你缺少的不是机会，而是变换支点

首席教师

专题小课本

●小方法大智慧 ●小技巧大成效

●小单元大提升 ●小课本大讲坛

高中数学 导数及其应用

总主编/钟 山

金星教育

中国出版集团 现代教育出版社

海阔凭鱼跃

图书在版编目（CIP）数据

首席教师专题小课本．高中数学．导数及其应用／钟山主编．—北京：现代教育出版社，2008.4
ISBN 978－7－80196－634－6

Ⅰ．首… Ⅱ．钟… Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ．G634

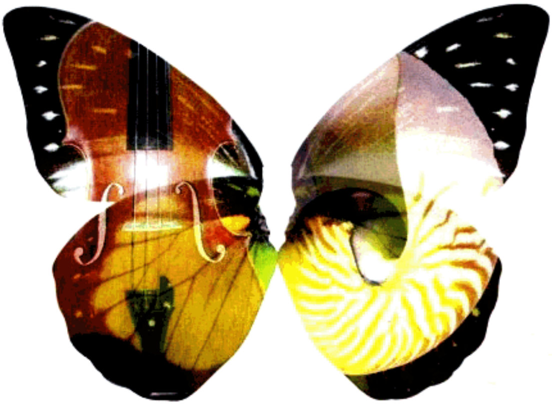
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 038422 号

书　　名：首席教师专题小课本·高中数学—导数及其应用
出版发行：现代教育出版社
地　　址：北京市朝阳区安华里 504 号 E 座
邮政编码：100011
印　　刷：北京市梦宇印务有限公司印刷
发行热线：010－61743009
开　　本：890×1240　1/32
印　　张：8
字　　数：340 千字
印　　次：2008 年 4 月第 1 版　第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978－7－80196－634－6
定　　价：13.80 元

41

您需要的不是机会

NINXUYAODEBUSHIJIHUI



而是变换支点

小单元——知识·方法·能力·命题的交汇处

小单元——高效学习·成功备考的新支点

小单元学习法

首席教师的成功经验，优秀学生的学习秘诀

小单元是指在充分研究考纲和课标，透析教材知识结构，按照知识、方法、能力与中高命题的内在联系和系统结构，把教材内容分成若干个相对完整和独立的内容组块。几个小单元又构成相当于教材单元（或章）的内容板块，教材的几个单元又构成了大专题。

课时的基础性学习与单元的提升性学习

各类统考、高考试题命制的立足点、密集区在小单元，其能力要求、难度、综合性、深刻性、创新性往往与课时学习、教材内容严重脱节。在一节教材或一个课时中，对问题、原理及规律往往不能完全清楚认识，也不可能深化拓展，其实这只是基础性学习阶段。真正发展能力和提升成绩的支点是小单元，小单元学习是更高层次的提升性学习，是真正深化、拓展、发展能力的重要阶段，也是行之有效的螺旋式滚动提升的科学学习方法。

主动变换发力点

实际教学中由于课时紧张，大多数师生致力于同步教材的课时学习，习惯于一个个概念孤立记忆，一道道题去解析，往往事倍功半，这也是很多学生平时学习很努力，但考试成绩不理想的重要原因之一。这就要求我们转变观念，在同步学习及备考复习的过程中适时、适度的插入小单元、大单元及专题学习，主动完成提升性学习，对所学内容分级整合深化、各个击破，分级提升学生的知识整合能力、综合运用能力和问题解决能力。

