

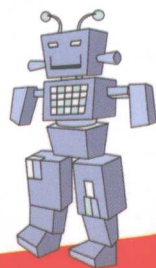
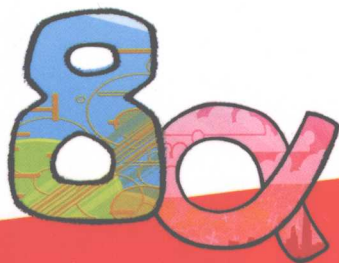


日本连续 30 周畅销书排行榜第一名

图解 数学学习法

让抽象的数学直观起来

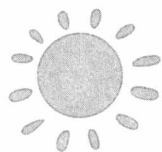
〔日〕畑村洋太郎 著 刘玮 译



不理解数学的本质，做再多题也没用。

用直观的图解，让你搞清楚抽象的数学概念、定理、公式，

从根本上提高你的数学理解力！



图解数学学习法

让抽象的数学直观起来

日本连续 30 周畅销书排行榜第一名

〔日〕畑村洋太郎 著 刘玮 译

南海出版公司

2008·海口

图书在版编目(CIP)数据

图解数学学习法：让抽象的数学直观起来 / [日] 畑村洋太郎著；刘玮译. —海口：南海出版公司，2008.1
ISBN 978-7-5442-3914-1

I. 图… II. ①畑…②刘… III. 数学—学习方法—通俗读物 IV. O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 187578 号

著作权合同登记号 图字：30-2007-105

CHOKKAN DE WAKARU SUGAKU

by Yotaro Hatamura

© 2004 by Yotaro Hatamura

Originally published in Japanese by Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo, 2004.

This Chinese (simplified character) language edition translation rights arrangement with the author c/o Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo through DAIKOUSHA INC., KAWAGOE.

All rights reserved

TUJIE SHUXUE XUEXIFA; RANG CHOUXIANG DE SHUXUE ZHIGUAN QILAI
图解数学学习法：让抽象的数学直观起来

作者 [日]畑村洋太郎

译者 刘 玮

责任编辑 林妮娜

特邀编辑 李玉珍

丛书策划 新经典文化 www.readinglife.com

装帧设计 徐 蕊

内文制作 田晓波

封面插图 陈 昭

出版发行 南海出版公司

电话 (0898) 66568511

社 址 海口市海秀中路 51 号星华大厦五楼 邮编 570206

电子邮箱 nanhaicbgs@yahoo.com.cn

经 销 新华书店

印 刷 三河市三佳印刷装订有限公司

开 本 710 毫米 × 930 毫米 1/16

印 张 11

字 数 180 千

版 次 2008 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5442-3914-1

定 价 20.00 元

南海版图书 版权所有 盗版必究

前言

40年来，我一直有一个愿望——“要写一本这样的书”，今天终于如愿以偿了。

这个念头最初萌芽于我19岁刚上大学的时候。当时，我怎么也听不懂数学课，我想：“大概是我太笨了，脑子好使的人应该早就听懂了。”

不过，好歹我也考上了东京大学，还算是个高材生，经过努力，终于跟上了课程的进度。但是，我心里还是不舒服，觉得有些地方没彻底弄明白。“为什么心里觉得不舒服呢？”我想来想去，终于明白了。原来我会解数学题，却不了解数学的本质。

意识到这个问题以后，我就很想买一本清楚地揭示数学本质的书。但是，找来找去也找不到。最后，我觉悟到只能靠自己的头脑去理解和揣摩数学的本质。

从此以后，我开始了艰苦的征途。我像一只筋疲力尽的狗，流着大汗，汪汪哀号，为探究数学的本质而战斗。即使成了机械工程学方面的专家，这种状况也没有改变。直到60岁即将退休的时候，我才稍微有了点自信，觉得自己总算把握了数学的本质。

