普通高等教育“十一五”国家级规划教材

经济数学基础

第三版 下册

顾静相 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

经济数学基础

第三版

下　册

顾静相　主编

钟　宜　傅修文　编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材，是按照教育部组织制定的"高职高专教育基础课程教育基本要求"和"高职高专教育专业人才培养目标及规格"组织编写的。本书依据"以应用为目的，以必需够用为度"的原则，较好地体现了"数学为本，经济为用"的经济数学特点。本书第一版获得了全国普通高等学校优秀教材评审二等奖。

本书分为上、下两册，共三个模块，总的参考学时为108课时。上册主要介绍一元函数微积分的内容，并简要介绍了二元函数和偏导数、微分方程初步等内容。下册内容为线性代数基础和概率论与数理统计基础两个模块。每一模块前有一篇简介，使学生初步了解它的历史背景；每一模块后安排了一个综合案例，使学生进一步体会经济数学的用途。

每章正文之前给出了本章导读，主要简介本章基本内容和学习目标，章后有内容小结、一个相关数学家小传及练习题。

本书适用于高职高专院校、成人高校及其他职业学院、继续教育学院和民办高校，也可作为有关人员学习经济数学知识的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

经济数学基础．下册／顾静相主编．—3版．—北京：高等教育出版社，2008.3
ISBN 978-7-04-023156-4

Ⅰ．经…　Ⅱ．顾…　Ⅲ．经济数学－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第004743号

策划编辑 邓雁城　**责任编辑** 崔梅萍　**封面设计** 王凌波　**责任绘图** 尹文军
版式设计 马敬茹　**责任校对** 杨雪莲　**责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
		版　　次	2000年8月第1版
开　　本	787×960　1/16		2008年3月第3版
印　　张	17.75	印　　次	2008年3月第1次印刷
字　　数	330 000	定　　价	25.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　23156-00

第三版修订说明

启迪人们思维、推进科学纵深发展的皇冠明珠——数学，却常常遭遇尴尬。“听起来难，学起来更难，用起来则难上加难”，这也许就是这么多年来牵系在拼命学习数学课程的芸芸众生心间的不解忧愁，也是数学教育和数学课程改革不可回避的首要问题。

为了探索解决这个问题，也是为了更好地适应当前我国高等教育的发展、满足社会对高校应用型人才培养的各类要求、贯彻教育部组织制定的高职高专教育基础课程教育基本要求的核心思想，更是为了突显经济数学是经济管理中所用的高等数学，真正体现“数学为本，经济为用”的经济数学特点、体现数学课程改革思想。我们再次对本教材各章内容进行适当增删与修改，调整部分例题，增加了经济应用例题和案例，删减了不太适宜高职高专教学需要的章节内容。

1. 本教材内容分为微积分、线性代数、概率论与数理统计三个模块，在每一模块前增加一篇简要介绍这一模块的起源、发展和作用的短文，使学生初步了解它的历史背景。在每一模块后面增加一个综合案例，主要是综合利用前面所学的知识，解决一个经营管理等方面的问题，使学生进一步体会经济数学的作用。

2. 考虑学习对象的状况及特点，贴近学生，每章正文之前给出了本章导读，主要简介本章基本内容和学习目标，使学生一开始就明确学习内容和主要目标。每章最后安排本章内容小结、一个相关数学家的介绍和本章作业，及时归纳、小结本章主要内容，增加学生的知识面。

3. 对各章内容进行适当增删与修改，删减了原第 6 章多元函数微分学内容，保留了二元函数的概念和偏导数的概念及求法，并把它们作为第 3 章的一节；把原第 7 章行列式删减调整为矩阵行列式，作为原第 8 章矩阵的一节；删除了原第 13 章方差分析与回归分析。

4. 线性规划是单独的一门学科，在本教材中将它简化，主要是利用初等行变换介绍单纯形方法，简化线性规划问题的求解过程，因此将它作为线性代数在经济管理中的典型应用介绍，并与投入产出模型一起，从原来的第 9 章中独立出来，单独组成一章。

