

高等 学 校 教 材

高等数学

上册

南开大学数学科学学院
刘光旭 张效成 赖学坚 编



高等教育出版社

5. (1) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} - x + \frac{1}{2}$

要参容内

高等学校教材

本书是根据教育部《工科数学课程教学基本要求》编写的高等学校工科数学基础课程教材。本书分上、下两册。上册主要讲述一元微分学、多元微分学、一元积分学、多元积分学、微分方程、无穷级数、复变函数论、概率论与数理统计、线性代数、解析几何、数学模型等。下册主要讲述多元微分学、多元积分学、微分方程、无穷级数、复变函数论、概率论与数理统计、线性代数、解析几何、数学模型等。

高等数学

上册

图书在版编目(CIP)数据

南开大学数学科学学院

刘光旭 张效成 赖学坚 编

ISBN 958-7-04-023871-9
I. ①刘... II. ①刘... ②张... ③赖... III. ①高等数学—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第020092号

责任编辑：王... 封面设计：... 印刷：... 发行：... 地址：... 电话：... 邮编：... 网址：... 电子邮箱：...

ISBN 958-7-04-023871-9	定价	410.00元
010-28281118	开本	787×960 1/16
800-810-0298	印张	22
http://www.hep.com.cn	字数	508千字
http://www.hep.com.cn	版次	2008年6月第1次印刷
http://www.landinfo.com.cn	印次	2008年6月第1次印刷
http://www.landinfo.com.cn	印数	2230元
http://www.wideworld.com		

高等教育出版社

地址：北京市西城区德胜门内大街2号
邮编：100120
电话：010-28281000
网址：http://www.hep.com.cn
电子邮箱：hep@hep.com.cn

内容提要

本书是为一般高等院校物理学类、电子信息科学类、电气信息类相关专业的本科生(兼顾对数学要求偏高的工科类专业)所编写的高等数学教材。全书分上、下册。上册内容主要包括一元函数微积分学和常微分方程初步。下册内容主要包括空间解析几何、多元函数微积分学和级数。本书理论的讲述逻辑清晰、条理分明;例题的选取层次有序,并力求做到富有典型性、综合性、启发性和趣味性;习题的编排难易适中,有A类、B类阶梯之分。书后附有习题答案与提示,供教师和学生参考使用。

本书是作者多年教学经验的总结和体现。它具有注重基础、突出重点、例题丰富、简明实用、便于讲授、便于学生理解和掌握、教学要求把握适度等特点。在基础理论的系统讲解、综合计算能力的严格训练以及实际应用能力的培养等方面都力求做到适合相关专业的教学要求。讲授本书有较大的灵活性,教师可根据课程的教学要求对内容作适当取舍。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/刘光旭,张效成,赖学坚编.—北京:高等教育出版社,2008.6

ISBN 978-7-04-023871-6

I. 高… II. ①刘…②张…③赖… III. 高等数学—高等学校—教材 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第059095号

策划编辑 于丽娜 责任编辑 董达英 封面设计 王 晔 责任绘图 黄建英
版式设计 余 杨 责任校对 朱惠芳 责任印制 陈伟光

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京市鑫霸印务有限公司

开 本 787×960 1/16
印 张 22
字 数 410 000

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landraco.com>
<http://www.landraco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2008年6月第1版
印 次 2008年6月第1次印刷
定 价 25.30元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 23871-00

前 言

数学之美,引人入胜,就拿我们在中学常见的三个数 e, i, π 来说,在高等数学中,我们将容易证明它们之间存在着一个非常有趣的简单关系: $e^{i\pi} = -1$ 。更多美妙无比的数学理论、数学方法和数学公式将呈现在高等数学的讲述中。高等数学对于许多后继课程的学习,以及作为科研工作基本功的训练,甚至对大学生的一生都将起到非常重要的作用。学习高等数学不仅要系统地掌握它的知识,接受包括演绎、归纳、分析等各项数学素质的训练,更重要的还在于熟练地掌握一种科学语言,学到数学理性思维的模式,提高运用数学思维和数学方法分析问题和解决问题的能力。