可是，或许什么时候我两眼一闭，辛苦得来的成果就会被带进棺材里去。所以我决定，等到退休后有了时间，一定要将我的心得写成一本书。我一直在为此努力。2001年，我退休了，终于写成了这本书。

这本好不容易才得以面世的书，是写给下面这些人的：

1. 数学很差，但想学好的人，特别是想尽早找到窍门的人。

2. 刚开始学数学的高中生，希望进行深入思考、理解数学的本质。
3. 学过数学，现在已经进入社会、参加工作的人，虽然工作中不一定要用到数学。
4. 至今还没有厌倦数学的人。
5. 正在学习数学的大学生。
6. 教授数学或是工程技术的老师。
7. 希望把握数学本质的人。

本书和普通的数学书完全不同。它讲的是高等数学，但不是教科书，不会教你怎么解数学题。所以，不要把它当成考大学的参考书。不过，我保证读了这本书，你就能轻松地把握数学的本质。

抓不住思想和概念的本质，就像是穿着借来的衣服，总觉得不舒服。在本书中，我尝试挖掘出数学中隐藏着的思想和概念。书中的讲解不是停留在表面上，而是追根究底，挖掘出上位概念。只有理解了上位概念，才能真正理解。把握了概念的本质，获得了直观的感受，才不会一知半解、糊里糊涂。

数学学习中最大的问题，是很多人对数学产生了厌倦情绪。高中分为文科、理科，有些人就是因为不想学数学而选择了文科。

但是，数学真的那么招人厌吗？的确，现在这种教学方法，让人无法不讨厌数学。为什么呢？很简单，因为学生们没有真正理解数学。

用填鸭式的教学方式向学生灌输知识，学生不厌倦才怪。没人想去理解自己讨厌的东西。因此，理解也就变得遥不可及。

数学中有很多定义、定理。老师会解释这些定义、定理的证明过程，这本来没有错。但是，很多学生觉得证明过程和自己无关。为什么呢？

因为学生觉得自己和老师身在两个世界里，老师们在数学的抽象世界里，自己则在现实世界中。老师们觉得理所当然的事，在现实世界中却显得不可理喻。找不到两个世界的交集点，就无法相互沟通。

但是，等等。其实我们的日常生活和数学的抽象世界是紧密相连的。例如，微分、积分和产业界紧密相关。生产量与社会整体活动成比例增长的机械制造业被称为“微分型产业”；现有生产量决定商业规模大小的维修业被称为“积分型产业”。

也就是说，数学老师只进行了抽象的解释，却没有向我们指明从现实世界进入抽象世界的路径。数学本来是人人都懂的东西。只要把日常生活和抽象世界紧紧联系起来，就能理解数学。

那么，怎样才算“理解”呢？理解就是外界的事物和头脑中原有的“模板”相符合。在本书最后的“Q&A”中我们还要详细谈到这个问题，请大家留意。总之，外界事物和头脑中的模板完全吻合，人们就觉得自己理解了这一事物。也就是说，理解是大脑中瞬间发生的、对对象的确认动作。换句话说，理解是一种直观感受。

有些人思想顽固，认为直观地理解是不科学的，这些人没有认真地思考什么是理解。我认为，要弄清楚什么是理解，必须参考脑科学的研究成果。脑科学研究证明，理解时，在大脑中浮现出事物的形象十分重要。从一个平面上来理解数学是不行的。数学是三维，甚至是多维的立体事物。本书中的每一章，都揭示了这个多维体的一个侧面。我的目标是把“难懂的数学”变成“易懂的数学”，再从“易懂的数学”变成“可以运用的数学”。理解了数学却不能运用，也是毫无意义的。

最后，在进入正文之前，我想谈一谈本书的出版经过。2001年3月我从东京大学退休，最后一节课上讲道：“我想变成蝉。”30多年来，我

一直埋首于大学这片“土壤”中，研究和教授工程学，过得很充实。但是，退休以后我却想像蝉一样爬出地面，在众人面前大声发表自己的言论。我想把自己一直以来的所思所想拿出来与大家分享。那节课结束时，我说：“从今以后，我要专心著书，比如我构思了40年的数学书。从今天开始，我正式退休了，我一定要写成这本书。”