因此本教材由原来的 13 章调整为现在的 11 章。

5. 除此之外，为了更贴近社会、贴近生活、贴近应用，还调整修改了部分例题，适当增加了社会活动和经济管理方面的典型例题或案例，进一步强调本学科的实际应用，激发学生的学习兴趣。

真诚地希望敬爱的同学、老师、读者能够参与到我们的数学教学改革中来，您的参与就是对我们最大的支持和褒奖，让我们一起将本教材建设为真正的高职高专教育的精品教材。

编者

2007 年 10 月

目　录

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第二篇 线性代数

线性代数是代数学的一个分支.线性代数学科和矩阵理论是伴随着线性系统方程系数研究而引入和发展的.行列式的概念最早是由17世纪日本数学家关孝和提出来的,关孝和在1683年写了一部叫做《解伏题之法》的著作,意思是"解行列式问题的方法",书里对行列式的概念和它的展开已经有了清楚的叙述.欧洲第一个提出行列式概念的是德国数学家、微积分学奠基人之一——莱布尼茨(Leibniz).1750年克拉默(Cramer)在他的《线性代数分析导言》中发表了求解线性系统方程的重要基本公式(即克拉默法则).范德蒙德(Vandermonde)是第一个对行列式理论进行系统阐述的人,并且给出了一条法则,用二阶子式和它们的余子式来展开行列式.就对行列式本身进行研究这一点而言,他是这门理论的奠基人.

《九章算术》中就有了类似于矩阵的概念,并利用矩阵的初等变换的方法求解线性方程组.自西尔维斯特(Sylvester)1850年首次使用矩阵这个词和概念之后,矩阵理论得到了迅速发展.对矩阵理论发展贡献比较大的有凯莱(Cayley).例如矩阵乘法、逆矩阵及其性质等重要概念都是他引入的.第二次世界大战后随着现代数字计算机的发展,矩阵又有了新的含义,特别是在矩阵的数值分析等方面.现在矩阵的应用十分广泛,在量子力学、统计力学、工程结构分析、系统控制等方面都有广泛应用.

高斯(Gauss)大约在1800年提出了高斯消元法并用它解决了天体计算和后来的地球表面测量计算中的最小二乘法问题.虽然高斯由于这个技术成功地消去了线性方程组的变量而出名,但早在几世纪中国人的手稿中就出现了解释如何运用"高斯"消元的方法求解带有三个未知量的三方程系统.在当时的几年里,高斯消元法一直被认为是测地学发展的一部分,而不是数学.而高斯-若尔当消元法则最初是出现在由威廉·若尔当(Wilhelm·Jordan)撰写的测地学手册中.许多人把著名的数学家卡米尔·若尔当(Camille·Jordan)误认为是"高斯-若尔当"消元法中的若尔当.

本篇分两部分.第一部分主要介绍线性代数的基础理论,包括 n 阶行列式的概念和计算方法;矩阵概念、矩阵运算、可逆矩阵和矩阵的秩;线性方程组的解法、解的情况判定、解的结构,向量组的相关性及向量组的秩.第二部分主要介绍线性代数在社会、经济管理学科中的应用,包括投入产出模型和线性规划数学模型及其解法.

第6章 矩 阵

本章导读

在线性代数中，矩阵是一个重要概念，它是从许多实际问题的计算中抽象出来的一个数学概念，是研究线性函数的一个有力工具，它在自然科学、工程技术和经济管理的许多学科中有广泛的应用. 本章主要介绍矩阵概念、特殊矩阵、矩阵运算、矩阵行列式、矩阵的逆与矩阵的秩等基本概念和方法. 本章的许多内容将在第7章中得到应用.

