

全国各类
成人高等学校
招生考试丛书

·人教修订版·

数 学

及解题指导

(理工农医类用)



人民教育出版社

全国各类成人高等学校招生考试丛书

数学及解题指导

(理工农医类用) (修订版)

人民教育出版社数学室 编

人民教育出版社

(京)新登字113号

全国各类成人高等学校招生考试丛书

数学及解题指导

(理工农医类用) (修订版)

人民教育出版社出版

数学及解题指导

全国各类成人高等学校招生考试丛书

数学及解题指导

(理工农医类用) (修订版)

人民教育出版社数学室 编

人民教育出版社出版

新华书店总店科技发行所经销

北京市房山区印刷厂印装

开本787×1092 1/16 印张26.75 字数 590 000

1992年11月第2版 1993年7月第1次印刷

印数 1—100,170

ISBN 7-107-10319-9

G·1309 定价 9.90 元

如发现印、装质量问题,影响阅读,请与本厂联系调换

说 明

为了帮助报考各类成人高等学校(包括广播电视大学、职工高等学校、农民高等学校、管理干部学院、教育学院和教师进修学院、独立设置的函授学院、普通高等学校举办的干部专修科、函授部、夜大学等)的考生系统复习中学课程,参加各类成人高等学校招生的考试,我们根据国家教育委员会1988年颁布的《各类成人高等学校招生复习考试大纲》(包括政治、语文、数学、物理、化学、历史、地理、英语、俄语、日语等10个学科)编写出一套《全国各类成人高等学校招生考试丛书》共计10册。这套丛书从出版以来受到广大读者的好评。1992年6月国家教育委员会对原复习考试大纲进行了修订。我社根据新大纲规定的考试范围和要求,保留了原丛书的优点,对其中部分学科的内容做了必要的修订,并根据考试要求新编了适用于文科考生用的《数学及解题指导》,使这套丛书紧扣新大纲,实用性更强。

这套考试丛书除供各类成人高等学校考生复习用外,也可供成人高中学员、教师和教研人员学习、参考。

《数学及解题指导》(理工农医类用)是这套丛书中的一种。按照全国各类成人高等学校招生《复习考试大纲》数学(理工农医类)复习考试范围分十八章。每一章包括“内容提要”、“复习要求”、“例题”、“习题”、“习题解答”五项。内容提要概括地介绍了本章的基础知识。复习要求根据《复习考试大纲》规定的要求,结合具体内容详细地说明应达到的程度。例题为基础知识的运用作出了示范,并通过解题前的“分析”和解题后的“注意”,帮助读者掌握解题思路和解题中应注意的问题。习题供复习时选用。全书还附有5套自我测验题,供考试前复习时选用。各类题目中较多地增加了选择题、填空题等客观性题型,以适应当前标准化考试改革的需要。

本书由我社数学室编写,由吕学礼、高存明任主编,参加编写工作的有康合太、蔡上鹤、高存明、于琛、方明一、薛彬、贾云山、袁明德、杨万里、许缦阁、李慧君。责任编辑是许缦阁、颜其鹏。

为了把这套丛书编写得更好,对本书存在的不足之处,欢迎读者批评指正。

人 民 教 育 出 版 社

1992年11月

目 录

第一章 数、式、方程和方程组	1
第二章 集合	31
第三章 不等式和不等式组	41
第四章 指数和对数	62
第五章 函数	81
第六章 数列、数学归纳法	116
第七章 排列、组合与二项式定理	135
第八章 复数	162
第九章 三角函数及其有关概念	186
第十章 三角函数式的变换	194
第十一章 三角函数的图象和性质	220
第十二章 解三角形	235
第十三章 反三角函数和简单的三角方程	248
第十四章 直线和平面	274
第十五章 多面体和旋转体	305
第十六章 直线	330
第十七章 圆锥曲线	360
第十八章 参数方程、极坐标	385
附录 自我测验题	
〔自我测验题一〕	408
〔自我测验题二〕	411
〔自我测验题三〕	414
〔自我测验题四〕	417
〔自我测验题五〕	421