单元学习五大关键

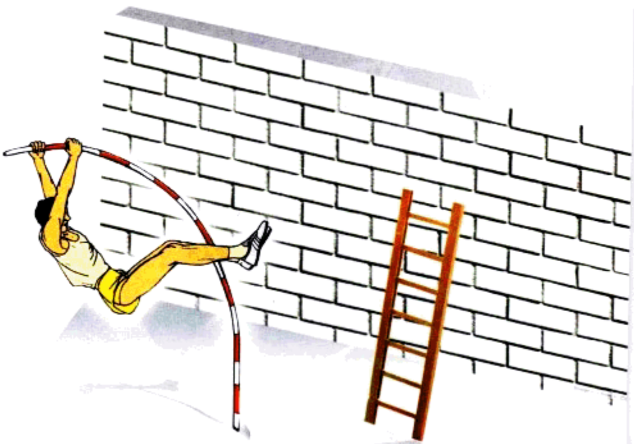
整合深化
形成知识模块

归纳拓展
活化解题方法

系统分层
培养高考能力

居高临下
形成应试策略

题组检测
优化训练方法



首席教师
专题小课本

高中数学

几何初步

总 主 编：钟　山
本册主编：向　宁
　　　　　李庆阳

本丛书成立答疑解难工作委员会，如有疑难问题可通过以下方式与我们联系：
企业网站：
http://www.bjjxsy.com
产品网站：
http://www.swtnet.net
服务电话：010-61749009
　　　　　010-61767818
电子邮箱：
book@bjjxsy.com
service@swtnet.net
通信地址：北京市天通苑邮局6503号信箱
邮政编码：102218

专题三级提升

思维方法攻略
SIWEIFANGFAGONGLUE

高考热点突破
GAOKAOREDIANTUPO

专题速记图解
ZHUANTISUJITUJIE

专题提升

高考热点导航
GAOKAOREDIANDAOHANG

高考零距离检测
GAOKAOLINGJULIJIANCE

知识清单精解

单元内知识、方法、公式等学习要点清单化，运用整合、深化、对比、综合、发散等精细化学习方法及口诀、图表、顺口溜等学习技巧，精讲透析，简明快捷，易看、易记、易懂。

方法技巧突破

精心归纳问题及类型，找到最佳解决思想方法、解题技巧，透析方法运用要点，实现有效迁移，举一反三。例题讲解中进一步对疑难点的深化拓展，真正解决知识学习与解题运用的脱节问题。

高考能力培养

透析考纲对单元内容的能力要求，精析高考对知识内容的具体要求配以典型考例透视能力层次，科学把握学习的难度和综合性，做到有的放矢，达到事半功倍的学习效果。

命题规律点津

从高考要求、命题规律、应试策略三个维度详实讲解单元的高考现状与发展趋势，具体把握应试策略与技巧，真正实现高考备考同步化，科学阐释了零距离高考新概念。

题组优化训练

从误区突破、综合创新两个维度分题组选题，精选高考真题，热点模拟题、创新题、原创题，针对训练，集中突破。同时答案详解，配以题组规律总结，更利于练后反馈，达到训练效益最大化。

知识网络梳理

细致梳理概括大单元或章的知识与方法，达到网络化、图式化、结构化和形象化，利于快捷地由小单元升华到大单元，进一步扩充知识架构。

综合专题突破

在小单元讲练的基础上，整理出综合性、创新性、能力性更强的问题、方法、题型，以小专题形式专项讲解、拓展突破。

发现依靠眼光 行动决定收获

前言 QIANYAN

近年来，我国的基础教育改革和素质教育进程已进入深化实施阶段，中学教材已呈现出“一标多本”的多元化格局，高考更是呈现出“一纲多卷”的地方化特色。为了更好地适应教学考的新趋势、新特色，我们集各省名校的学科首席教师、一线特高级教师和有经验的教育考试专家的聪明智慧和科研成果，精心构思，编写打造了本套丛书。

本套丛书的鲜明特色和深度魅力，主要体现在以下四个方面：

1．核心单元，提升成绩的真正支点

小单元学习与同步课时学习相比，是更高层次的提升性学习，是真正深化拓展、发展能力、成功应试的重要步骤，也是行之有效的螺旋式滚动提升的科学学习方法。本套丛书以小单元为讲练基点，弥补了同步教学的缺失和薄弱环节，单元内由“知识、方法、能力、应试与训练”五要素构成了最优化学习程序，层次鲜明，通过对重难点、能力点、方法点和考点的精心讲练，有效的为师生最大限度提升成绩，建起了知识、方法和能力提升的新支点。

2．螺旋提升，提供三级发展平台

专题编写遵循“小单元提升、大单元提升、本专题提升”三个梯度，再加上平时的课时学习，讲练结合、循序渐进、螺旋提升，构成了学科学习、思维发展与能力培养的有机整体。

3．突出方法，多维度培养能力

无论是疑难讲解，问题解决，还是应试与训练，均以方法归纳、提炼与运用为突破口，力求做到集“学习法、解题法、应试法、训练法”于一身，帮助学生高效构建知识体系和方法体系，使读者在运用本书高效学习的同时收获更多的有效方法，发掘自己的最大学习潜能。

4．汲取各版本精华，真正的专题教材

在编写过程中，充分汲取各版本教材的特色与精华，选取其中典型素材、典题典例、方法技巧，以师生完成同步教材的课时学习为基础，通过整合、深化、发散、分级，达到高考要求，既是学生完成提升性学习的专题教材，更是教师各类单元、专题教学的必备参考。

阿基米德说，给我一个支点，我将撬起地球，本套丛书必将成为您成功的新支点，发展的新平台.