通过本章学习，希望大家：

- 了解阶梯形矩阵、矩阵秩的概念，了解 n 阶矩阵行列式的定义.
- 理解矩阵、逆矩阵的概念及其存在的充分必要条件，理解行列式的性质.
- 掌握几种特殊矩阵，掌握矩阵的线性运算、乘法运算、转置及其运算规律、矩阵的初等行变换和用初等行变换求矩阵秩和逆矩阵的方法，掌握二、三、四阶矩阵行列式的计算.

6.1 矩阵的概念

6.1.1 矩阵概念

矩阵是数（或函数）的矩形阵表. 在工程技术、生产活动和日常生活中，我们常常用数表表示一些量或关系，如工厂中的产量统计表，市场上的价目表等等. 在给出矩阵定义之前，先看几个例子.

例1 在物资调运中，某类物资有三个产地、四个销地，它的调运情况如下表所示：

表 6－1 调运方案表

调运吨数 销地 / 产地	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
A	0	3	4	7
B	8	2	3	0
C	5	4	0	6

如果我们用一个三行四列或 3×4 的数表表示该调运方案，可以简记作

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 7 \\ 8 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

其中每一行表示一个产地调往四个销地的调运量，每一列表示三个产地调到该销地的调运量.

例 2 假设我们记录 3 名学生甲、乙、丙的 3 门课程（数学、语文、英语）的期末考试成绩. 若按百分制评分，期末考试成绩由表 6－2 所示.

表 6－2 期末考试成绩表

成绩 课程 / 学生	数学	语文	英语
甲	90	86	95
乙	78	80	70
丙	92	93	96

学生各门课的成绩按原来的排列顺序可以组成一个三行三列或 3×3 的数表，即

$$\begin{pmatrix} 90 & 86 & 95 \\ 78 & 80 & 70 \\ 92 & 93 & 96 \end{pmatrix}.$$

例 3 含有 n 个未知量、m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

如果把它的系数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 和常数项 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 按原来顺序写出，就可以得到一个 m 行 $n+1$ 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

那么,这个数表就可以清晰地表达这一线性方程组.

由上面三个例子可以看到,对于不同的问题可以用不同的数表来表示,我们将这些数表统称为矩阵.

定义 6.1 有 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排列成一个 m 行 n 列,并括以圆括弧(或方括弧)的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 m **行** n **列矩阵**,简称 $m\times n$ **矩阵**.矩阵通常用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\cdots$ 表示,例如上述矩阵可以记作 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$,有时也记作

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},$$

其中 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**第 i 行第 j 列元素**.

特别地,当 $m=1$ 时,矩阵只有一行,即

$$\boldsymbol{A}=(a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}),$$

称之为**行矩阵**.当 $n=1$ 时,矩阵只有一列,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

称之为**列矩阵**.当 $m=n$ 时,矩阵的行数与列数相同,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

称之为 n **阶矩阵**,或 n **阶方阵**.

在 n 阶矩阵中,从左上角到右下角的对角线称为主对角线,从右上角到左下角的对角线称为次对角线.

上述例1中的数表可以称为 3×4 矩阵,例2中的数表可以称为3阶矩阵或3阶方阵.

所有元素全为零的 $m\times n$ 矩阵，称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$或 $\boldsymbol{O}$. 例如

$$\boldsymbol{O}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{O}_{3\times 5}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

分别为二阶零矩阵和 3×5 零矩阵.

在矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 中各个元素的前面都添加上负号(即取相反数)得到的矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记作 $-\boldsymbol{A}$，即 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6&-2&0\\-1&3&8\\5&0&-7\end{pmatrix},\ -\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-6&2&0\\1&-3&-8\\-5&0&7\end{pmatrix},$$

那么 $-\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵.

6.1.2 几种特殊矩阵

1. 三角形矩阵

主对角线下(或上)方的元素全都是零的 n 阶矩阵，称为 **n 阶上(或下)三角形矩阵**.