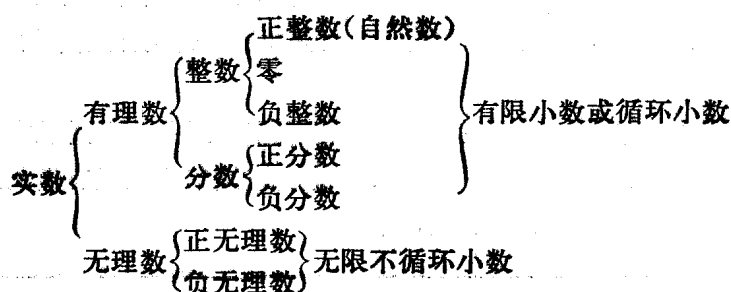
第一章 数、式、方程和方程组

【内容提要】

一、数

1. 有关数的基本概念

(1) 实数系表



注意 实数系可以进一步扩展,成为复数系. 参见本书第八章.

(2) 数轴: 规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴.

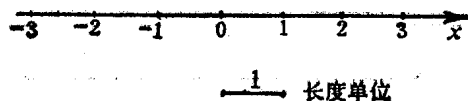


图 1-1

实数集合和数轴上点的集合是一一对应的. 数轴上任一点对应的数总大于该点左边任一点所对应的数.

(3) 相反数和倒数: 只有符号不同的两个数,叫做互为相反数,零的相反数是零. 1除以某数的商叫做这个数的倒数,零没有倒数.

(4) 绝对值: 一个正数的绝对值是它本身;一个负数的绝对值是它的相反数;零的绝对值是零. 即,

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

从数轴上看,一个数的绝对值就是表示这个数的点离开原点的距离.

2. 实数的运算

(1) 基本运算: 实数可进行加、减、乘、除、乘方等运算,对非负实数还可进行开方运算. 实数

加、减、乘、除(除数不为零)、乘方的结果仍是实数. 任何实数都可以开奇次方, 结果仍是实数, 只有非负实数, 才能开偶次方, 其结果仍是实数.

(2) 运算法则:

加法: 同号两数相加, 取原来的符号, 并把绝对值相加. 异号两数相加, 取绝对值较大的加数的符号, 并用较大的绝对值减去较小的绝对值. 任何数与零相加等于原数.

减法: 减去一个数, 等于加上这个数的相反数.

乘法: 两数相乘, 同号得正, 异号得负, 并把绝对值相乘. 零乘以任何数都得零. 任何数乘以 1 都等于原数.

除法: 两数相除, 同号得正, 异号得负, 并把绝对值相除. 零除以任何一个不为零的数等于零. 任何数除以一个不为零的数, 等于乘以这个数的倒数. 零不能作除数.

乘方: 正数的任何次幂是正数; 负数的偶次幂是正数, 奇次幂是负数; 零的正数次幂等于 0.

开方: 正数的奇次方根是一个正数, 正数的偶次方根有两个, 这两个方根互为相反数, 零的 n 次方根都是零. 负数的奇次方根是一个负数, 在实数范围内, 负数没有偶次方根.

(3) 运算律: 设 a, b, c 为任意实数, 则有:

运 算 律	加 法	乘 法
交 换 律	$a+b=b+a$	$a \cdot b=b \cdot a$
结 合 律	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$
分 配 律	$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$	

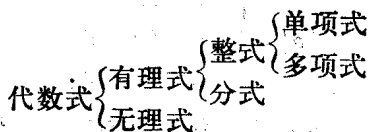
(4) 运算顺序: 在同一个式子里, 先乘方、开方, 然后乘、除, 最后加、减. 有括号时, 由最里层的括号算起, 逐层去掉括号. 有时根据运算律可改变上述顺序.

二、式

1. 代数式及其分类

代数式是由运算符号(加、减、乘、除、乘方、开方)把数或表示数的字母连结而成的式子. 单独的一个数或者一个字母也是代数式. 用数值代替代数式里的字母, 计算后所得的结果, 叫做代数式的值.

代数式分类如下:



2. 整式

(1) 整式的有关概念: 由数与字母相乘形成的代数式, 叫做单项式; 几个单项式的和叫做多

项式;单项式和多项式统称整式.