目录

首席寄语

■专题导引

微积分的创立是数学发展中的里程碑，它的发展和广泛应用开创了向近代数学过渡的新时期，为研究变量和函数提供了重要的方法和手段. 导数概念是微积分的核心概念之一，它有极其丰富的实际背景和广泛应用，通过大量实例，经历由平均变化率到瞬时变化率刻画现实问题的过程. 理解导数的概念及其几何意义，了解导数在研究函数单调性、极值、最值等性质中的作用，了解导数在实际问题中的应用所起的作用，初步了解积分的概念、运算及应用，为以后进一步学习微积分打下基础. 通过本专题的学习，仔细体会导数的思想及其丰富内涵，感受导数在解决问题中所起的作用，了解微积分的文化价值.

■高考命题规律

在近几年的高考试卷中，每年都有导数题，而且必有一道解答题考查利用导数研究函数的单调区间、极值、最值、实际应用或不等式的证明，这应该引起我们的重视. 结合往年高考和新课标要求，本专题仍主要考查导数的概念、导数的几何意义、几种常见函数的导数、复合函数的导数、基本导数公式，利用导数研究函数的单调性和极值、最值，利用导数研究函数的图象，用导数解决实际问题以及定积分的概念、定积分的几何意义，利用微积分基本定理求一些函数的定积分，利用定积分解决一些实际问题. 所以我们应立足于基础知识和基本方法的复习，以熟练技能，巩固概念为目标.

(1)主要考查导数的几何意义及求导法则.

(2)考查求函数单调区间、极值、最值等问题.

(3)定积分是新增内容，与实际问题结合密切，而且是中学内容与大学内容的一个衔接点，所以将是高考中考查的一个重点，而且可能出现各种题型，因此在复习这部分内容时要引起重视.

■学习应试策略

1. 在复习导数这一部分时，应首先把课本上的基本内容掌握准确，然后再适当做一些应用性问题，特别是既能用导数方法解决，又能用初等数学解决的问题. 因为高考题注重给每个考生有一个发挥自己思维能力的空间，此类问题可以用多种方法来解决，适合于各种考生用不同的方法来做，正好体现不同的能力，具有很强的能力水平代表价值，基于这一特点，考生应予以重视.

2. 积分是中学限选内容较为重要的部分，是解决实际问题的重要数学工具，广泛应用于几何、物理及实际问题的解决之中，不定积分的计算、定积分的概念和应用是本专题的重点知识. 因此，应该掌握积分的概念、性质和公式，准确熟练地求不定积分和定积分；会求平面图形的面积及旋转体的体积；会求变速直线运动的路程和变力做功；同时将一些实际问题转化为可用积分处理的问题.

3. 重视数学思想方法的应用.

在解决本专题问题时，应注重以下数学思想方法的应用：

(1)极限思想；(2)数形结合思想；(3)转化与化归思想；(4)分类讨论思想；(5)函数与方程思想；(6)定积分思想.

[单元提升篇]

第一章　导数及导数的应用

课程标准要求

1. 了解导数的概念、几何意义及四则运算法则.
2. 了解导数在实际生活中的应用.

第一单元　导　数

知识清单精解 ZHISHIQINGDANJINGJIE

考点1　平均变化率

(1)定义:一般地,对于函数 $y=f(x)$ 来说,$P(x_0,y_0)$ 是函数图象上一点,$Q(x_1,y_1)$ 也是图象上一点,自变量 x 从 x_0 变化到 x_1 时相应地函数值则由 y_0 变化到 y_1,其中 x_1-x_0 叫做自变量 x 的增量,记为 Δx,y_1-y_0 叫做函数 y 的增量,记为 Δy,则有 $\Delta y=y_1-y_0=f(x_1)-f(x_0)$. 若 $\Delta x\neq 0$ 时,$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 称作 $y=f(x)$ 在区间 $[x_0,x_0+\Delta x]$(或 $[x_0+\Delta x,x_0]$)的平均变化率.

