

南开大学经济类系列实验教材

F 非寿险精算

理论与实验

孙佳美 编著

南开大学经济类系列实验教材

非寿险精算理论与实验

孙佳美 编著

中国财政经济出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

非寿险精算理论与实验 / 孙佳美编著. —北京: 中国财政经济出版社, 2008. 5
(南开大学经济类系列实验教材)

ISBN 978 - 7 - 5095 - 0735 - 3

I. 非… II. 孙… III. 保险 - 精算学 - 高等学校 - 教材 IV. F840. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 104046 号

责任编辑: 张 铮

责任校对: 徐艳丽

封面设计: 福瑞来

版式设计: 兰 波

中国财政经济出版社出版

URL: <http://www.cfeph.cn>

E-mail: cfeph@cfeph.cn

(版权所有 翻印必究)

社址: 北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码: 100142

发行处电话: 88190406 财经书店电话: 64033436

北京富生印刷厂印刷 各地新华书店经销

787 × 1092 毫米 16 开 22.25 印张 529 000 字

2008 年 5 月第 1 版 2008 年 5 月北京第 1 次印刷

定价: 39.00 元

ISBN 978 - 7 - 5095 - 0735 - 3/F · 0596

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

本社质量投诉电话: 010 - 88190744

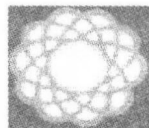
编委会

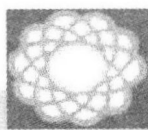
主 任：马君潞

副主任：李秀芳 何自力 沈亚平 侯文强

委 员：（按姓氏笔画排列）

马君潞	王群勇	关路祥	刘晓峰	华 钧
孙佳美	何自力	吴 浙	张骅月	张晓峒
攸 频	李冰清	李秀芳	沈亚平	邹 洋
周爱民	侯文强	赵胜民	涂宇清	秦海英
郭 玲	谢娟娟			





总 序

ZONGXU

南开大学经济学科多年来一直在探讨如何适应改革开放、如何根据理论与实践的发展进行教学改革,包括教学理念与教学内容的更新、教学方式与教学方法的创新。实验教学的内容和方法是教学改革多方面的具体体现。南开大学也为经济学科实验课程教学的开设提供了重要的物质保证,在整合相关资源的基础上投资建设的实验教学中心成为经济学科各专业本科生、硕士生、博士生实验教学和实践教学基地,是经济学科教学、科研和社会服务重要的基础支撑。

经过多年的建设与探索,南开大学经济学实验教学中心逐步建立起与学科发展和人才培养目标相适应、比较科学的实验教学体系,同时组织实验课程教师开发适合于不同专业、不同教学层次的实验课程,并在课程中广泛引入了演示法、案例法、模拟法、仿真法、棋块式沙盘规划法等教学方法。经过数年的积累,实验课程教师在教学的过程中组织学生自主研发教学软件,将科研成果注入实验教学体系,从而使科研成果与教学内容相结合,也使教学软件有了自我更新的能力。

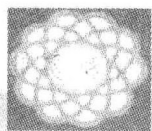
实验课程教材内容体现了实验课程教师多年来不断研究和实践的成果,也体现了南开大学经济学科对教学改革内容的探索。目前,实验教学已经成为经济学教学的重要组成部分。当然,无论是实验课程教材体系还是实验课程教学内容,都有待于根据理论与实践的发展,以及技术手段的提升不断更新和完善。

我们期待读者与同行的意见和建议。

马君潞

2008年5月于南开大学





前 言

QIANYAN

精算是对各种经济活动未来的财务风险进行分析、估价和管理的一门综合性的应用学科。在西方发达国家，精算不仅早已形成完整的体系，而且已广泛应用于保险、金融、投资、证券等领域，成为风险管理的重要工具。精算学自1988年从北美国家引入我国以来，得到了迅速发展，特别是在人寿保险领域得到了广泛的应用。但是，精算学在我国非寿险领域的应用还刚刚起步。