(2) 整式的运算: 整式能进行加、减、乘的运算. 整式加、减、乘的结果仍是整式. 整式可以进行带余除法的运算. 整式的运算符合交换律、结合律、分配律,

幂的运算法则:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m > n),$$

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

常用的乘法公式:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3,$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

(3) 多项式的因式分解: 就是把一个多项式化为几个整式的积. 常用的方法有: 提公因式法; 公式法; 分组分解法; 十字相乘法; 求根公式法等.

3. 分式

设 A, B 表示两个整式, 如果 B 中含有字母, 式子 $\frac{A}{B}$ 就叫做分式 (注意分母 B 的值不能为零, 否则分式没有意义). 分子与分母没有公因式的分式, 叫做最简分式.

(1) 分式的基本性质:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \times M}{B \times M}, \quad \frac{A}{B} = \frac{A \div M}{B \div M} \quad (M \text{ 为不等于零的整式}).$$

(2) 分式的符号法则: 分式的分子、分母与分式本身的符号, 改变其中的任何两个, 分式的值不变.

(3) 分式的运算:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

4. 二次根式

(1) 二次根式的有关概念: 正数 a 的正的平方根, 叫做 a 的算术平方根. 零的平方根是零. 式子 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 叫做二次根式.

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad (a \geq 0);$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a(a \geq 0), \\ -a(a < 0). \end{cases}$$

被开方数的每一个因式的指数都小于根指数 2, 被开方数不含分母的二次根式, 叫做最简二次根式; 几个二次根式化成最简二次根式以后, 如果被开方数相同, 这几个二次根式就叫做同类二次根式.

(2) 二次根式的运算:

二次根式的加减: 先把各根式化为最简根式, 再合并同类根式;

二次根式的乘除: 按下列性质进行

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a \geq 0, b \geq 0),$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0, b > 0).$$

(3) 分母有理化: 如果被开方数是一个分式(或分数), 用一个适当的代数式同乘分子与分母, 使分母成为完全平方式, 再开方, 移到根号外从而化去根号内的分母的过程, 叫做分母有理化.

三、方程和方程组

1. 方程

含有未知数的等式叫做方程. 能使方程左右两边相等的未知数的值, 叫做方程的解. 求方程的解或说明方程无解的过程, 叫做解方程.

(1) 同解原理:

(i) 方程的两边都加上(或都减去)同一个数或同一个整式, 所得方程与原方程是同解方程.

(ii) 方程的两边都乘以(或都除以)不等于零的同一个数, 所得方程与原方程是同解方程.

(2) 一元一次方程: 形如 $ax+b=0(a \neq 0)$ 的方程, 叫做一元一次方程. 它的解为: $x = -\frac{b}{a}$.

注意 当 $a=0$ 时, $ax+b=0$ 不是一元一次方程. 这时, 如果 $b \neq 0$, 方程无解, 如果 $b=0$, 则方程有无穷多个解.

(3) 一元二次方程: 方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 叫做一元二次方程.

(i) 求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

(ii) 判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$.

当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根;

当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根;

当 $\Delta < 0$ 时, 方程没有实数根.

(iii) 根与系数的关系(韦达定理)

如果 α, β 是方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的两个根, 则有 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$.

反过来, 如果有 $\alpha + \beta = p, \alpha\beta = q$,

则 $x^2 - px + q = 0$ 是以 α, β 为根的一元二次方程.

2. 方程组

(1) 一次方程组: 由几个一次方程组成并含有两(三)个未知数的方程组, 叫做二(三)元一次方程组.

二元一次方程组的解法有: 代入消元法; 加减消元法等.

三元一次方程组的解法是用代入消元法或加减消元法, 通过“消元”使其转化为二元一次方程组来解.

(2) 简单的二元二次方程组: 形如 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 的方程叫做二元二次方程.

由一个二元二次方程和一个二元一次方程, 或由两个二元二次方程组成的方程组, 叫做二元二次方程组.

由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的二元二次方程组, 可用代入法来解; 由两个二元二次方程组成的方程组只限于解几种特殊的类型的方程组.

【复习要求】

一、理解有理数、实数及数轴、相反数、绝对值、算术平方根的概念, 会进行有关计算.

1. 理解什么叫有理数、实数及数轴、相反数、绝对值、算术平方根. 知道有理数、实数之间的关系; 会进行实数大小的比较; 会求一个数的相反数; 会求一个数的绝对值. 知道算术平方根一定是非负数.