(2)求函数 $f(x)$ 的平均变化率的步骤:

①求函数值的增量 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$;

②计算平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

考点2　瞬时变化率

(1)瞬时速度

设物体的运动方程为 $s=s(t)$,如果一个物体在时刻 t_0 时位于 $s(t_0)$,在时刻 t_0+

Δt(Δt 称为时间总量)时位于 $s(t_0+\Delta t)$,相应地,从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内,物体的位移(即位置增量)是 $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$.

那么,位置增量 Δs 与时间增量 Δt 的比,就是这段时间内物体的平均速度 $\bar{v}$,即

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

当这段时间很短,即 Δt 很小时,这个平均速度就接近时刻 t_0 的速度,Δt 越小,$\bar{v}$ 就越接近于时刻 t_0 的速度. 当 $\Delta t\to 0$ 时,这个平均速度的极限

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

这就是物体在时刻 t_0 的速度(瞬时速度).

(2)瞬时变化率

设函数 $y=f(x)$在 x_0 及附近有定义,当自变量 x 在 x_0 附近的改变量为 Δx 时,函数值相应地改变 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,若 $\Delta x\to 0$ 时,平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 趋近一个常数 l,则称常数 l 为函数 $f(x)$在 x_0 处的瞬时变化率.

考点 3　导数的概念

(1)导数的概念

函数 $y=f(x)$,如果自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx,那么函数 y 相应地有增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 就叫函数 $y=f(x)$在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率,即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

如果当 $\Delta x\to 0$ 时,$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 有极限,则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导,并把这个极限叫做 $f(x)$在点 x_0 处的导数(或变化率),记作:$f'(x_0)$或 $y'|_{x=x_0}$,即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

关于函数 $f(x)$在 x_0 处的导数的另一种定义:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

(2)导函数的概念

如果函数 $y=f(x)$在开区间(a,b)内的每一点都可导,就说 $f(x)$在开区间(a,b)内可导. 这时,对于开区间(a,b)内每一个确定的值 x_0,都对应着一个确定的导数 $f'(x_0)$,这样就在开区间(a,b)内构成一个新的函数,我们把这一新函数叫做 $f(x)$在开区间(a,b)内的导函数,记作 $f'(x)$或 y',即

$f'(x)=y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

(3)利用导数定义求导数的步骤：

①计算函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

②计算函数的增量 Δy 与自变量的增量 Δx 的比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；

③计算上述增量的比值在 $\Delta x\to 0$ 时的极限，

即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

考点 4 导数的几何意义

(1)函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率.

(2)如图 1-1-1，若曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 及其附近有意义，给定了横坐标 x_0 和一个增量 Δx，相应的纵坐标也有一个增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，对应的点为 $Q(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，则 PQ 为曲线 $y=f(x)$ 的割线. 当 $\Delta x\to 0$ 时，$Q\to P$. 如果割线 PQ 趋近于一条确定的直线(即极限位置)，则这条确定的直线即为曲线的切线. 当然，此时割线 PQ 的斜率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 就趋近于切线的斜率，即切线的斜率为 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

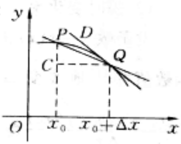


图 1-1-1

切线的方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$.

若曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的导数不存在，就是切线平行于 y 轴或在该点不可导.

(3)利用导数的几何意义可得到圆锥曲线的切线方程如下：

①过圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ (r>0)$ 上一点 $P_0(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$；

②过椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点 $P_0(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$；

③过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上的一点 $P_0(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$；

④过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上一点 $P_0(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $y_0y=p(x+x_0)$.

如在④中，由 $y^2=2px$，得 $x=\dfrac{y^2}{2p}$. 由导数的定义知 $x'|_{y=y_0}=\dfrac{y_0}{p}$.

∴ 在抛物线上 $P_0(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $x-x_0=\dfrac{y_0}{p}(y-y_0)$，

化简得 $y_0y=p(x+x_0)$.

(4)由导数的几何意义知 $f'(x_0)=k=\tan\alpha$(其中 k 为一点(x_0,y_0)处的切线的斜率,α 为切线的倾斜角).