上三角形矩阵、下三角形矩阵统称为**三角形矩阵**.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&4&0\\0&1&-3\\0&0&5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\5&3&0&0\\0&4&0&0\\7&0&2&6\end{pmatrix}$$

分别是一个三阶上三角形矩阵和一个四阶下三角形矩阵. 值得注意的是，上(或下)三角矩阵的主对角线下(或上)方的元素一定是零而其他元素可以是零也可以不是零.

2. 对角矩阵

如果一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 既是上三角矩阵，又是下三角矩阵，则称其为 **n 阶对角矩阵**，亦即对角矩阵是非零元素只能在主对角线上出现的方阵. 如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&1.5\end{pmatrix}$$

是一个三阶对角矩阵.

显然，由主对角线的元素就可以确定对角矩阵了. 因此，经常把对角矩阵记作

$$\mathrm{diag}[a_1, a_2, \cdots, a_n].$$

当然允许元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中某些为零.

3. 数量矩阵

主对角线上元素都是非零常数 a,其余元素全部是零的 n 阶矩阵,称为 n 阶**数量矩阵**. 当 $n=2,3$ 时,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

就是二阶、三阶数量矩阵.

4. 单位矩阵

主对角线上的元素是 1,其余元素全部是零的 n 阶矩阵,称为 n **阶单位矩阵**,记作 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$. 当 $n=2,3$ 时,

$$\boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

就是二阶、三阶单位矩阵.

由上述讨论可知,单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵都是三角形矩阵,它们既是上三角形矩阵,又是下三角形矩阵. 换句话说,如果一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 既是上三角形矩阵,又是下三角形矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 一定是对角矩阵,当然也可能是数量矩阵或单位矩阵,因为单位矩阵、数量矩阵是对角矩阵的特殊情况.

6.2 矩阵的运算

对从实际问题中抽象出来的矩阵,我们经常将几个矩阵联系起来,讨论它们是否相等,它们在什么条件下可以进行何种运算,这些运算具有什么性质等问题,这就是本节所要讨论的主要内容.

6.2.1 矩阵相等

定义 6.2 如果两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 的行数和列数分别相同,而且各对应位置处的元素相等,则称**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等**,记作

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}. \tag{6.2.1}$$

即如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,且 $a_{ij}=b_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

由定义 6.2 可知,用等式表示两个 $m\times n$ 矩阵相等,等价于元素之间有 $m\times n$

个等式. 例如,矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 当且仅当

$$a_{11}=3, a_{12}=0, a_{13}=-5, a_{21}=-2, a_{22}=1, a_{23}=4.$$

又设矩阵

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

那么,无论矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中的元素 $c_{11},c_{12},c_{21},c_{22}$ 取什么数都不会与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等,这是因为 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 这两个矩阵的列数不同.

例 1 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & -1 & 3 \\ 0 & b & -4 \\ -5 & 8 & 7 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} -2 & -1 & c \\ 0 & 1 & -4 \\ d & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,求 a,b,c,d.

解 根据定义 6.2,由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,即

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 3 \\ 0 & b & -4 \\ -5 & 8 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 & c \\ 0 & 1 & -4 \\ d & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

得 $a=-2,b=1,c=3,d=-5$.

6.2.2 矩阵的加法

定义 6.3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是两个 $m\times n$ 矩阵,规定:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}, \tag{6.2.2}$$

称矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和.

由定义 6.3 可知,只有行数、列数分别相同的两个矩阵,才能做加法运算.

例 2 现有两种物资(单位:t)要从三个产地运往四个销地,其调运方案分别为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$. 即

$$A=\begin{pmatrix} 30 & 25 & 17 & 0 \\ 20 & 0 & 14 & 23 \\ 0 & 20 & 20 & 30 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 10 & 15 & 13 & 30 \\ 0 & 40 & 16 & 17 \\ 50 & 10 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

那么从各产地运往各销地两种物资的总运量是多少?