在多年讲授高等数学的教学实践中,编者对高等数学课程的教学要求、教学规律、教学方法以及教学质量的评估,都有了一个比较清楚的了解和把握。本书就是编者多年教学经验的总结和体现。在本书编写过程中,特别注意了以下几点:(1) 本书是为一般高等院校物理学类、电子信息科学类、电气信息类相关专业的本科生(兼顾对数学要求偏高的工科类专业)所编写的高等数学教材。(2) 本书具有注重基础、突出重点、例题丰富、简明实用、便于讲授、便于学生理解和掌握、教学要求把握适度等特点。在基础理论的系统讲解和综合计算能力的严格训练以及实际应用能力的培养等方面都力求做到适合相关专业的教学要求。为了加强学生对数学理论与方法的理解和掌握,也考虑到提高学生运算能力的教学要求以及部分学生的考研需要,本书比较注意综合演算能力的培养和训练。为此,书中适当地加强了对典型问题、典型方法的讨论和相关例题的演算。(3) 对于重点内容(例如微分中值定理)与核心内容(例如牛顿-莱布尼茨公式、格林公式、高斯公式和斯托克斯公式——这些公式揭示了区域上的积分与其边界上的值或积分之间的联系)都给予必要的加强和充实。由于格林公式、高斯公式和斯托克斯公式在后继课程中有着重要作用,本书将它们以及与之相关的内容单独列为一章,并作了比较充分的讨论。(4) 在引进数学概念时,注意介绍物理背景;举例讲解数学理论和方法的应用时,注意联系实际。同时对数学建模及其求解也做了初步的讲解,并配有练习。

本书的第1、12章由赖学坚副教授执笔,第2、3、8章由张效成教授执笔,第4、5、6、7、9、10、11、13章由刘光旭教授执笔。最后由刘光旭教授负责全书的统稿工作。书稿的录入工作由张海、徐艳华、陈镜宇、沈鑫、李东岗等同志完成。

本书能够得以顺利出版,首先要感谢高等教育出版社数学分社。他们对本

教材的定位、总体思路以及许多具体问题都给予了悉心的指导和热心的帮助。本书的编写得到了南开大学教务处的立项支持。数学学院高等数学教学部负责本书编写的组织工作。数学学院高等数学教学办公室主任薛锋副研究员在协调、联络及后勤保障等方面做了大量工作,数学学院李桂芝老师为本书顺利完稿付出了辛勤的劳动。对来自方方面面的关心、支持与帮助,在这里一并表示衷心感谢。

由于时间仓促和编者水平所限,不足与缺点在所难免,诚望读者批评指正。

2008年2月
于南开大学数学科学学院

目 录

38	念的符号	1.3
48	同半同符号	1.1
48	义的符号	2.1
78	义同的符号	3.1
88	系同的符号	4.1
98	1.5
108	5.8
118	1.5
128	2.5
138	3.5
148	4.5
158	5.5
168	6.5
178	7.5
188	8.5
198	9.5
208	10.5
218	11.5
228	12.5
238	13.5
248	14.5
258	15.5
268	16.5
278	17.5
288	18.5
298	19.5
308	20.5
318	21.5
328	22.5
338	23.5
348	24.5
358	25.5
368	26.5
378	27.5
388	28.5
398	29.5
408	30.5
418	31.5
428	32.5
438	33.5
448	34.5
458	35.5
468	36.5
478	37.5
488	38.5
498	39.5
508	40.5
518	41.5
528	42.5
538	43.5
548	44.5
558	45.5
568	46.5
578	47.5
588	48.5
598	49.5
608	50.5
618	51.5
628	52.5
638	53.5
648	54.5
658	55.5
668	56.5
678	57.5
688	58.5
698	59.5
708	60.5
718	61.5
728	62.5
738	63.5
748	64.5
758	65.5
768	66.5
778	67.5
788	68.5
798	69.5
808	70.5
818	71.5
828	72.5
838	73.5
848	74.5
858	75.5
868	76.5
878	77.5
888	78.5
898	79.5
908	80.5
918	81.5
928	82.5
938	83.5
948	84.5
958	85.5
968	86.5
978	87.5
988	88.5
998	89.5
1008	90.5
1018	91.5
1028	92.5
1038	93.5
1048	94.5
1058	95.5
1068	96.5
1078	97.5
1088	98.5
1098	99.5
1108	100.5

