=0}^{N}(b_k - a_k)^2$$

显然，只有当

$$b_k = a_k \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

才有 M 最小。因而，$\hat{x}_N(t)$ 已是最小均方意义下的 $x(t)$ 的 N 段截断逼近。这个结论，对于作任何正交展开都成立。

显然，随 N 增加，有 $\sum_{k=0}^{N} a_k^2$ 单调增大，而前已证明式(2.9)中 a_k^2 之和总是收敛的，这样

$$Q = \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)dt - \sum_{k=0}^{N} a_k^2$$

必随 N 增大而减小。如果选 N 足够大可以使 Q 小于任意小的正数，那么，应有

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)dt = \sum_{k=0}^{N} a_k^2 \tag{2.10}$$

在这样情况下，$\{u_k(t)\}$ 是完备的，不需要其它不属于 $\{u_k(t)\}$ 的函数来补充参加 $x(t)$ 的精确展开。

式(2.10)称为完备性关系。它是描述 $x(t)$ 的总能量的关系式，称为瑞利帕斯瓦尔(Rayleigh—Parseval)定理。它指出：信号 $x(t)$ 的总能量等于它的正交展开的各项能量之和。

2.1.2 信号正交展开的讨论

由前已述，用正交完备函数系 $\{u_k(t)\}$ 展开信号 $x(t)$，实质上就是用 $\{a_k\}$ 及 $\{u_k(t)\}$ 作为 k 的函数来表示 $x(t)$ 作为 t 的函数。$\{a_k\}$ 是作为 $\{u_k(t)\}$ 展开 $x(t)$ 时的一个重要特征量或称为展开时的系数。作为正交展开的一般表示式，当 k 取至穷时是精确的。此时 $x(t)$ 与 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k(t)$ 的均方误差为零，但在实际对 $x(t)$ 展开时，k 取无穷是不方便也不必要的。因此定性讨论一下 k 取有限值 N 时的情况是有必要的。

当 $k = N$ 时；则成立 $\hat{x}_N(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k u_k(t)$。一般来说，用 $\hat{x}_N(t)$ 来近似 $x(t)$，其均方误差必有

$$Q = \int_{t_0}^{t_0+T}[x(t) - \hat{x}(t)]^2 dt \geqslant 0$$

那末在 $x(t)$ 及 $\{u_k(t)\}$ 既定情况下，当 k 取有限项 N 时，如何使 Q 最小？这决定于 a_k 的选择。