我国的非寿险精算在2002年开始得到关注。在2002年厦门国际精算研讨会上，中国保监会提出要借鉴寿险精算制度建设的经验，在1~2年时间内逐步建立起符合中国国情的非寿险精算体系。2003年1月1日，中国保监会废止了机动车辆保险由政府监管部门统一制定条款和费率的管理模式，改为由各家保险公司自主开发产品、自主定价的新型管理体系。2004年7月1日起，非寿险公司开始实行“精算责任人”制度，即非寿险产品的定价和准备金报告必须由中国保监会认可的精算师签字。2005年年初，《保险公司非寿险业务准备金管理办法（试行）》及其《实施细则》的出台，以更加科学与细化的口径严格规范了保险公司准备金的提取，从制度上保证了产险公司的健康发展。2005年8月22日，中国保监会就“保险公司财产保险以及短期人身险业务最低偿付能力额度的修订标准”征求意见。2005年9月，首次开始中国精算师（非寿险方向）的资格考试。2005年12月1日起，施行《再保险业务管理规定》。

从我国非寿险精算的发展过程来看，非寿险精算的概念及非寿险精算技术正逐步渗透到我国非寿险保险业中。然而，我国非寿险精算的教育还没有成熟的知识体系。近年来，不断有新的非寿险精算方面的教材出版，但是本人在教学过程中发现，目前的非寿险精算教材或者内容比较浅显，或者内容不够完整，或者错误较多，或者缺少习题，更没有一本涉及非寿险精算实验的教材，以至于目前的非寿险精算课程的教学只能是依赖于讲义或学生上课记笔记，目前国内尚没有一本内容全而新，适合本科精算教学的非寿险精算教材。精算学科是

一门实践性较强的学科,不仅要求学生掌握基本的精算理论,还需要学生掌握一定的软件操作技巧,能够利用 EXCEL、SPSS (SAS) 及科学计算软件 (如 Mathematica 等) 分析和解决非寿险精算中的实际问题,实验教材的推出将有助于学生掌握必要的精算软件实现技术,提高学生的就业能力。本人已从事非寿险精算教学十余年,有着丰富的教学经验和数理统计基础,新教材将结合本人多年的授课讲义,吸收国外教材的最新内容,并适当配以习题和计算机实验,可作为本科生教学使用,也可作为研究生教学的参考。

该教材内容共九章。

第一章和第二章为非寿险精算的概率论与数理统计基础。其中概率论部分着重介绍在风险理论和非寿险精算中经常用到的、而一般的概率统计教材中较少涉及的内容,包括矩母函数的概念及性质、条件均值和条件方差公式两部分;数理统计部分着重介绍非寿险精算中常用的参数估计和非参数假设检验的方法。

第三章为索赔次数与赔付额。在非寿险精算中对统计数据的处理经常要涉及到索赔次数和理赔额的统计分布,由于随机变量按其取值的性质分为离散型和连续型两大类,统计分布也相应地分为两大类。索赔次数的分布为离散型分布,而理赔额的分布为连续型分布。

第四章讲述非寿险费率的厘订方法。保险定价过程可分为两个方面:即建立充分费率与设定实际价格。充分费率是满足保险公司长期利润目标的费率,而保险公司设定实际产品价格则还需考虑公司的市场份额目标与竞争环境等因素。本章着重介绍影响非寿险充分费率的基本要素以及厘订充分费率的基本过程,并增加了对免赔额和增加限额情况下保险费率厘订方法的介绍。

第五章讲述信度理论。信度理论是研究用实际损失经验数据与先验信息的数据进行估算保险费用的一类问题的方法与工具。信度理论有两种基本方法:即有限波动信度 (limited fluctuation credibility) 和最大精度信度 (greatest accuracy credibility)。本章详细介绍了这两种方法的理论模型。

第六章讲述机动车辆保险的奖惩系统。介绍 BMS 系统的构成及对 BMS 系统优劣的评价方法。

第七章介绍风险分级系统,包括选择风险分级变量应该遵循的若干准则、分级系统效率的度量及级别相对数的估计方法等。

第八章介绍非寿险准备金的评估方法。非寿险业务准备金分为保费责任准备金 (premium reserve)、赔款责任准备金 (loss reserve) 和其他责任准备金。本章着重介绍了估算保费责任准备金及赔款责任准备金的方法。另外,本章附录中详细介绍了未决赔款准备金估计的随机链梯模型——Mack 模型。