第 1 章 函数、极限与连续函数 1

§ 1 变量与函数 1

1.1 实数 1

1.2 常量与变量 3

1.3 函数概念 4

1.4 几类具有某种特性的函数 10

1.5 反函数与复合函数 12

1.6 初等函数 17

习题 1.1 18

§ 2 极限 20

2.1 数列的极限 21

2.2 数列极限的性质与运算 26

2.3 函数的极限 31

2.4 函数极限的性质与运算 36

2.5 数列极限与函数极限的关系 41

习题 1.2 44

§ 3 极限存在准则 两个重要极限 46

3.1 夹逼定理、两个重要极限 46

3.2 几个基本定理、柯西收敛准则 54

习题 1.3 57

§ 4 无穷小量与无穷大量 58

4.1 无穷小量与无穷大量的概念 58

4.2 无穷小量的比较 61

4.3 无穷小的主部与无穷大量的比较 66

习题 1.4 69

§ 5 连续函数 70

5.1 连续函数概念 70

5.2 间断点的分类 72

5.3 连续函数的运算法则、初等函数的连续性 74

5.4 闭区间上连续函数的性质 75

习题 1.5 81

第 2 章 导数与微分 83

§1 导数的概念	83
1.1 导数问题举例	83
1.2 导数的定义	84
1.3 导数的几何意义	87
1.4 可导与连续的关系	88
习题 2.1	89
§2 导数的基本公式和运算法则	91
2.1 基本初等函数的导数公式	91
2.2 导数的四则运算	92
2.3 复合函数的求导法则	94
2.4 反函数求导法则	96
2.5 隐函数求导法则	98
2.6 参数方程和极坐标方程所确定的函数的导数	100
2.7 分段函数求导方法	102
习题 2.2	103
§3 高阶导数	107
习题 2.3	110
§4 微分	112
4.1 微分的概念	112
4.2 微分基本公式与运算法则	114
4.3 高阶微分	115
习题 2.4	116
§5 导数与微分的简单应用	117
5.1 相关变化率	117
5.2 若干物理问题	118
5.3 近似计算与误差估计	119
习题 2.5	121
第3章 微分学基本定理及其应用	123
§1 微分中值定理	123
习题 3.1	130
§2 洛必达法则	132
2.1 “ $\frac{0}{0}$ ”型不定式	132
2.2 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型不定式	134
2.3 其他类型的不定式	136
习题 3.2	139
§3 泰勒公式	140

133	3.1 泰勒公式及麦克劳林公式	140
133	3.2 函数展开成泰勒公式的直接法和间接法	144
133	3.3 泰勒公式的应用	146
133	习题 3.3	148
133	§4 导数在函数研究中的应用	149
133	4.1 函数的单调性	149
133	4.2 函数的极值与最值	151
133	4.3 曲线的凹凸性与拐点	156
133	4.4 直角坐标系下函数图形的描绘	158
133	4.5 曲线的曲率	160
133	4.6 方程的近似解	167
133	习题 3.4	170
	第4章 不定积分	173
133	§1 原函数与不定积分	173
133	1.1 原函数与不定积分的概念	173
133	1.2 基本积分表	175
133	1.3 不定积分的性质	175
133	习题 4.1	179
133	§2 积分法	180
133	2.1 第一换元法	181
133	2.2 第二换元法	182
133	2.3 分部积分法	186
133	2.4 有理函数的积分法	189
133	2.5 三角函数有理式的积分法	193
133	习题 4.2	197
	第5章 定积分及其应用	203
133	§1 定积分的概念与基本性质	203
133	1.1 典型例题	203
133	1.2 定积分的定义	204
133	1.3 定积分的几何意义	206
133	1.4 定积分的基本性质	207
133	习题 5.1	210
133	§2 微积分基本公式	212
133	2.1 变上限积分及其导数	212
133	2.2 牛顿-莱布尼茨公式	214
133	习题 5.2	218
133	§3 定积分的算法	221
133	3.1 定积分的凑微分积分法	221