2. 会熟练地进行实数的加、减、乘、除、乘方的运算. 会进行非负实数的开方的运算.

二、理解有关整式、分式的概念, 会进行有理式的加、减、乘、除、乘方的运算.

1. 理解什么叫单项式、多项式、整式、分式. 对给定的有理式会判断它是整式还是分式.

2. 能熟练地进行整式的四则运算, 灵活运用幂的运算法则及乘法公式.

3. 掌握常用的多项式因式分解的方法.

4. 能熟练运用分式的基本性质, 对分式进行四则运算.

三、理解二次根式的有关概念和二次根式的性质, 会进行二次根式的化简和运算.

1. 理解二次根式的定义, 在运算时能灵活运用有关的性质.

2. 在对根式进行化简与运算时, 会将一个二次根式化成最简根式; 会对二次根式进行四则运算; 会利用分母有理化进行除法运算.

四、会解一元一次方程、一元二次方程, 能灵活运用一元二次方程根的判别式以及根与系数的关系解决有关问题.

1. 会用方程的同解原理, 熟练地解一元一次方程.

2. 会熟练运用一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的求根公式并会用因式分解法和配方法求一元二次方程的解. 会根据判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的值判断方程实根的个数; 会灵活运用根与系数的关系解有关问题.

五、会解有唯一解的二元一次方程组、三元一次方程组；会解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组；会解简单的由两个二元二次方程组成的方程组。

1. 掌握代入消元法和加减消元法，通过“消元”来求二元一次方程组、三元一次方程组的唯一解。

2. 会用代入消元法解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组；会解某几种特殊类型的由两个二元二次方程组成的方程组（用加减消元法可以消去某个未知数的，可以消去二次项的，以及至少有一个方程可以分解成两个一次方程的）。

【例题】

例1 选择题（每小题中只有一个结论是正确的，把正确结论的代号写在题中的括号内）。

(1) 两个无理数的和()

(A) 一定是无理数. (B) 可能为有理数. (C) 一定是有理数. (D) 不会为零.

分析：不妨设 a 为无理数，那么 $b = -a$ 也是无理数。因为 $a + b = a + (-b) = 0$ ，所以 A、D 不正确。又因为 $a + a = 2a$ 仍是无理数，所以 C 也不正确。因此正确答案为 B。

答：B。

(2) 下列命题错误的是()

(A) 每一个整数都对应着数轴上的一个点。

(B) 每一个无理数都对应着数轴上的一个点。

(C) 数轴上每一个点都对应着一个实数。

(D) 有理数和数轴上的点一一对应。

分析：因为实数与数轴上的点是一一对应的，所以 A、B、C 都是正确命题。因此正确答案为 D。

答：D。

(3) 如果 $|x| + |y| = 0$ ，那么 x 和 y 的值是()

(A) 互为相反数. (B) 互为倒数. (C) $x = 0, y = 0$. (D) $x > 0, y < 0$.

分析：因为 $|x| \geq 0, |y| \geq 0$ ，所以要使 $|x| + |y| = 0$ ，必有 $|x| = 0$ 和 $|y| = 0$ 。因此 C 正确。

答：C。

(4) $\sqrt{a} - 1$ 的绝对值()

(A) 等于 $\sqrt{a} - 1$. (B) 等于 $1 - \sqrt{a}$. (C) 等于 0.

(D) 当 $a \geq 1$ 时，等于 $\sqrt{a} - 1$ ；当 $0 \leq a < 1$ 时，等于 $1 - \sqrt{a}$ 。

分析：因为 $a \geq 1$ 时， $\sqrt{a} \geq 1$ ，而 $0 \leq a < 1$ 时， $\sqrt{a} < 1$ ，所以正确答案为 D。

答：D。

(5) 如果 $|-a| > -a$ ，那么()

(A) $a > 0$. (B) $a < 0$. (C) $a < -1$. (D) $-1 < a < 0$.

分析：因为 $a > 0$ 时， $|-a| > 0, -a < 0$ 。所以正确答案为 A。

答: A.

(6) 化简 $|a-3|+a-3$, 结果是()

(A) $2a-6$. (B) 0. (C) $2a-6$ 或 0. (D) $6-2a$.