第九章介绍再保险精算,包括再保险定价和准备金评估方法等。

为了帮助学生掌握必要的精算软件实现技术,本教材在介绍基本理论的基础上,适当配备了一些计算机实验,并给出上机实验的具体步骤。实验没有标准格式,只有实验目的是相同的,因此学生在实验过程中需要自行查找资料、设计实验方案、交流讨论、探索规律、撰写实验报告。这些活动为学生自主式、合作式、研究式的学习和创新提供了广阔空间。希望通过这些实验的练习,培养学生应用相关软件(如 EXCEL、SPSS、Mathematica、Matlab 等)处理非寿险精算问题的能力,促进学生知识、能力、思维和素质的全面协调发展。

本书是根据作者多年的教学及科研经验编写而成的,其中也参考了一些美国意外险精算学会(CAS)考试 Exam4 ~ Exam6 的部分考试内容,其中的大部分内容和实验都在教学中讲授过。本书可以作为保险专业本科或研究生的教材,也适合作为对非寿险精算及相关问题的计算机处理感兴趣的各类人员的参考教材。

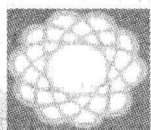
全书由笔者总负责,南开大学风险管理与保险学系部分精算研究生也参加了本书的编写工作,其中 2003 级精算研究生谷顺燕(现供职于泰康人寿保险公司)参与了第九章的编写,2006 级精算研究生肖书楷参与了本书大部分实验内容及个别章节(§2.4、§2.7、§2.8 及第二章后面附录、§3.4、§3.5、§4.5 和第六章)的编写,另外,肖书楷还提供了部分习题,2006 级精算研究生王顺负责本书第七章的编写工作。

本书得到“南开大学教材资助立项项目”的资助,在此表示感谢。另外,也感谢南开大学经济学院领导对实验教材出版的支持,感谢中国财政经济出版社的编辑们为本书出版所做的辛勤工作。

全部书稿都经过编写人员的多次讨论、验证,但是由于时间和水平所限,书中难免存在一些不足之处,希望读者批评指正。

作者

2008 年 1 月



目 录

MULU

第一章 非寿险精算的概率论基础	(1)
§ 1.1 矩母函数	(1)
§ 1.2 条件均值和条件方差	(4)
习 题	(6)
参考文献	(8)
第二章 非寿险精算的数理统计基础	(9)
§ 2.1 矩估计法和最大似然估计法	(9)
§ 2.2 贝叶斯方法	(11)
§ 2.3 区间估计	(18)
§ 2.4 分布的拟合检验	(19)
§ 2.5 实验: Excel 在非寿险精算中的应用	(27)
§ 2.6 实验: SPSS 在非寿险精算中的应用	(33)
§ 2.7 实验: Mathematica 简介	(42)
§ 2.8 其他软件的应用	(48)
附录 A: 常用离散概率分布及其性质	(51)
附录 B: 常用连续概率分布及其性质	(54)
附录 C: 柯尔莫哥洛夫检验临界值 $D_{n,\alpha}$ 表	(61)
习 题	(64)
参考文献	(65)
第三章 索赔次数与赔付额	(66)
§ 3.1 引言	(66)
§ 3.2 索赔次数分布	(66)
§ 3.3 损失分布	(72)
§ 3.4 实验: 索赔次数的拟合与检验	(79)
§ 3.5 实验: 损失分布的拟合与检验	(84)