3.2	定积分的换元积分法	221
3.3	定积分的分部积分法	227
习题 5.3		229
§ 4	定积分的应用	231
4.1	平面图形的面积	232
4.2	平行截面面积为已知的立体体积	237
4.3	旋转体的体积	239
4.4	平面曲线的弧长	241
4.5	旋转体的侧面积	245
4.6	变力沿直线所做的功	246
4.7	引力	248
4.8	平面曲线弧的质心	249
习题 5.4		250
第 6 章	微分方程初步	254
§ 1	一阶微分方程	256
1.1	解的存在与唯一性定理	256
1.2	可分离变量的微分方程	256
1.3	齐次方程	258
1.4	一阶线性微分方程	260
1.5	伯努利方程	264
1.6	一阶微分方程应用实例	265
习题 6.1		274
§ 2	二阶微分方程	276
2.1	可降阶的特殊二阶微分方程	276
2.2	二阶线性微分方程的通解结构	280
2.3	二阶常系数齐次线性微分方程解法	284
2.4	二阶常系数非齐次线性微分方程解法	289
2.5	欧拉方程	292
习题 6.2		293
附录 1	常用数学符号	295
附录 2	积分表	299
附录 3	希腊字母	310
部分习题答案与提示		311

解得 $\frac{1}{0!} > 1, \frac{1}{1!} > 1, \frac{1}{2!} > 1, \dots$, 显然, 微分方程的解小

第1章 函数、极限与连续函数

函数是高等数学的主要研究对象, 而极限理论是研究微积分的基础, 微积分的诸多概念及其理论都是建立在极限理论基础上的. 本章介绍函数、极限和函数的连续性, 为今后的讨论奠定基础.

§1 变量与函数

1.1 实数

1. 有理数、无理数与实数轴

人类最早知道的数是正整数: $1, 2, 3, \dots$. 通常全体正整数用 \mathbf{N}^* 表示, 即 $\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$. 由于做加法的逆运算的需要, 人们增添了零及负整数, 从而将正整数扩充为整数; 今后我们用 \mathbf{N} 表示全体非负整数, 即 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, 而用 \mathbf{Z} 表示全体整数, 即

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

乘法的逆运算又导致分数的产生, 而分数又称为有理数, 通常用 \mathbf{Q} 表示全体有理数, 即

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbf{Z}, q > 0 \text{ 且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质} \right\}.$$

我们知道有理数可以表示成有穷小数或无穷循环小数; 反过来, 任何有穷小数或无穷循环小数一定是有理数. 我们知道腰等于 1 的等腰直角三角形的斜边长为 $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ 不是有理数, 它是无理数; π 也是无理数; 人们认为任何无穷不循环小数表示的数为无理数. 而有理数可以表示成有穷小数或无穷循环小数, 因此任何有理数加或减一个无理数所得的数只能用无穷不循环小数表示, 即任一个有理数加或减一个无理数仍是一个无理数.

设 a 是任一个无理数, 它的无穷不循环小数表示为

$$a = m.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

其中 m 是一个整数, $a_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 是在 $0, 1, 2, \dots, 9$ 中取值的整数. 这里 a_n 是 a 的第 n 位小数. 我们考虑 a 的近似小数 $\alpha_n = m.a_1a_2\cdots a_n$, 即只保留其前 n 位

小数所构成的数,显然, α_n 是一个有理数,并且有 $|a - \alpha_n| < \frac{1}{10^n}$, 故当 n 无限增大时,有理数 α_n 可以任意趋近无理数 a . 因此,可以认为任一个无理数是一串有理数无限逼近的结果.

通常我们把有理数与无理数统称为**实数**,实数全体组成的集合记作 \mathbf{R} . 实数集 \mathbf{R} 是有序集.

规定了原点、单位长以及正方向的直线称为**实数轴**,初等数学中已经介绍过实数与实数轴上的点之间可建立一一对应. 实数轴上的点可以用其表示的数来称呼,例如,可以说点 2, 点 $\sqrt{2}$ 等等. 这样,我们既可以把数称为实数轴上的点,也可以反过来把实数轴上的点称为数. 今后,我们对实数和它在数轴上对应的点常常不加区别. 由于实数集 \mathbf{R} 与实数轴上的点是一一对应的,因此,实数无空隙地充满整个实数轴,即实数集 \mathbf{R} 具有完备性. 显然有理数集 \mathbf{Q} 密密麻麻地分布在整个实轴上. 因为任一个有理数加一个或减一个无理数仍是一个无理数,所以无理数也密密麻麻地分布在实轴上. 因此,有理数集与无理数集各自在实数轴上具有稠密性,即实数轴上任意两个不同点之间都有有理数点和无理数点.