所以,当 $f'(x_0)>0$ 时,切线的倾斜角为锐角;

当 $f'(x_0)<0$ 时,切线的倾斜角为钝角;

当 $f'(x_0)=0$ 时,切线与 x 轴平行;

当 $f'(x_0)$不存在时,切线与 y 轴平行.

考点5 "函数 $f(x)$在 x_0 处的导数"、"导函数"、"导数"三者之间的区别与联系

(1)"函数在一点处的导数"就是在该点的函数值的改变量与自变量的改变量的比的极限,它是一个数值,不是变数.

(2)"导函数":如果函数 $f(x)$在开区间(a,b)内每一点都可导,就说 $f(x)$在开区间(a,b)内可导,这时对于区间(a,b)内每一个确定的值 x_0,都对应着一个导数 $f'(x_0)$,这样就在开区间(a,b)内构成一个新的函数,我们把这一新函数叫做 $f(x)$在开区间(a,b)内的导数,记作 $f'(x)$或 y',即 $f'(x)=y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

(3)导函数也简称导数.所以"导数"$\left\{\begin{array}{l}f(x)\text{在一点 }x_0\text{ 处的导数}\\ \text{导函数}\end{array}\right\}$两者是个别与一般的关系.

(4)函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$就是导函数 $f'(x)$在点 $x=x_0$ 处的函数值,$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$.

所以求函数在一点处的导数,一般是先求出函数的导函数,再计算这点的导函数值.

方法技巧突破
FANGFAJIQIAOTUPO

数学思想方法

1　转化思想

本单元所解决的一些问题,如:求曲线的切线的斜率、切线方程,往往转化为导数的定义或其几何意义来解决.

例1　过曲线 $y=f(x)=x^3$ 上两点 $P(1,1)$和 $Q(1+\Delta x,1+\Delta y)$作曲线的割线,求出当 $\Delta x=0.1$ 时割线的斜率,并求曲线在点 P 处切线的斜率.

解:割线 PQ 的斜率是 $\tan\beta=\frac{\Delta y}{\Delta x}$,曲线在点 P 处的切线的斜率 $\tan\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

$\because$ $\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^3-1=3\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$,

$\therefore$ 割线 PQ 的斜率

$\tan\beta=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{3\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$

$=3+3\Delta x+(\Delta x)^2$.

当 $\Delta x=0.1$ 时，割线 PQ 的斜率为 $\tan\beta=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3+3\times0.1+(0.1)^2=3.31$.

曲线在点 P 处的切线的斜率为

$\tan\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}[3+3\Delta x+(\Delta x)^2]=3$.

点拨：一般地，设曲线 C 是函数 $y=f(x)$ 的图象，$P(x_0,y_0)$ 是曲线 C 上的定点，点 $Q(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 是曲线 C 上与点 P 邻近的点，则

有 $y_0=f(x_0)$，$y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

所以割线 PQ 的斜率为 $\tan\beta=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

曲线在点 P 处的切线的斜率为 $\tan\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

例 2 已知曲线 C：$y=x^3$.

(1)求曲线 C 上横坐标为 1 的点处的切线方程；

(2)第(1)小题中的切线与曲线 C 是否还有其他公共点？

解：(1)将 $x=1$ 代入曲线 C 的方程，得 $y=1$，∴ 切点为 $P(1,1)$.

$\because\ y'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2]=3x^2$,

$\therefore\ y'|_{x=1}=3$.

∴ 过 P 点的切线方程为 $y-1=3(x-1)$，即 $3x-y-2=0$.

(2)由 $\begin{cases}y=3x-2,\\ y=x^3,\end{cases}$ 可得 $(x-1)(x^2+x-2)=0$,

解得 $x_1=1$，$x_2=-2$.

从而求得公共点为 $P(1,1)$、$Q(-2,-8)$.

这说明切线与曲线 C 的公共点除了切点外，还有其他公共点.

点拨：第(1)问把切线方程问题转化为导数的几何意义问题；第(2)问把直线与曲线的交点问题转化为方程组解的问题，进而得到解决.

例 3 求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 处的切线的斜率，并写出切线方程.

解：$\because\ y=\dfrac{1}{x}$,

$\therefore\ y'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{-1}{x^2+x\Delta x}=-\dfrac{1}{x^2}$.