分析: 因为 $a \geq 3$ 时, $|a-3|+a-3=a-3+a-3=2a-6$; $a < 3$ 时, $|a-3|+a-3=3-a+a-3=0$, 所以正确答案为 C.

答: C.

(7) 已知 $y=ax^5+bx^3+cx-6$, 且当 $x=2$ 时, $y=6$. 当 $x=-2$ 时, y 的值等于()

(A) -18 . (B) -12 . (C) 18. (D) 无法求出.

分析: 因为 $a(-x)^5+b(-x)^3+c(-x)=- (ax^5+bx^3+cx)$, 所以 $y=a(-2)^5+b(-2)^3+c(-2)-6=- (a \cdot 2^5+b \cdot 2^3+c \cdot 2)-6=- (6+6)-6=-18$.

答: A.

(8) 已知 $a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0-(2x-1)^5=0$, 那么 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ 的值等于()

(A) 0. (B) 1. (C) 32. (D) 16.

分析: 因为 $a_5 \times 1^5+a_4 \times 1^4+a_3 \times 1^3+a_2 \times 1^2+a_1 \times 1+a_0=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$, 所以在原式中取 $x=1$, 可得 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1$. 因此正确答案为 B.

答: B.

例2 填空题.

(1) 如果 $-|a|=-a$, 那么 a 0; 如果 $-|a|=a$, 那么 a 0; 如果 $|a|>a$, 那么 a 0.

分析: 因为 $-|a| \leq 0$, 所以要使 $-|a|=-a$, 必有 $a \geq 0$. 要使 $-|a|=a$, 必有 $a \leq 0$. 因为当 $a \geq 0$ 时, $|a|=a$, 所以要使 $|a|>a$, 必有 $a < 0$.

答: $\geq$; $\leq$; $<$.

(2) 如果 x, y 为实数, 且 $|x+1|+(y-1)^2=0$, 那么 $x=$, $y=$.

分析: 因为 $|x+1| \geq 0, (y-1)^2 \geq 0$, 所以要使 $|x+1|+(y-1)^2=0$, 必有 $|x+1|=0, (y-1)^2=0$, 解得 $x=-1, y=1$.

答: $-1, 1$.

(3) 当 $1 \leq a < 5$ 时, $\sqrt{(a-1)^2}+|5-a|=$.

分析: 因为 $1 \leq a < 5$ 时, $\sqrt{(a-1)^2}=|a-1|=a-1, |5-a|=5-a$, 所以 $\sqrt{(a-1)^2}+|5-a|=a-1+5-a=4$.

答: 4.

例3 选择题.

(1) 已知 $\frac{ab+b}{2}=a$, 那么用 b 表示 a 是()

(A) $\frac{b-a}{2}$. (B) $\frac{b}{2-b}$. (C) $b+2$. (D) b^2+b .

分析: 由 $a = \frac{ab+b}{2}$ 可得 $2a = ab + b$, 解出 a 得 $a = \frac{b}{2-b}$. 因此正确答案为 B.

答: B.

(2) 下列各式的变形, 正确的是()

(A) $x^3 - y^3 = (x - y)^3$.

(B) $8 + a^3 = (2 + a)(4 + 2a + a^2)$.

(C) $x^3 + 8y^3 = (x + 2y)(x^2 - xy + 4y^2)$.

(D) $-x^3 + y^3 = (-x + y)(x^2 + xy + y^2)$.

分析: 因为 $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$, $8 + a^3 = (2 + a)(4 - 2a + a^2)$, $x^3 + 8y^3 = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$, 所以 A、B、C 全不正确. 因此正确答案为 D.

答: D.

(3) $-(a - 2b)(a + 2b)$ 是下列哪个多项式的分解结果()

(A) $a^2 - 4b^2$.

(B) $-a^2 + 4b^2$.

(C) $-a^2 - 4b^2$.

(D) $a^2 + 4b^2$.

分析: 因为 $-(a - 2b)(a + 2b) = -(a^2 - 4b^2) = -a^2 + 4b^2$, 所以正确答案为 B.

答: B.

(4) 已知 $a = 1 + \frac{1}{b}$, $b = 1 + \frac{1}{a}$, 且 $a \neq 0$, $b \neq 0$, 那么 b 等于()

(A) $a - 1$.