2. 几个常用的不等式

设 a, b 为实数, a 的绝对值记作 $|a|$, 它的定义是

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

因此,数 a 的绝对值 $|a|$ 在数轴上恰好就是点 a 到原点 O 的距离. 数 $a - b$ 的绝对值 $|a - b|$ 在数轴上代表点 a 与点 b 两点之间的距离,我们有如下几个常用的不等式:

$$(1) |x - a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r \quad (r > 0);$$

$$(2) |a + b| \leq |a| + |b|;$$

$$(3) |a - b| \geq ||a| - |b||;$$

(4) 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 个正实数, 则有

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad (1.1)$$

等号成立的充分必要条件是 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

3. 区间与邻域

设 a, b 为两个实数,且 $a < b$. 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a, b 为端点的**闭区间**,记作 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}.$$

类似地,就其是否包括左、右端点 a, b 等各种情况的有限区间(又叫做有穷区

间)有

开区间: $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$;

左开右闭区间: $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$;

左闭右开区间: $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$.

我们经常要讨论所谓无限区间(又叫无穷区间),就是端点中有“ $+\infty$ ”(读作正无穷)或有“ $-\infty$ ”(读作负无穷)的区间,例如:

左闭右正无穷的区间: $[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$;

左负无穷右开的区间: $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$;

而无穷区间 $(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}$,它是全体实数的集合(整个实数轴).上述的某些区间在数轴上如图 1.1 所示.

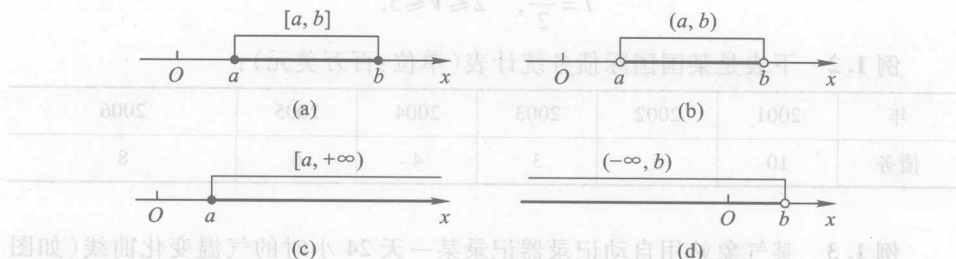


图 1.1

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点,以及是有限区间还是无限区间的场合,我们就简单地称它为“区间”,且用 I 表示.

定义 1.1 设 δ (δ 是希腊字母,读作 [δ]) 是一个正数,称开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a, \delta)$,即 $U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}$ (如图 1.2 所示).

邻域 $U(a, \delta)$ 中去掉中心 a 后的所有点组成的集合称为点 a 的去心 δ 邻域(也称空心邻域),记作 $\dot{U}(a, \delta)$,即 $\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$. 称开区间 $(a - \delta, a)$ 为 a 的左 δ 邻域,称开区间 $(a, a + \delta)$ 为 a 的右 δ 邻域.

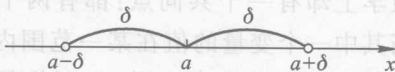


图 1.2

1.2 常量与变量

在所考察问题的某一过程中或系统中,有些量是始终保持不变的,我们把它称为常量,而有些量却在考察过程中不断地变化,我们把它们称为变量.例如自由落体下落的距离 s 与时间 t 都是变量,它们之间的依赖关系式为 $s = \frac{1}{2}gt^2$,其

中 $\frac{1}{2}$ 和加速度 g 都是常量.

习惯上,通常用英文字母表中的前几个字母 a, b, c, d 等表示常量,而用后面几个字母 x, y, z, t, u, v, w 等表示变量. 变量的变化范围(或取值范围)称为变量的变化域. 在许多情况中,变量的变化域是一个或几个区间.