$\therefore y'|_{x=\frac{1}{2}}=-4$.

$\therefore$ 切线的斜率为 $k=-4$.

$\therefore$ 切线方程为 $y-2=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)$，即 $4x+y-4=0$.

点拨：(1)函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$的几何意义是曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率.

(2)由导数的定义，我们可以得出求函数 $f(x)$在点 x_0 处的导数的方法.

2　分类讨论思想

本单元通过对导数存在性分类讨论，寻求曲线切线存在性问题的解决方法.

例 4　设 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\leqslant 1,\\ a+bx, x>1,\end{cases}$ 试讨论 a 为何值时，$f(x)$在点 $x=1$ 处可导？

解：要使 $f(x)$在 $x=1$ 处可导，其必要条件是 $f(x)$在 $x=1$ 处连续，应有 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$，即 $a+b=1$.

又若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$存在，即 $x=1$ 时，

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}(2+\Delta x)=2,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{a+b(1+\Delta x)-(a+b)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}b\frac{\Delta x}{\Delta x}=b,$$

$\therefore b=2$，代入 $a+b=1$，得 $a=-1$.

故当 $a=-1,b=2$ 时，$f(x)$在点 $x=1$ 处可导.

点拨：因为导数在 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限存在. 我们要讨论判断某函数是否可导，就看 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限是否存在，从而判断 a 的存在性及结论.

例 5　试讨论函数 $y=|x|$在点 $P(0,0)$处的切线的存在情况.

解：如图 1-1-2 所示，取 $P(0,0)$点的右侧邻近点 $Q(\Delta x,\Delta y)$，此时 $\Delta x>0$，按切线的定义，当 $\Delta x\to 0$ 时，割线 PQ 的极限位置为直线 PQ.

同理，若取 $P(0,0)$点的左侧邻近点 $R(\Delta x,\Delta y)$，割线 PR 的极限位置为直线 PR. 因为直线 PQ 和直线 PR 不是同一直线，故曲线 $y=|x|$在 $P(0,0)$点的切线不存在.

点拨：由上题可知若函数在某点 x_0 处连续，但在这一点不一定可导.

■解题技法

定义法求函数的导数：定义法解决问题是本单元中的基本方法，用函数导数的定义处理本单元有关问题是很有效的办法.

例6 求函数 $y=\sqrt{x}$在 $x=1$ 处的导数.

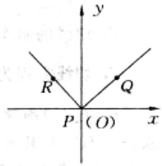


图 1-1-2

解法 1:(导数的定义法):

$\Delta y=\sqrt{1+\Delta x}-1$,

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\Delta x}+1}$,

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+\Delta x}+1}=\dfrac{1}{2}$,$\therefore y'|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$.

解法 2:(导函数的函数值法):

$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$,

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$,

$\therefore y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

$\therefore y'|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$.

点拨:由导数的定义法求导数是函数求导的基本方法.确定函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数有两种方法:其一就是定义法;其二就是导函数的函数值法.

例7 设 $f(x)$在 x_0 处可导,求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$的值.

解:观察所求极限式,发现和 x_0 的导数式类似,由导数的定义知函数值 $f(x_0-\Delta x)-f(x_0)$所对应的自变量的改变量为$(x_0-\Delta x)-x_0=-\Delta x$.

$\because f(x)$在 x_0 处可导,

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=-\lim\limits_{-\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)$.

点拨:本例用导数的定义求解.在导数的定义中,增量 Δx 的形式也是多种多样的,但不论 Δx 选择哪一种形式,Δy 也必须选择相应的形式,若将 Δx 变为 $m\Delta x$,则 $\Delta y=f(x_0+m\Delta x)-f(x_0)$,只有这样 $\lim\limits_{m\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+m\Delta x)-f(x_0)}{m\Delta x}=f'(x_0)$.因此,要准确把握 $f'(x_0)$的定义形式.

例8 若一物体的运动方程如下:

$$s=\begin{cases}3t^2+2 & (0\leqslant t<3), & ①\\ 29+3(t-3)^2 & (t\geqslant 3). & ②\end{cases}$$

求此物体在 $t=1$ 和 $t=3$ 时的速度.

分析:$t=1$ 时,$s=3t^2+2$;$t=3$ 时,$s=29+3(t-3)^2$.

分别求出 Δs,再由 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$求得.