岩波书店编辑部的永沼浩一听了我的最后一堂课，他一直记住了我的话。一年以后，他打电话来问：“老师，那本书写得怎么样了？”于是，我们一拍即合，决定出这本书。我退休后一直在工学院大学工作，我对学生们说：“我要写一本书，你们愿意帮忙吗？”学生们很高兴地答应了。于是，我把他们叫来，开了一个“畑村数学私塾”。每月不少于1次，每次上3个小时的课，坚持了几十次。他们向我倾诉了对数学的不满以及存在的疑问。永沼先生旁听并记录了我们讨论的主要内容。他还为我写了草稿，建议我采用合适的形式表达自己的想法。由于他的帮忙，这本书才得以完成。我向永沼先生表示深深的谢意。

另外，还要感谢长尾高明老师在百忙之中认真读完了我的书稿，提出了恳切的意见。

就这样，本书面世了。除了这本书，我还想写一系列书，主要是针对工科和理科的，如热力学、复变函数论、矢量张量、振动学等。全部完成大概要花上二三十年，我得好好利用有限的时间，争取多活几年了。

希望这本书能带给读者一些启发，从新颖有趣的角度来思考问题。如果能这样的话，我将万分欣慰。

畑村洋太郎

目 录

前言

1 找出看不见的直角三角形

知道山的高度又怎么样 2

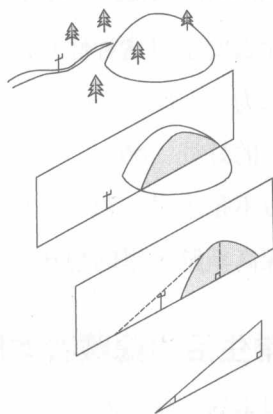
怎样研究直角三角形 5

用长度比来表示角度 6

为什么要找出直角三角形 9

转动的棒 10

sin 的由来 14



2 数字背后的意义

不可思议的“行列” 18

矩阵是怎么出现的 22

什么是矩阵 25

数字编组 29

矩阵乘法运算，为什么由→变成↓ 32

矩阵活动漫画 42

$$\begin{pmatrix} 5 & 24 & 18 \\ 8 & 12 & 23 \end{pmatrix}$$

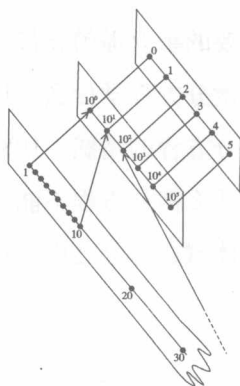
	WEGA (台)	VAIO (台)	PLAYSTATION (台)
新宿店	5	24	18
池袋店	8	12	23