习 题	(97)
参考文献	(98)
第四章 费率厘订	(100)
§ 4.1 引言	(100)
§ 4.2 费率厘订方法	(103)
§ 4.3 实验：费率厘订的过程	(113)
§ 4.4 免赔额情况下的保险费率厘订	(127)
§ 4.5 责任保险增加限额的费率厘订	(130)
习 题	(145)
参考文献	(148)
第五章 信度理论	(149)
§ 5.1 引言	(149)
§ 5.2 有限波动信度	(150)
§ 5.3 贝叶斯方法在经验费率厘定中的应用	(155)
§ 5.4 最大精度信度理论	(159)
§ 5.5 信度理论在经验估费法中的应用	(175)
习 题	(178)
参考文献	(180)
第六章 机动车辆保险的奖惩系统	(181)
§ 6.1 奖惩系统简介	(181)
§ 6.2 BMS 的稳态分布	(188)
§ 6.3 BMS 优劣的评价因素及其意义	(192)
§ 6.4 实验：我国汽车保险奖惩系统的实证分析	(196)
习 题	(203)
参考文献	(204)
附录 A：其他 BMS 介绍	(205)
附录 B：例 6-1 模拟时用到的 VBA 代码	(216)
第七章 风险分级	(218)
§ 7.1 选择费率厘定变量的准则	(218)
§ 7.2 分级系统的例子	(222)
§ 7.3 效率的度量	(224)
§ 7.4 实验级别相对数的估计	(226)
习 题	(236)
参考文献	(236)

第八章 准备金评估	(237)
§ 8.1 准备金概述	(237)
§ 8.2 数据的准备	(239)
§ 8.3 链梯法	(243)
§ 8.4 索均赔款法	(249)
§ 8.5 准备金进展法	(251)
§ 8.6 赔付率法	(256)
§ 8.7 B-F 法	(258)
§ 8.8 Cape Cod 法	(260)
§ 8.9 保费责任准备金评估	(263)
§ 8.10 理赔费用准备金	(267)
习 题	(272)
参考文献	(275)
附录：链梯准备金估计值的变异性分析	(276)
第九章 再保险定价和准备金评估	(290)
§ 9.1 非寿险公司风险控制状况分析	(290)
§ 9.2 再保险的种类	(293)
§ 9.3 再保险定价的基本方法	(296)
§ 9.4 再保险定价基本方法在再保险合同中的实际应用	(300)
§ 9.5 再保险准备金评估	(316)
习 题	(324)
参考文献	(326)
附录 A：Pareto 分布	(326)
附录 B：暴露费率和经验费率的可信性考虑	(328)
附录 C：标准风险理论模型	(330)
附录 D：缩写词	(330)
部分习题解答	(332)

非寿险精算的概率论基础

非寿险精算是依据经济学原理,利用现代数学和概率论与数理统计的方法,对非寿险业务中各种未来的财务风险进行分析和管理的综合性应用学科,包括非寿险保费的厘订、准备金的提留、再保险的安排和自留额的确定等。

从某种意义上说,概率论、数理统计与非寿险精算有着非常密切的关系,概率论中概率的定义、相关性质和计算、数字特征及常用概率分布等是非寿险精算中费率厘定、估计和拟合索赔分布等方面的重要理论基础。本书不再重复概率论中的基础内容,而只对非统计专业学生较少接触的一些概率论知识进行补充。

本章内容包括两节。§1.1 节介绍矩母函数的定义及有关性质,§1.2 节介绍条件均值和条件方差。这两部分内容都是风险理论和非寿险精算中常用的。

§ 1.1

矩 母 函 数

1.1.1 矩母函数的定义及性质

在保险中,损失可以用一个随机变量来表示,该随机变量的均值即为纯保费或风险保费。在纯保费的基础上加上一定的安全附加及费用附加就得到保险人收取的毛保费。需要指出的是,上面提到的损失可以是单个损失也可以是总损失或者承保业务的损失汇总。当涉及到总损失时,常常需要寻求若干个随机变量和的分布。由中心极限定理,对于独立随机变量和的分布,可以用正态分布来近似。

对于更一般的随机变量和的分布,我们可以使用“矩母函数”,再由随机变量分布的唯一性,得到所需要的分布。

定义 1.1.1 设 X 是一个随机变量,其分布函数为 $F(x)$,它的矩母函数定义为:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF(x) \quad (1.1.1)$$