1.3 函数概念

1. 函数的定义及其表示法

例 1.1 在某封闭直流电路中,其总电阻 $R = 2(\Omega)$, 两端电压 V 在 2 V 到 5 V 之间变化. 则线路中的总电流 $I(\text{A})$ 与电压 V 的关系式为

$$I = \frac{V}{2}, \quad 2 \leq V \leq 5.$$

例 1.2 下表是某国国际债务统计表(单位:百万美元):

年	2001	2002	2003	2004	2005	2006
债务	10	5	3	4	6	8

例 1.3 某气象站用自动记录器记录某一天 24 小时的气温变化曲线(如图 1.3 所示),这里的变量是时间 t 与气温 T . t 值的变化域为闭区间 $[0, 24]$. 对于 $[0, 24]$ 中的每一个 t 值,根据这条曲线,都有唯一确定的 T 值与它对应.

虽然上面三个例子的实际背景不同,但在数学上却有一个共同点:都有两个变量,并且当其中一个变量的值在某一范围内取定后,根据某种对应规律或法则(它可能是公式,如例 1.1;也可能是表格,如例 1.2;或者图形,如例 1.3),另一个变量的值便唯一地被确定.

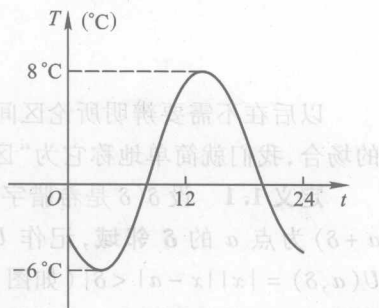


图 1.3

在中学里我们已讲述了映射的概念,其确切定义如下述:设 X, Y 是两个非空集合,若对集合 X 中的每一个元素 x ,均可找到集合 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应,则称这个对应是集合 X 到集合 Y 的一个映射,记为 f ,或记作

$$f: X \rightarrow Y,$$

将 x 的对应元素 y 记作 $f(x): x \mapsto y = f(x)$, 并称 y 为映射 f 下的像,而 x 称为映射 f 下的原像(或称为逆像). 集合 X 称为映射 f 的定义域,记作 $D_f = X$, 而 X 的所有元素的像 $f(x)$ 的集合

$$\{y | y \in Y, y = f(x), x \in X\}$$

称为映射 f 的值域, 记为 R_f (或 $f(X)$).

有了映射的概念后, 就可以定义函数的概念.

定义 1.2 设 X 是一个非空的实数集合, 则称映射 $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ 为定义在 X 上的函数, 即对于 X 中的每一个 x 值, 按对应规律 (或法则) f , 在实数域 \mathbf{R} 内都有唯一确定的实数 y 与之对应. 称 y 为函数 f 在点 x 处的函数值, 记作

$y = f(x), x \in X$.
 x 称为自变量, y 称为因变量, X 称为函数 f 的定义域, 记作 D_f , 即 $D_f = X$.

函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(X)$, 即

$$R_f = f(X) = \{y \mid y = f(x), x \in X\}.$$

当自变量 x 在 X 中取定某一个值 x_0 时, 对应的因变量 y 的值称为函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的值, 记作

$$f(x_0) \text{ 或 } y \Big|_{x=x_0}, \text{ 也可记为 } f(x) \Big|_{x=x_0}.$$

有时还直接用因变量的记号来表示函数, 即把函数记作 $y = y(x)$. 因此函数在点 $x = x_0$ 处的值也可以记作 $y(x_0)$.

在函数的定义中, 记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的: f 表示自变量 x 与因变量 y 之间的对应规则, $f(x)$ 则表示与自变量 x 对应的函数值. 但习惯上常用记号 “ $y = f(x), x \in X$ ” 来表示定义在 X 上的函数 f , f 与 $y = f(x)$ 不作严格区分. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系, 叫做函数关系.

表示函数的记号是可以任意选取的, 除常用 f 外, 还可以用其他的英文字母或希腊字母, 如 “ g ”, “ F ”, “ G ”, “ φ ” 等, 相应的函数可记作 $y = g(x), y = F(x), y = G(x), y = \varphi(x)$ 等.