3 改变视角，创造新数字

指数背后隐藏着什么 46

把大数字变成小数字 47

连接乘法和加法的桥梁 50



贷款和 e 53

使用 e 很方便 58

4 把复杂的问题变简单

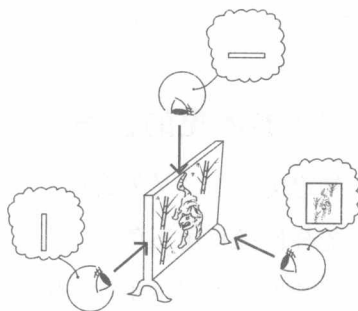
为什么要学习这种怪东西 62

合二为一 63

复数的好处 66

虚数不是幽灵 72

窥探高斯脑子里的想法 76



5 日常生活中隐藏着本质

运用生活感觉 82

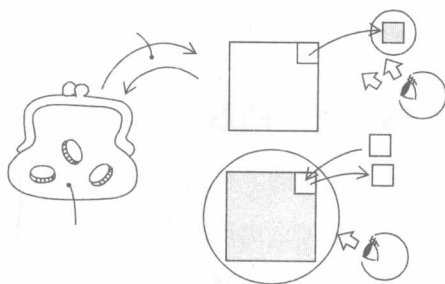
将微分一分为二 85

积少成多 90

直观地理解微分 93

无法“返祖” 95

描绘微分和积分的关系 97



6 通过部分看整体

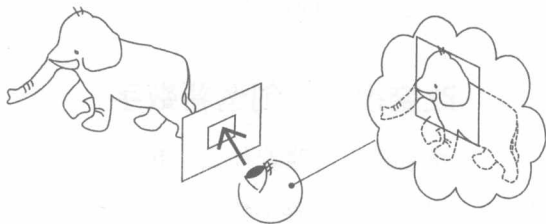
重要的事要提前交待 104

学微分方程学什么 106

微分方程的精髓 108

为什么微分方程不能应用 111

整体藏在部分之中 116



分离变量为什么很重要 118

解微分方程 119

7 未来被等分

一切都可以换算成金钱 124

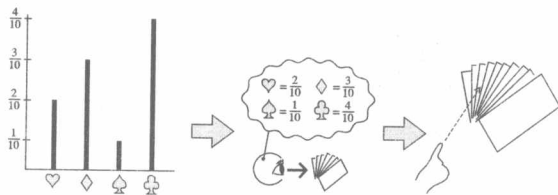
概率里的小花招 125

概率讲的是未来的事 127

概率里的思维转换 128

通过过去了解未来 133

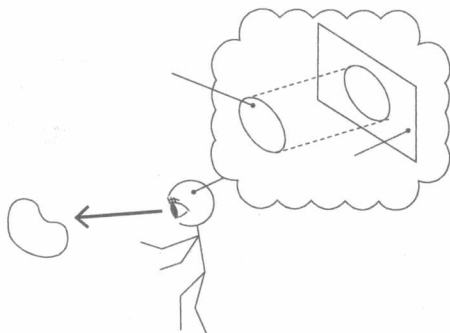
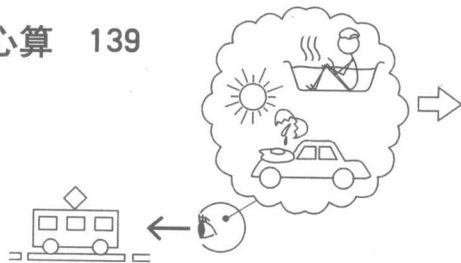
概率就是大概的几率 135