矩母函数中的积分未必存在,因此矩母函数未必总有定义。但是,矩母函数在原点总是有定义的,即 $M_X(0)=1$; 假设 X 的矩母函数在原点的某邻域 $|t|<r$ 内存在, 则在该邻域内, $M_X(t)$ 具有如下性质:

(1) 在 $|t|<r$ 内, X 的分布函数由矩母函数 $M_X(t)$ 唯一确定, 若有两个分布函数 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$, 它们对应的矩母函数相同, 则有 $F_1(x) \equiv F_2(x)$ 。

(2) 记 X 的 k 阶原点矩为 $p_k = E(X^k)$, 则有

$$p_k = M_X^{(k)}(0), \quad k=1, 2, \dots \quad (1.1.2)$$

并且还有如下的泰勒展开式:

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot \frac{t^k}{k!}, \quad |t| < r \quad (1.1.3)$$

(3) 若令 $\psi(t) = \ln M_X(t)$, 则有:

$$\psi^{(j)}(0) = E[(X - E(X))^j], \quad j=1, 2, 3 \quad (1.1.4)$$

(4) 若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为相互独立的随机变量, 则独立随机变量和 $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 的矩母函数为各随机变量矩母函数的乘积, 即

$$M_S(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t) \quad (1.1.5)$$

(5) 若 $Y = aX + b$, a, b 为常数, 则随机变量 Y 的矩母函数为

$$M_Y(t) = e^{bt} \cdot M_X(at) \quad (1.1.6)$$

有关这五条性质的证明, 本书从略。有兴趣的读者可以参阅概率论教材。

上面第一条性质是应用矩母函数处理分布函数的理论保证, 其他四条性质是关于矩母函数的常用性质。这些性质在本书后面章节将会用到。

1.1.2 常用分布的矩母函数举例

下面我们列举一些常用概率分布的矩母函数的推导的例子。

1. 二项分布

$$P_r(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n$$

其矩母函数为 $M_X(t) = (1-p + pe^t)^n$ 。

证明: (方法一) 利用矩母函数的定义, 得

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (1-p + pe^t)^n \end{aligned}$$

(方法二) 由概率论知道, 二项分布随机变量 X 可以看作 n 个相互独立的 0-1 分布随机变量之和, 即

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad \text{其中 } X_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

由于 $M_{X_i}(t) = E(e^{tX_i}) = e^t \cdot p + e^0 \cdot (1-p) = 1-p + pe^t$

所以利用矩母函数的性质 (1.1.5), 有

$$M_X(t) = (1-p + pe^t)^n$$

再利用矩母函数的性质 (1.1.2), 得

$$\begin{aligned}\mu &= E(X) = M_X'(0) = [n \cdot (1-p+pe^t)^{n-1} \cdot pe^t]_{t=0} = np \\ \sigma^2 &= Var(X) = M_X''(0) - \mu^2 \\ &= [n(n-1)(1-p+pe^t)^{n-2}(pe^t)^2 + npe^t(1-p+pe^t)^{n-1}]_{t=0} - \mu^2 \\ &= np(1-p)\end{aligned}$$

2. 泊松分布

$$P_r(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k=0, 1, 2, \dots, \lambda > 0 \text{ 为参数}$$

其矩母函数为 $M_X(t) = E(e^{tX}) = e^{\lambda(e^t-1)}$

$$\text{证明: } M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

令 $\varphi(t) = \ln M_X(t) = \lambda(e^t - 1)$, 则利用矩母函数的性质 (1.1.4), 可得:

$$\begin{aligned}\mu &= E(X) = \varphi'(0) = \lambda \\ \sigma^2 &= Var(X) = \varphi''(0) = \lambda\end{aligned}$$

3. 负二项分布 $NB(r, p)$

$$P_r(X=k) = \binom{r+k-1}{k} p^r q^k, \quad \text{其中 } q=1-p, k=0, 1, 2, \dots$$

其矩母函数为 $M_X(t) = \left(\frac{p}{1-qe^t} \right)^r$ 。

$$\begin{aligned}\text{证明: (方法一)} \quad M_X(t) &= E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \binom{r+k-1}{k} p^r q^k \\ &= p^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} (qe^t)^k = \left(\frac{p}{1-qe^t} \right)^r\end{aligned}$$