解 设矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为两种物资的总运量,那么矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和,即

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 30 & 25 & 17 & 0 \\ 20 & 0 & 14 & 23 \\ 0 & 20 & 20 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 15 & 13 & 30 \\ 0 & 40 & 16 & 17 \\ 50 & 10 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 30+10 & 25+15 & 17+13 & 0+30 \\ 20+0 & 0+40 & 14+16 & 23+17 \\ 0+50 & 20+10 & 20+0 & 30+10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 40 & 40 & 30 & 30 \\ 20 & 40 & 30 & 40 \\ 50 & 30 & 20 & 40 \end{pmatrix}.$$

如果 $A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n}$，由矩阵加法运算和负矩阵的概念，我们可以定义矩阵的减法：

$$A - B = A + (-B) = (a_{ij})_{m \times n} + (-b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}, \quad (6.2.3)$$

称矩阵 $A - B$ 为 A 与 B 的差.

例 3 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

求 $A + B, A - B$.

解 $$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+(-2) & 0+3 & -4+4 \\ -2+0 & 5+(-3) & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3-(-2) & 0-3 & -4-4 \\ -2-0 & 5-(-3) & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -8 \\ -2 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

设 A, B, C, O 都是 $m \times n$ 矩阵，根据定义 6.3 和负矩阵的概念，不难验证矩阵的加法满足以下运算规则：

1. 加法交换律：$A + B = B + A$；
2. 加法结合律：$(A + B) + C = A + (B + C)$；
3. 零矩阵满足：$A + O = A$；
4. 存在矩阵 $-A$，满足：$A - A = A + (-A) = O$.

6.2.3 矩阵的数乘

定义 6.4 设 k 是任意一个实数，$A = (a_{ij})$ 是一个 $m \times n$ 矩阵，规定：

$$kA = (ka_{ij})_{m \times n}, \quad (6.2.4)$$

称其为**数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的数量乘积**,或称之为**矩阵的数乘**.

由定义 6.4 可知,数 k 乘一个矩阵 $\boldsymbol{A}$,需要用数 k 去乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素. 特别地,当 $k=-1$ 时,$k\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$,得到 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵.

例 4 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -4 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

那么,用 2 去乘矩阵 $\boldsymbol{A}$,可以得到

$$2\times\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2\times 3 & 2\times(-1) & 2\times 7 \\ 2\times(-4) & 2\times 0 & 2\times 5 \\ 2\times 2 & 2\times 6 & 2\times 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 14 \\ -8 & 0 & 10 \\ 4 & 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 5 设从某四个地区到另三个地区的距离(单位:km)为:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 40 & 60 & 105 \\ 175 & 130 & 190 \\ 120 & 70 & 135 \\ 80 & 55 & 100 \end{pmatrix}$$

已知货物每吨每千米的运费为 4.80 元. 那么,地区之间每吨货物的运费可记为:

$$4.8\times\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4.8\times 40 & 4.8\times 60 & 4.8\times 105 \\ 4.8\times 175 & 4.8\times 130 & 4.8\times 190 \\ 4.8\times 120 & 4.8\times 70 & 4.8\times 135 \\ 4.8\times 80 & 4.8\times 55 & 4.8\times 100 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 192 & 288 & 504 \\ 840 & 624 & 912 \\ 576 & 336 & 648 \\ 384 & 264 & 480 \end{pmatrix}.$$

根据定义 6.4 容易验证,数 k,l 和矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 满足以下运算规则:

1. 数对矩阵的分配律:$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;
2. 矩阵对数的分配律:$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;
3. 数与矩阵的结合律:$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})$;
4. 数 1 与矩阵满足:$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

例 6 设两个 3×2 矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix},$$

求 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$.

解 先做矩阵的数乘运算 $3\boldsymbol{A}$ 和 $2\boldsymbol{B}$,然后求矩阵 $3\boldsymbol{A}$ 与 $2\boldsymbol{B}$ 的差. 因为