附录1 直观的诀窍在于默记和心算 139

附录2 自己算出来 147

Q&A 为什么不懂数学 153



1……找出看不见的直角三角形

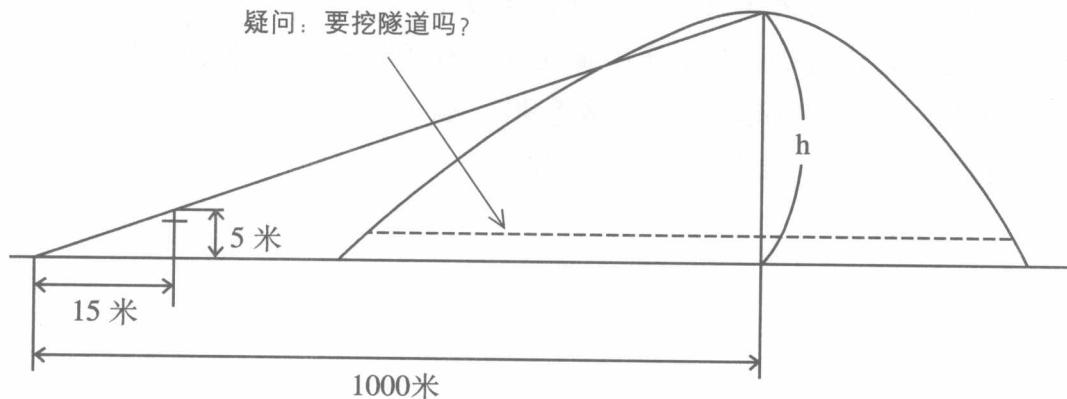
sin、cos

提起sin、cos,我就想起高中时一位朋友说过的话:“我最讨厌sin、cos了。”不过,我从小就很喜欢数学,所以一开始接触三角函数时,并不觉得讨厌。sin还好,cos值会随着角度增大而变小,多少让人觉得不习惯。一般来说,应该是角度变大值就变大,角度变小值就变小。cos却是角度变大值变小,角度变小值变大,不符合一般人的思维习惯。更奇怪的是tg,角度接近 90° ,值就变得无限大。40年过去了,我依然觉得很习惯。

●知道山的高度又怎么样

“学文科的人讨厌数学”已经成为一种“传统”。许多人选择文科就是因为可以不学数学。那么，大家是从什么时候开始讨厌数学的呢？很多人回答：“就是从sin、cos开始的。”有不少学理科的人也说：“最讨厌的就是sin、cos。”他们一边不得不用着sin、cos，一边在心里嘀咕：“这些东西有什么用？”

实际上我也是这样。小学六年级时，教数学的加藤老师对我们说：“测量电线杆的高度就可以知道山的高度。”然后在黑板上画了下面这个图。



$$h = \frac{5}{15} \times 1000 \text{ (米)} \approx 333 \text{ (米)}$$

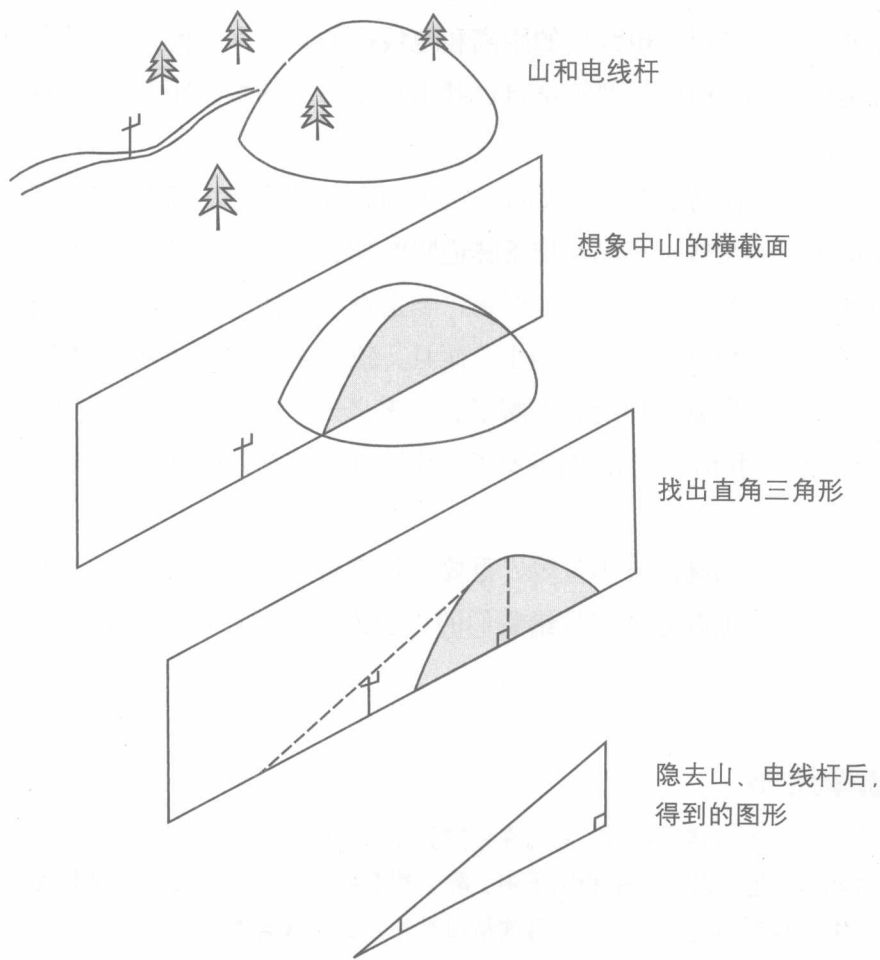
加藤老师是这样讲解的：抬头看电线杆的角度和抬头看山顶的角度是一样的。已知自己到电线杆的距离和电线杆的高度，黑板上画的两个三角形是相似的，所以只要测量自己到山顶正下方的直线距离，就可以知道山的高度。