由函数的定义可知, 当定义域与对应规则确定后, 函数就完全确定了. 可见, 定义域与对应规则是确定函数的两个要素. 因此, 对于两个函数 f, g , 如果它们有相同的定义域 X , 且对 X 中的每个 x 都有相同的函数值, 即

$$f(x) = g(x), \quad x \in X,$$

则 f 与 g 是相同的函数, 否则 f 与 g 是不同的函数. 此外, 自变量和因变量采用什么符号来表示则是无关紧要的. 因此, 函数 $y = f(x), x \in X$ 与函数 $s = f(t), t \in X$ 表示同一个函数.

例 1.4 判断下列函数是否相同:

$$f(x) = 1, \quad g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, \quad h(x) = \frac{x}{x}.$$

解 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是两个相同的函数, 这是因为 f 与 g 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$, 且都是取值为 1 的常数函数. $f(x), g(x)$ 与 $h(x)$ 是不同的函数, 因为 $D_f = D_g = \mathbf{R}$, 而 $D_h = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

最常用的表示函数的方法有三种: 解析法 (又叫做公式法, 如例 1.1), 表格

法(如例 1.2),图像法(如例 1.3),即用坐标平面上的曲线来表示函数的方法称为图像法,或称为图示法.三种表示法各有自己的优点.图像法能清楚、直观地表示出函数的许多性质.表格法使我们可以免去许多复杂计算而直接查表得到函数值.解析法便于我们对函数的性质作理论研究.今后我们经常把三种方法结合起来使用,而以解析法为主.

设函数 $y=f(x)$, $x \in X$, 当自变量 x 在 X 中取定某一个值 x_0 时,对应的因变量 y 的值称为函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的值,记作

$$f(x_0) \text{ 或 } y(x_0), y \Big|_{x=x_0}, f(x) \Big|_{x=x_0}.$$

例 1.5 设 $f(x)=x^2$, 试求 $f(0)$, $f(3)$, $f(x_0+\Delta x)$, $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

解

$$f(0)=0^2=0; \quad f(3)=3^2=9;$$

$$f(x_0+\Delta x)=(x_0+\Delta x)^2=x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2;$$

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x)-f(x_0) &= (x_0+\Delta x)^2-x_0^2 \\ &= 2x_0\Delta x+\Delta x^2. \end{aligned}$$

2. 求函数定义域的方法

函数的定义域通常按以下两种情形来确定:一种是对有实际背景的函数,根据实际背景中的实际意义确定.例如,例 1.1 的定义域为 $[2,5]$, 例 1.3 的定义域为 $[0,24]$. 另一种是对解析式表达的函数,通常约定这种函数的定义域是使得公式有意义的一切实数组成的集合,这种定义域称为函数的自然定义域.在这种约定之下,一般只要写出解析式 $y=f(x)$ 即可,而不必再写出 $D_f=X$.

例 1.6 函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ ($a>0$) 的定义域为闭区间 $[-a,a]$; 函数 $y=\log_a(1-x^2)$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$) 的定义域为开区间 $(-1,1)$.

例 1.7 求 $y=\sqrt{\frac{9-x^2}{x-1}}$ 的定义域.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \begin{cases} 9-x^2 \geq 0, \\ x-1 > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 9-x^2 \leq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} |x| \leq 3, \\ x > 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} |x| \geq 3, \\ x < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

即 $1 < x \leq 3$ 或 $x \leq -3$, 故函数的定义域为 $1 < x \leq 3$ 或 $x \leq -3$, 即 $(1,3] \cup [-3, -\infty)$.

3. 几个常数的函数

例 1.8 常数函数 $y=c$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 它的图像是一条平行于 x 轴的直线, 如图 1.4 所示.

例 1.9 绝对值函数

这个函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[0, +\infty)$, 其图形关于 y 轴对称, 如图 1.5 所示.

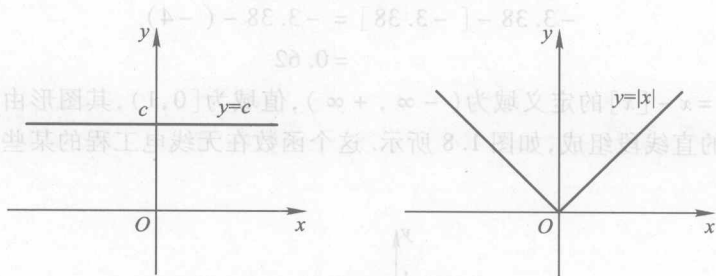


图 1.4 图 1.5

例 1.10 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数, 它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\{-1, 0, 1\}$, 其图形关于原点对称, 如图 1.6 所示.