(B) $1 - a$.

(C) $1 + a$.

(D) a .

分析: 由 $a = 1 + \frac{1}{b}$, $b = 1 + \frac{1}{a}$, 可得 $ab = b + 1$, $ab = a + 1$, 即 $b + 1 = a + 1$, 所以 $a = b$. 因此正确答案为 D.

答: D.

(5) 如果 $x - y = xy$ ($x \neq 0$, $y \neq 0$), 那么 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ 等于()

(A) $\frac{1}{xy}$.

(B) $\frac{1}{x+y}$.

(C) -1 .

(D) $y - x$.

分析: 由 $x - y = xy$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ 得 $\frac{x-y}{xy} = 1$, 而 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} = -1$. 因此正确答案为 C.

答: C.

例 4 填空题.

(1) 一个多项式除以 $x - 1$ 得 $x + y + 1$, 那么这个多项式是_____.

分析: 依题意可知该多项式等于 $(x - 1)(x + y + 1) = x^2 + xy - y - 1$.

答: $x^2 + xy - y - 1$.

(2) 当 $x = \underline{\hspace{1cm}}$ 时, $\frac{x}{|x| - 3}$ 没有意义.

分析: 当 $|x| - 3 = 0$ 时, 可知 $\frac{x}{|x| - 3}$ 没有意义, 解得 $x = \pm 3$.

答: ± 3 .

(3) 已知 $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{5}$, 那么 $x - \frac{1}{x} = \underline{\hspace{1cm}}$.

分析: 因为 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = (2\sqrt{5})^2 - 4 = 16$, 所以 $x - \frac{1}{x} = \pm 4$.

答: ± 4 .

例 5 计算.

$$(1) (x^3 - 2x^2 + 6x - 5) + (2x + 4x^2) - (4x^2 - 7x - 6x^3);$$

$$(2) (ab - 1)^2 (a^2 b^2 + ab + 1)^2;$$

$$(3) \left(1 - \frac{x}{x+1}\right) - \frac{x+3}{x^2-1} \div \left(\frac{6x+2}{x^2-2x+1} + 1\right).$$

解: (1) 原式 $= x^3 - 2x^2 + 6x - 5 + 2x + 4x^2 - 4x^2 + 7x + 6x^3$
 $= x^3 + 6x^3 - 2x^2 + 4x^2 - 4x^2 + 6x + 2x + 7x - 5$
 $= 7x^3 - 2x^2 + 15x - 5;$

(2) 原式 $= [(ab - 1)(a^2 b^2 + ab + 1)]^2 = (a^3 b^3 - 1)^2$
 $= a^6 b^6 - 2a^3 b^3 + 1;$

(3) 原式 $= \frac{x+1-x}{x+1} - \frac{x+3}{x^2-1} \div \frac{6x+2+x^2-2x+1}{x^2-2x+1}$
 $= \frac{1}{x+1} - \frac{x+3}{(x+1)(x-1)} \div \frac{x^2+4x+3}{x^2-2x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{x+3}{(x+1)(x-1)} \div \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^2}$
 $= \frac{1}{x+1} - \frac{x+3}{(x+1)(x-1)} \times \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{(x+1)^2}$
 $= \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$

注意 (i) 括号前是“+”号, 去(或添)括号, 括号内各项不变号; 括号前是“-”号, 去(或添)括号, 括号内各项都变号. (ii) 多项式相乘时, 一般的方法是先利用多项式的每一项乘以另一个多项式的每一项, 再把所得积相加, 最后化成最简结果. 但计算过程中如能应用公式, 要尽量使用. 在应用公式时, 公式中的字母, 可以用数或字母, 也可以用代数式来代换, 但相同的字母代换要相同.

例 6 把下列各式分解因式:

$$(1) axz - 3byz - 3ayz + bxz;$$

$$(2) a^3 b - 2a^2 b^2 + ab^3;$$

$$(3) x^2 - y^2 + 2y - 1;$$

$$(4) x^6 - y^6;$$

$$(5) x^2 - 6x - 16;$$

$$(6) x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y + 8.$$

分析: 对多项式进行因式分解, 常用的方法有: 提公因式法; 公式法, 如平方差公式, 完全平方公式, 立方和与立方差公式等; 可化为 $x^2 + (a+b)x + ab$ 型的二次三项式的因式分解, 因为 $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$; 十字相乘法; 分组分解法等.