听了讲解，我马上在心里大叫：“不可能！”想想看，怎么测量自己到山顶正下方的直线距离呢？挖条隧道吗？加藤老师大概是为了让大家更容易理解，才举了这个例子。但是，学生看了这样的例子，注意力很容易被吸引到与数学无关的东西上。而且，硬要说这种不合常理的事在现实中存在，学生就更加疑惑不解了。一来二去，数学就沦落到“人见人厌”的地步。我活到现在60多岁了，从没听说过有人用这种方法来测量山的高度。

其实知道山的高度并不重要，重要的是看着山，在脑海中描绘出看不见的三角形。加藤老师想教给我们的，应该是这一点吧。

数学1·2·3

为了让学生更容易理解，老师在讲解数学时，往往会举日常生活中的例子来说明。但是，老师所举的例子中，除了想教的数学知识，往往还有其他要素。学生和老师的视角不同，喜欢从日常生活的角度来看这些例子，因此容易被与数学无关的东西吸引，枉费了老师的苦心。一旦注意力放错了地方，学生的头脑就转不过弯儿了。而老师不知道学生的注意力已经走岔了，会想：“这么简单的问题都不懂，这帮孩子真是没救了。”老师与学生的思维方式的差异，已经成为数学教学的一大阻碍。可惜很少有老师注意到这一点。