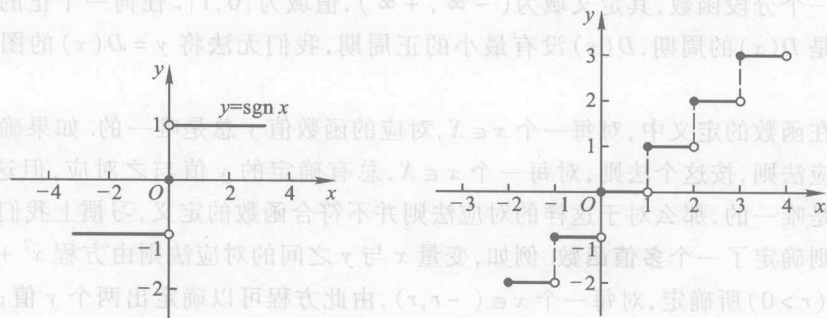


图 1.6 图 1.7

例 1.9 与例 1.10 是分段表达的函数, 对于自变量的某些不同值, 函数的解析表达式不同, 这样的函数称为分段函数.

例 1.11 取整函数 $y = [x]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数 (有时称为 x 的最大整数部分), 例如 $[\sqrt{2}] = 1, [\pi] = 3, [-\pi] = -4, [5.61] = 5, [-5.61] = -6$. $y = [x]$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 \mathbf{Z} , 如图 1.7 所示.

$y = [x]$ 的图形在 x 为整数处, 图形发生跳跃, 跃度为 1, 而在 x 的其余各处的图形都是平行于 x 轴的直线段. 我们称如此类型的函数为阶梯函数.

例 1.12 函数 $y = x - [x]$ 表示 x 的非负小数部分, 例如,

$$\begin{aligned} 3.38 - [3.38] &= 0.38, \\ -3.38 - [-3.38] &= -3.38 - (-4) \\ &= 0.62 \end{aligned}$$

等. 函数 $y = x - [x]$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[0, 1)$, 其图形由无穷多条相互平行的直线段组成, 如图 1.8 所示. 这个函数在无线电工程的某些计算中常常用到.

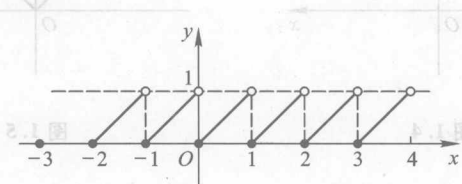


图 1.8

例 1.13 狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时,} \end{cases}$$

它是一个分段函数, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\{0, 1\}$. 任何一个正有理数都是 $D(x)$ 的周期, $D(x)$ 没有最小的正周期, 我们无法将 $y = D(x)$ 的图形画出来.

在函数的定义中, 对每一个 $x \in X$, 对应的函数值 y 总是唯一的. 如果确定一个对应法则, 按这个法则, 对每一个 $x \in X$, 总有确定的 y 值与之对应, 但这个 y 不总是唯一的, 那么对于这样的对应法则并不符合函数的定义, 习惯上我们称这种法则确定了一个多值函数. 例如, 变量 x 与 y 之间的对应法则由方程 $x^2 + y^2 - r^2 = 0 (r > 0)$ 所确定, 对每一个 $x \in (-r, r)$, 由此方程可以确定出两个 y 值; 如果我们附加条件 $y \geq 0$ 或 $y \leq 0$, 就得到这个多值函数的单值分支 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ 或 $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ (记 $F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$). 前面给出的函数均为显式表示, 其形式为 $y = f(x)$, 如此类型的函数叫做显函数, 例如, $y = x^2, y = \sin x$ 等. 有时, 确定 x 与 y 的函数关系是通过一个方程

$$F(x, y) = 0$$

建立的, 这样的函数叫做隐函数, 即是说函数 $y = f(x)$ 由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定, 但它没有把变量 y 从方程 $F(x, y) = 0$ 中解出. 在实际应用中, 我们往往不是