比如(1)式可先提取公因式,再适当分组;(2)式可先提取 ab ,再应用公式;(3)式分组后,再应用公式;(4)式可先化成 $(x^3)^2 - (y^3)^2$ 或 $(x^2)^3 - (y^2)^3$ 再分解;(5)式中常数项 -16 可以分解成 -8 与 2 的积,且 $-8+2=-6$ 等于一次项的系数,故可用化成 $x^2+(a+b)x+ab$ 型的因式分解方法,也可以用十字相乘法;(6)式可先适当分组,再应用十字相乘法.

解: (1) 原式 $= z(ax - 3by - 3ay + bx) = z[(ax + bx) - (3ay + 3by)]$
 $= z[x(a+b) - 3y(a+b)] = z(a+b)(x-3y);$

(2) 原式 $= ab(a^2 - 2ab + b^2) = ab(a-b)^2;$

(3) 原式 $= x^2 - (y^2 - 2y + 1) = x^2 - (y-1)^2 = (x+y-1)(x-y+1);$

(4) 原式 $= (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$
 $= (x+y)(x-y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2);$

或原式 $= (x^2)^3 - (y^2)^3 = (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$
 $= (x+y)(x-y)[x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2]$
 $= (x+y)(x-y)[(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2]$
 $= (x+y)(x-y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2);$

(5) 原式 $= x^2 + (-8+2)x + (-8) \times 2 = (x-8)(x+2),$

或由十字相乘法得

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ & \times \\ 1 & -8 \end{array}$$

原式 $= (x-8)(x+2).$

(6) 原式 $= (x^2 - 4xy + 4y^2) - (6x - 12y) + 8$
 $= (x-2y)^2 - 6(x-2y) + 8 = (x-2y-2)(x-2y-4).$

例7 化简.

(1) $\frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1};$

(2) $1 - \sqrt{x^2 - 1} + \frac{2\sqrt{x+1} + 4\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}};$

(3) $\sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{32};$

(4) $\left(1 - \sqrt{\frac{n}{m}}\right)(m + \sqrt{mn}) \quad (m > 0, n \geq 0).$

解: (1) 原式 $= \frac{2(\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)} = \frac{2(\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)}{3 - 2 - 1 + 2\sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - 2 + \sqrt{2}}{2};$

注意 在化简时,有时要多次用到二次根式的分母有理化.

$$(2) \text{ 原式} = 1 - \sqrt{x^2 - 1} + \frac{(2\sqrt{x+1} + 4\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})}$$

$$= 1 - \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2}[2(x+1) - 4(x-1) + 2\sqrt{x^2 - 1}]$$

$$= 1 - \sqrt{x^2 - 1} + (x+1) - 2(x-1) + \sqrt{x^2 - 1} = 4 - x;$$

$$(3) \text{ 原式} = 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 3\sqrt{2};$$

$$(4) \text{ 原式} = \left(1 - \sqrt{\frac{n}{m}}\right)m + \left(1 - \sqrt{\frac{n}{m}}\right)\sqrt{mn} = m - \sqrt{mn} + \sqrt{mn} - n = m - n.$$

例8 选择题.

(1) 下列各组方程中,属同解方程的是()

(A) $|x|=1$ 与 $x=1$.

(B) $(x-1)(x-2)=0$ 与 $x=2$.

(C) $2 - \frac{y-1}{3} = 1$ 与 $6-y-1=3$.

(D) $\frac{5x-1}{5} = 2x+1$ 与 $x = -\frac{6}{5}$.

分析: 因为 $|x|=1$ 表示 $x=\pm 1$, 所以 A 不正确. 因为 $(x-1)(x-2)=0$ 表示 $x=1$ 或 $x=2$, 所以 B 不正确. 因为 $2 - \frac{y-1}{3} = 1$ 与 $6-y+1=3$ 是同解方程, 所以 C 也不正确. 因此正确答案为 D.

答: D.

(2) 当 $b=1$ 时, 方程 $(2x-3)b + (3x-2)a = 8x-7$ 有无穷多个解, 那么 a 等于()

(A) 2.