(方法二) 由概率论知道, 负二项分布随机变量可以看作 r 个相互独立且都服从几何分布的随机变量之和, 即

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_r$$

其中 $X_i (i=1, 2, \dots, r)$ 服从几何分布, 即

$$P_r(X_i=k) = q^k \cdot p, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

由于 $M_{X_i}(t) = E(e^{tX_i}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} q^k p = \frac{p}{1-qe^t}$, 所以利用矩母函数的性质 (1.1.5), 得

$$M_X(t) = \left(\frac{p}{1-qe^t} \right)^r$$

下面利用矩母函数的性质 (1.1.4) 计算负二项分布的均值和方差。

令 $\varphi(t) = \ln M_X(t) = r \ln p - r \ln(1-qe^t)$, 则

$$\begin{aligned}\mu &= E(X) = \varphi'(0) = \frac{rqe^t}{1-qe^t} \Big|_{t=0} = \frac{rq}{p} \\ \sigma^2 &= Var(X) = \varphi''(0) = \frac{rqe^t(1-qe^t) + rqe^tqe^t}{(1-qe^t)^2} \Big|_{t=0} = \frac{rq}{p^2}\end{aligned}$$

4. 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$$

其矩母函数为 $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ 。

$$\begin{aligned} \text{证明: } M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu-\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \end{aligned}$$

类似地, 可以利用矩母函数的性质求得该正态分布的均值和方差:

$$\text{令 } \varphi(t) = \ln M_X(t) = \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2$$

则均值 $= \varphi'(0) = \mu$, 方差 $= \varphi''(0) = \sigma^2$ 。

§ 1.2

条件均值和条件方差

定义 1.2.1 以条件概率定义的均值和方差, 称为条件均值和条件方差。

$$E(X | Y = y) = \sum_x x \cdot P_r(X = x | Y = y) \quad (1.2.1)$$

其中求和号下的 x 表示该项对 $x_i (i=1, 2, \dots, \infty)$ 求和 (以下类似符号的意义相同)。

$$\begin{aligned} \text{Var}(X | Y = y) &= \sum_x [x - E(X | Y = y)]^2 \cdot P_r(X = x | Y = y) \\ &= E(X^2 | Y = y) - [E(X | Y = y)]^2 \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

以下是风险理论中最常用的两个公式。

$$(1) E(X) = E_Y[E(X | Y)] \quad (1.2.3)$$

$$(2) \text{Var}(X) = E_Y[\text{Var}(X | Y)] + \text{Var}_Y[E(X | Y)] \quad (1.2.4)$$

下面证明公式 (1.2.3)。

事实上,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x \cdot P_r(X = x) = \sum_x x \cdot \left\{ \sum_y P_r[(X = x) \cap (Y = y)] \right\} \\ &= \sum_x x \cdot \left\{ \sum_y [P_r(X = x | Y = y) \cdot P_r(Y = y)] \right\} \\ &= \sum_y \sum_x x \cdot P_r(X = x | Y = y) \cdot P_r(Y = y) \end{aligned}$$

由于 $E(X | Y = y) = \sum_x x \cdot P_r(X = x | Y = y)$, 所以有

$$E(X) = \sum_y E(X | Y = y) \cdot P_r(Y = y) = E_Y[E(X | Y)]$$

于是公式 (1.2.3) 得证。

下面证明公式 (1.2.4)。

事实上, 由定义 (1.2.2),

$$E(X^2 | Y) = \text{Var}(X | Y) + [E(X | Y)]^2$$

又由 (1.2.3), 得

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E_Y[E(X^2 | Y)] \\ &= E_Y\{\text{Var}(X | Y) + [E(X | Y)]^2\} \\ &= E_Y[\text{Var}(X | Y)] + E_Y[E(X | Y)]^2 \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= E_Y[\text{Var}(X | Y)] + E_Y[E(X | Y)]^2 - \{E_Y[E(X | Y)]\}^2 \\ &= E_Y[\text{Var}(X | Y)] + \text{Var}_Y[E(X | Y)] \end{aligned}$$