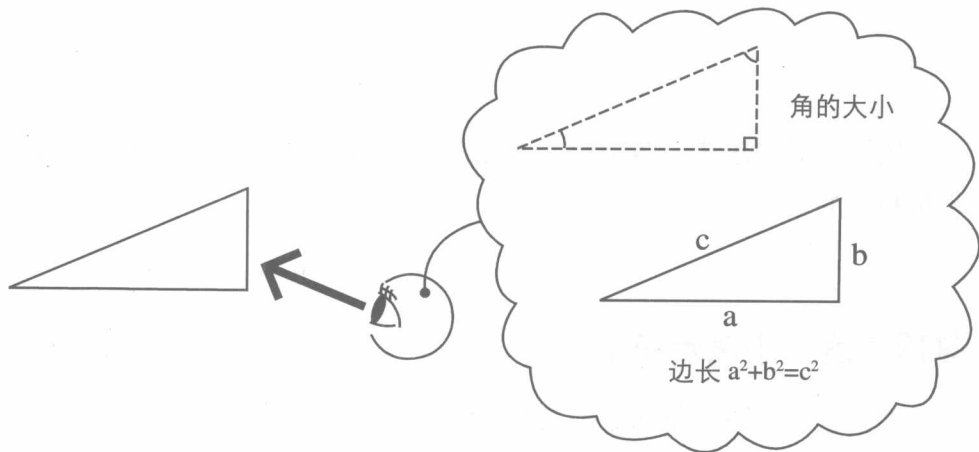


请看上面的图，最重要的是思维过程。看到具体事物——山，在大脑中画出抽象图案——直角三角形。像这样，从具体到抽象的思考活动，是理解事物的开始。

●怎样研究直角三角形

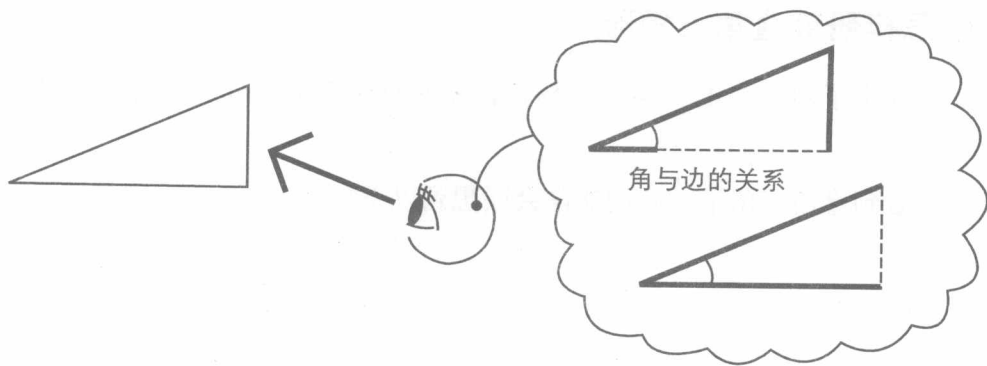
找出了看不见的直角三角形，接下来该怎么研究这个直角三角形呢？

看到直角三角形，我们通常会联想到以下特征。



也就是说，当我们看到直角三角形时，首先关注的是“角度”和“边长”。看它的三个角中是否有一个角是 90° ，或者三条边的长度是否符合勾股定理： $a^2+b^2=c^2$ 。

这是一般的思考角度。 \sin 、 \cos 并不是从这个角度来研究直角三角形的。它们探讨的是“角”与“边”的关系。



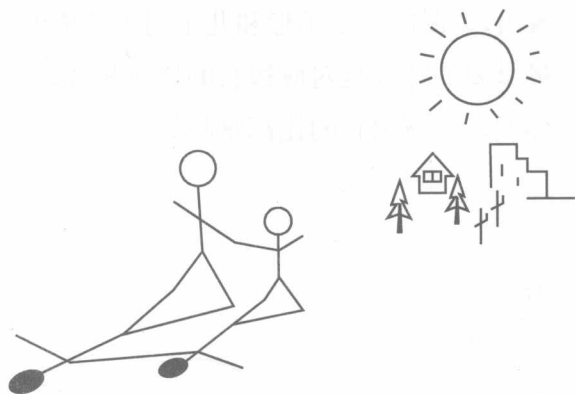
按照一般的想法，角是角，边是边。但 \sin 、 \cos 却另辟蹊径——研究角和边的关系。

●用长度比来表示角度

那么，怎样研究角和边的关系呢？

下面我们进入本章的正题： \sin 和 \cos 。抽象的思考方式容易让人陷入数学的迷宫。前面已经强调过，最重要的是掌握从具体到抽象的思考方法，从日常生活的具体事物中找出看不见的三角形。现在我们就转换一下头脑，从日常生活中的具体事物说起。

让我们来想象一下父子二人手牵着手走在夕阳下的画面。爸爸和儿子手牵着手，地上的影子也手牵着手。爸爸的影子长，儿子的影子短。儿子贪玩摆摆手，地上的影子也摆摆手。



儿子忽然问：“爸爸，太阳有多高？”

这一问可难住了爸爸。太阳离地球这么远，追问“太阳离地面的距离”，谁能答得出来呢？不过，爸爸想出了一个办法：能不能用仰望太阳的角度来表示“太阳有多高”呢？

可是没法用量角器去测量仰望太阳的角度呀。怎么办呢？爸爸低头看见自己的影子，心想：“能不能利用影子的长度呢？”于是，爸爸看看太阳，又看看儿子的影子，脑海中浮现出下面这个直角三角形。