(B) $\frac{2}{3}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $-\frac{1}{2}$.

分析: 当 $b=1$ 时, 原方程可整理为 $3(a-2)x = 2(a-2)$, 由此可知, 当 $a=2$ 时, 方程有无穷多个解.

答: A.

(3) 要使关于 y 的方程 $|2 - |y-3|| = a$ 仅有 3 个不同的解, 那么 a 的值是()

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

分析: 由原方程可得 $y = 3 \pm (2 \pm a)$, 将 $a=0, 1, 2, 3$ 代入可知, 仅当 $a=2$ 时, y 有 3 个解. 因此正确答案为 C.

答: C.

(4) 方程 $x^2 - 4x - (p-1) = 0$ 与 $x^2 + px - 3 = 0$ 仅有一个公共根, 那么 p 的实数值等于()

(A) -2.

(B) -1.

(C) 1.

(D) 2.

分析: 此题可用试值的办法, 确定哪一个正确答案. 经试值可知 $p=-2$ 时符合题意, 所以正确答案为 A. 此外本题也可先解联立方程组求得 $x = \frac{4-p}{p+4}$, 再代入原方程整理得 $p^3 + 2p^2 + 16p + 32 = 0$. 求得 $p = -2, p = \pm 4i$.

答: A.

(5) 下列各组数中, 满足方程 $187a - 104b = 41$ 的是()

(A) $a=211, b=379$.

(B) $a=314, b=565$.

(C) $a=288, b=648$.

(D) $a=167, b=174$.

分析: 本题采用试值法可知A是正确答案. 试值时, 可先试末位数字, 如B中, $7 \times 4 - 4 \times 5$, 末位数字不等于1.

答: A.

(6) 如果 $x_1 + x_2 = 1, x_2 + x_3 = 2, x_3 + x_1 = 3$, 那么 x_2 的值是()

(A) 1.

(B) -1.

(C) 0.

(D) 3.

分析: 由原3个方程可得 $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, 由此方程与 $x_3 + x_1 = 3$ 可得 $x_2 = 0$. 所以正确答案为C.

答: C.

(7) 已知 $\begin{cases} x=2, \\ y=-1 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} ax+by=1, \\ bx+ay=4 \end{cases}$ 的解. 那么 a, b 的值分别是()

(A) $a=-1, b=2$.

(B) $a=5, b=3$.

(C) $a=2, b=3$.

(D) $a=b=-1$.

分析: 先把 $\begin{cases} x=2, \\ y=-1 \end{cases}$ 代入 $\begin{cases} ax+by=1, \\ bx+ay=4 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 2a-b=1, \\ -a+2b=4. \end{cases}$ 解这个关于 a, b 的方程组可得 $\begin{cases} a=2, \\ b=3. \end{cases}$

因此正确答案为C.

答: C.

例9 填空题.

(1) 如果方程 $9x^2 + 2mx + 16 = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

分析: 由 $\Delta = b^2 - 4ac = 4m^2 - 4 \times 9 \times 16 = 0$, 可得 $m = \pm 12$.

答: ± 12 .

(2) 如果方程 $5x^2 + mx + m - 4 = 0$ 的一个根是 0, 那么 $m = \underline{\hspace{2cm}}$, 另一个根是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

分析: 由根与系数的关系知 $\frac{m-4}{5} = 0$, 由此可得 $m = 4$. 从而另一根为 $x = -\frac{m}{5} = -\frac{4}{5}$. 此外本题中也可用 0 代 x , $0 + 0 + m - 4 = 0$, 得 $m = 4$, 所以原方程为 $5x^2 + 4x = 0$, 因此另一根为 $-\frac{4}{5}$.

答: $4, -\frac{4}{5}$.

(3) 如果 $\sqrt{3} + 2$ 和 $\sqrt{3} - 2$ 是一元二次方程的两个根, 那么这个一元二次方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

分析: 依题意知方程为 $x^2 - [(\sqrt{3} + 2) + (\sqrt{3} - 2)]x + (\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2) = 0$, 整理得 $x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$.

答: $x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$.

例10 已知方程 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 的两根为 α, β , 不解方程, 求下列各式的值.