于是公式 (1.2.4) 得证。

以上两个公式对于连续型随机变量也是适用的, 其证明从略。

【例 1-1】某种类型的保险单, 它的单个索赔的赔付额具有如表 1-1 所描述的分布, 而它的每份保险单在有效年度内发生索赔的次数具有表 1-2 描述的分布。

表 1-1

某保险公司家财险索赔额分布

单位: 元

索赔额	索赔件数
0 ~ 500	1 400
500 ~ 1 000	1 650
1 000 ~ 2 000	1 780
2 000 ~ 4 000	1 830
4 000 ~ 8 000	902
8 000 ~ 16 000	147
总 计	7 709

表 1-2

每份保单索赔次数分布

单位: 次

索赔次数 (j)	发生 j 次索赔的保单数目
0	6 895
1	534
2	205
3	75
合 计	7 709

试估计在有效年度内 100 份此类保险单所包括的保险责任总的赔付支出的均值和标准差。

解：令 X 表示该保单在有效年度内发生赔案的总赔付额， Y 表示某份保单在有效年度内发生的索赔次数，则对于某份保单来说，其在有效年度内发生赔案的总赔付额可以表示为：

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_Y$$

其中 $X_i (i=1, 2, \cdots)$ 表示第 i 次索赔的赔付额，并且满足：

$$E(X_i) = \mu$$

$$\text{Var}(X_i) = \sigma^2$$

则利用条件均值和条件方差公式，得

$$E(X) = E[E(X|Y)] = E[\mu \cdot Y] = \mu \cdot E(Y)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[\text{Var}(X|Y)] + \text{Var}[E(X|Y)] \\ &= E[Y \cdot \sigma^2] + \text{Var}[Y \cdot \mu] \\ &= \sigma^2 E(Y) + \mu^2 \cdot \text{Var}(Y) \end{aligned}$$

而 μ, σ^2 分别是单个索赔的期望和方差，其计算结果（估计值）为：

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sum f_i} \sum x_i^2 \cdot f_i - \mu^2 = 97\,458\,328 - 2\,195.29^2 = 4\,926\,529.3 (\text{元}^2)$$

其中 x_i 和 f_i 分别表示每组赔付额的组中值和相应的频数。

另外，每份保单在有效年度内索赔次数的均值和方差的估计值分别为：

$$E(Y) \text{ 估计值} = \frac{0 \times 6\,895 + 1 \times 534 + 2 \times 205 + 3 \times 75}{7\,709} = 0.1516$$

$$\text{Var}(Y) \text{ 估计值} = \frac{0^2 \times 6\,895 + 1^2 \times 534 + 2^2 \times 205 + 3^2 \times 75}{7\,709} - 0.1516^2 = 0.2402$$

从而有

$$E(X) (\text{估计值}) = 2\,195.29 \times 0.1516 = 332.81 (\text{元})$$

$$\text{Var}(X) (\text{估计值}) = 4\,926\,529.3 \times 0.1516 + 2\,195.29^2 \times 0.2402 = 1\,904\,457.3 (\text{元}^2)$$

本题要计算的是 100 份此类保单所包括的保险责任总的赔付支出的均值和标准差。设各份保单的索赔相互独立，则 100 份此类保单所包括的保险责任总的赔付支出的均值和标准差的估计值分别为：

$$\text{均值：} 100E(X) = 33\,281 (\text{元})$$

$$\text{标准差：} \sqrt{100\text{Var}(X)} = 10\sqrt{\text{Var}(X)} = 13\,800.21 (\text{元})$$

习 题

1. 一个随机变量 X 的矩母函数为：

$$M_X(t) = (1 - 2t)^{-9}, \quad t < \frac{1}{2}$$

(1) 用矩母函数计算 X 的均值和方差；

(2) 用正态函数近似计算 $y_{0.05}$ 和 $y_{0.01}$ ，其中 y_ε 是满足 $P_r(X > y_\varepsilon) = \varepsilon$ 的解；

(3) 回忆所学过的分布函数和矩母函数，根据前面的矩母函数确定 X 的分布函数，重